



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$

Решение: Через $D_i(b)$ будем обозначать степень вхождения a в b .

1) $D_2(a) = x_1, D_7(a) = y_1$

$D_2(b) = x_2, D_7(b) = y_2$

$D_2(c) = x_3, D_7(c) = y_3$

2) Т.к. $a \mid b$: $2^{14} \Rightarrow x_1 + x_2 \geq 14$

Аналогично: $\begin{cases} x_2 + x_3 \geq 14 \\ x_3 + x_1 \geq 20 \\ y_1 + y_2 \geq 10 \\ y_2 + y_3 \geq 14 \\ y_3 + y_1 \geq 37 \end{cases}$

3) Искать не будем

3 получим: $2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 14 + 14 + 20 < 51$

$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 51 \\ \text{т.к. } y_1 + x_2 + x_3 \geq y_1 + x_2 + x_3 \geq 26 \end{cases}$

4) Видно, что если $y_1 + y_3 \geq 37 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 \geq 37$.

5) $D_2(abc) = x_1 + x_2 + x_3 \geq 26$

$D_7(abc) = y_1 + y_2 + y_3 \geq 37$

$\Rightarrow abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$ Пример: $\begin{cases} a = 2^{14} \cdot 7^{15} \\ b = 2^{10} \cdot 7^{20} \\ c = 2^{12} \cdot 7^{22} \end{cases}$

Кроме того убедиться, что

Пример удовлетворяет условию.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

② Ответ: 8

1) Пример: $a=1, b=7 \Rightarrow a+b=8, a^2-ba+b^2=8 \Rightarrow \begin{matrix} a+b:8 \\ a^2-ba+b^2:8 \end{matrix}$

2) Оценим: $a, b \in \mathbb{N}$ - несократимы $\Rightarrow$

$\Rightarrow (a, b) = 1$, где $(x, y) = \text{НОД}(x, y)$.

3) Найдем наименьшее m и n $\Rightarrow$ то

наим. общее, то найдем $(a+b, a^2-ba+b^2) = (a+b, a^2-ba+b^2) + \text{н.к.}$

по т.к. $(a, b) = 1 \Rightarrow \begin{cases} (a+b, a) = 1 \\ (a+b, b) = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} (a+b)^2: (a+b) \\ \text{т.к.} \end{matrix}$

если $\begin{cases} (a+b):d \Rightarrow b:d \\ a:d \end{cases}$, то $(a, b) = 1$ ошибочный

по т.к. $\Rightarrow (a+b, a^2-ba+b^2) = (a+b, 8) \Rightarrow$

$\Rightarrow |(a+b, a^2-ba+b^2)| \leq 8$.

т.к.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

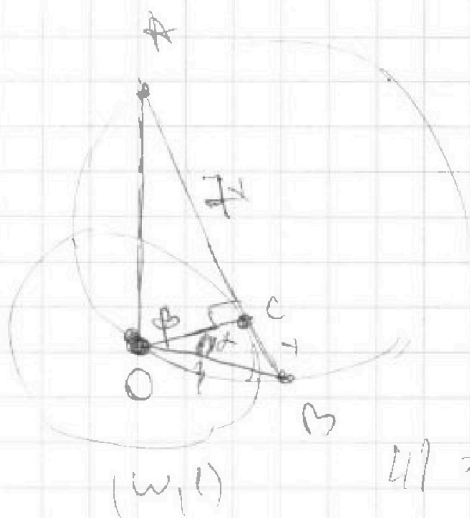
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

3



1) H_2SO_4 генератор W-O.

$(\Omega, \mathcal{F})$ 2) Hypos $\begin{cases} \angle COA = \alpha \\ \angle COB = \beta \end{cases}$

3) 7.к. Ag -накамерный

OC ⊥ AB

4) $3) \Rightarrow \text{fg } p = \frac{\sigma x}{\sigma} = \sigma x$

$$\log 2 = \frac{\infty}{\infty} = 2$$
$$5) \Delta BOA: \frac{8x}{\sin(45^\circ)} = 10$$

6) $\begin{cases} \sin \alpha = \frac{4}{5} \\ \sin \beta = \frac{3}{5} \\ \sin(\alpha + \beta) = \frac{8}{5} \end{cases}$ $\begin{cases} \sin \alpha = \frac{4}{5} \\ \sin \beta = \frac{3}{5} \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$

$$x^2 \cos^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \cos^2 x = \frac{1}{x^2 + 1}$$

7. K. Suppose θ homogeneous $\Delta \Rightarrow \alpha + \beta \in [0, \frac{\pi}{\theta}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin \alpha, \cos \alpha, \sin \beta, \cos \beta \text{ SD}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{and similarly} \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}$$

$$\sin \alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{and} \quad \sin \beta = \frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}$$

$$\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{and} \quad \sin \beta = \frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}} + \frac{4x}{\sqrt{49x^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{x}{\sqrt{(x^2+1)(49x^2+1)}} = \frac{4}{5} (x^2+1)(49x^2+1) = 100 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

③ Упрощение!!!

$$(x^2+1)(49x^2+1)=100 \quad t=x^2$$

$$(t+1)(49t+1)=100$$

$$49t^2+t+49t+1=100$$

$$49t^2+50t-99=0$$

$$D=2500+4 \cdot 49 \cdot 99=4(4851+625)=$$

$$=4 \cdot 5476=4 \cdot 4 \cdot 1369$$

$$t = \frac{-50 \pm 4\sqrt{1369}}{98} \quad \text{так } t \geq 0$$

$$x = \frac{\sqrt{2\sqrt{1369}-25}}{7}$$

$$AB=8x = \frac{8\sqrt{2\sqrt{1369}-25}}{7}$$

Ответ:

$$5476 = 4 \cdot (1369 + 100 + 99)$$

$$4 \cdot 1369$$

$$= 100 + 99 + 100 =$$

$$99 \cdot 49 =$$

$$= 100 \cdot 4900 - 49 =$$

$$= 4851$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4.

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x.$$

ОДЗ: $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$

из условия 1):
 $2(x-1)(x-3) \geq 0$

$2x^2 + 2x + 1 \geq 0$ — всегда верно

$x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$

Докажем обе части на $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$

Если, $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \neq 0$

1) Если $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 0 \Rightarrow$
 $\geq 0 \quad \geq 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \quad x \in \mathbb{R} \quad 1) 2x^2 - 5x + 3 = 0$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25 - 24} = 1$
 по 4-й формуле $x = \frac{3}{2}$

1.2) $2x^2 + 2x + 1 = 0$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{4} \Rightarrow$ нет корней в $\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \neq 0 \quad \forall x.$

2) т.к. $\neq 0$ докажем:

$(\sqrt{2x^2 - 5x + 3})^2 - (\sqrt{2x^2 + 2x + 1})^2 = (2 - 4x)$

$(2 - 4x) = (2 - 4x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$

2.1) $2 - 4x = 0 \quad \left[x = \frac{1}{2} \right]$ удов. условию ОДЗ:

2.2) $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$

~~$2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \quad \left(x = \frac{1}{2} \right) \Rightarrow 2 \left(1 + \frac{1}{2} \right)^2 = 2 \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

④ Прогресс!!!

$$2) \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

т.к. обе подкоренные $\geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\sqrt{2x^2 - 5x + 3})^2 + (\sqrt{2x^2 + 2x + 1})^2 +$$

$$+ 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 1$$

$$4x^2 - 3x + 4 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 1$$

$$4x^2 - 3x + 4 = 4\left(\sqrt{x^2 - \frac{3}{4}x + 1}\right) =$$

$$= 4\left(\left(\sqrt{x - \frac{3}{8}}\right)^2 + 1 - \left(\frac{3}{8}\right)^2\right) =$$

$$= 4\left(\sqrt{x - \frac{3}{8}}\right)^2 + 4\left(1 - \left(\frac{3}{8}\right)^2\right)$$

$$\frac{3}{8} < \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{3}{8}\right)^2 < \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \left(\frac{3}{8}\right)^2 > \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\left(1 - \left(\frac{3}{8}\right)^2\right) > 2 \Rightarrow$$

Итак получаем $2 + 2\sqrt{\dots} > 0 = 1$

$$\sqrt{\dots} \in \{\emptyset\} \Rightarrow$$

т.е. ответ: $\frac{2}{7}$.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6.

$$ax - y + 10b = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ((x+8)^2 + y^2 - 1) (x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{array} \right.$$

$$((x+8)^2 + y^2 - 1) (x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

$\Downarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \quad 1) \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \\ (x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 \quad 2) \\ x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \end{array} \right.$$

Пусть ω - окр. с центром в $(-8, 0)$
и радиусом 1,
 Ω - окр.
с центром
в $(0, 0)$ и
радиусом 2.

1) - область пересечения

окрестностей окружностей
окр. с центром в $(-8, 0)$ и радиусом 1
и с центром в $(0, 0)$ и радиусом 2.

это просто область окружностей ω .

аналогично 2) - это область окружностей Ω

ПМТ удовлетворяется впервую очередь,
это область окружностей ω и Ω .

$ax - y + 10b = 0$ - прямая. Если прямая

пересекает зону Ω окружностей

в Ω в x точка x - то будем считать что

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

евого решения, т.к. будем решением все
точки на сфере. Вспомогательной прямой на
окружности $\Rightarrow ax - y + 10b = 0$ равные
для точек $ax^2 + by^2 = 10$. либо
полностью либо не имеют общих точек.
Значит с прямой окруж. не больше одного
решения $\Rightarrow$ всего не больше 2,
а точек было равно 2 значит равные
касательные их обеих $\Rightarrow ax - y + 10b = 0$.
одно из центров общих касательных
лежит на прямой.

Таким образом задача сводится к
поиску, чтобы найти координаты
при x для 4 точек касательных.

1) Пусть центры M и N O_1 и O_2
соответственно.

2) Найдем 2 центра касания
переведем эти центры в окружности
в точку.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3. Провериме!!!

Два окружности имеют на прямой Ox и две точки, что если O - центр

показатели, то $\frac{OO_1}{OO_2} = \frac{1}{2}$ (отношение радиусов)

Но если $OO_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow O \in y \Rightarrow$

$\Rightarrow O(0,0)$ $\frac{OO_1}{OO_2} = \frac{1}{2}$

$O_1(-8,6)$

$O_2(0,0)$

$\Rightarrow 2(x-0)^2 = x^2$

$2x^2 + 32x + 128 = 0$ Проверим $O(-16,0)$
 $x^2 + 16x + 64 = 0$ $O(-\frac{16}{2}, 0)$

Проверка: $-16 - (-8) = \frac{1}{2}$

$\frac{-8 - (-\frac{16}{2})}{-\frac{16}{2} - 0} = \frac{16}{3} - 8 = \frac{16-24}{3} = \frac{-8}{3} = -\frac{8}{3} \neq \frac{1}{2}$

Вокруг $(-16,0)$ - центр окружности

переведем O_2 в формулу $O_2(0,0)$

и используем координаты - это

координаты $(-16,0)$ и $(-\frac{16}{2},0)$ равны к O_2 т.е. это центр окружности,

то же - к одной - все и другой.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐



⑥ Продолжение!!!

Плюс проверим $y(-16, 0)$ и $(-\frac{16}{3}, 0)$
касательные к ~~кр.~~ Ω

1) Пусть кас. — $y = kx + b$. $(-16, 0) \in y = kx + b$.

Тогда пересечение ~~кр.~~ Ω — $y = kx + b$.
 $\begin{cases} y = kx + b \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

$$x^2 + (kx + b)^2 = 4$$

$$x^2 + k^2 x^2 + 2kbx + b^2 - 4 = 0$$

$$x^2(k^2 + 1) + x \cdot 2kb + b^2 - 4 = 0$$

Г.к. $\Rightarrow$ то кас. $\Rightarrow D = 0 = (2kb)^2 - 4(k^2 + 1)(b^2 - 4)$

$$\begin{cases} b = -16k \\ 4k^2 b^2 - 4(k^2 b^2 - 4k^2 + b^2 - 4) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -16k \\ 4k^2 b^2 - 4k^2 b^2 + 16k^2 - 4b^2 + 16 = 0. \end{cases}$$

$$16k^2 - 4(16k)^2 + 16 = 0.$$

$$4k^2 - (16k)^2 + 4 = 0.$$

$$k^2 - 16 \cdot 4k^2 + 1 = 0 \quad k^2 \sim \frac{1}{63} \quad \boxed{k = \pm \frac{1}{\sqrt{63}}}$$

2) $(-\frac{16}{3}, 0) \in y = kx + b$ $b = -\frac{16}{3}k$

Аналогично $16k^2 - 4b^2 + 4 = 0 \quad 4k^2 - b^2 + 4 = 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6. Продолжение!!!

$$\begin{cases} 4k^2 - 6\frac{4}{3}k + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{16}{3}k \end{cases}$$

$$4k^2 - \left(\frac{16}{3}\right)^2 k^2 + 4 = 0$$

$$k^2 - \frac{16 \cdot 4}{3} k^2 + 4 = 0$$

$$3k^2 - 64k^2 + 3 = 0$$

$$61k^2 = 3 \quad k^2 = \frac{3}{61} \quad k = \pm \sqrt{\frac{3}{61}}$$

Но если мы найдем координаты при
этих значениях, то если это
найдем θ которое нам требуется. т.к.
в системе θ будет θ в угловых
единицах.)

$$\text{Вектор: } a = \pm \frac{1}{\sqrt{61}}, \pm \sqrt{\frac{3}{61}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

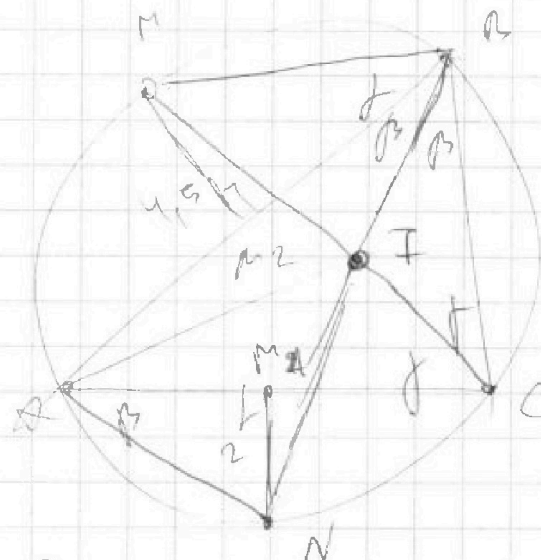
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



7.



$$1) \angle AIB = \angle C = 2\gamma$$

$$\angle B = 2\beta$$

2) Т.к. M и N -
середина отс.

гипот. $\Rightarrow CM \perp BN$ -
свойство.

$$3) BN \cap CM = I, AI \perp ?$$

4) $\angle AIB$ перпендикуляр CN на AC - M, и
CM на AB $\perp M_2$

5) M₁ и M₂ - средина AC и AB соответственно.

они середина гип.

$$6) \angle M_1B_1A = \angle M_1CA = \gamma, \text{ следовательно } \angle CAN = \gamma$$

$$7) \text{ в } \triangle AM_1M: \sin \beta = \frac{AM_1}{AM} = \frac{2MM_2}{AC}$$

$$\text{аналогично } \sin \gamma = \frac{2MM_1}{AB}$$

$$8) \text{ Но } \forall n \text{ формула } \frac{AC}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin \gamma}$$

$$= \frac{2MM_1}{\sin \beta \cdot \sin \gamma} = \frac{2MM_2}{\sin \gamma \cdot \sin \beta} = \frac{2MM_1}{2 \sin \gamma \sin \beta} = \frac{2MM_2}{2 \sin \gamma \sin \beta}$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{MM_1}{MM_2} = \frac{2}{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



① $a, b, c \in \mathbb{N} : ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$
 $bc : 2^{17} \cdot 7^{14}$
 $ac : 2^{20} \cdot 7^7$ $\min abc = ?$

$ab = (14, 40)$ $abc = (20, 37)$
 $bc = (17, 14)$
 $ac = (20, 27)$

$\varphi_2(a) = x_1$
 $\varphi_2(b) = x_2$
 $\varphi_3(c) = x_3$

$x_1 + x_2 \geq 14$
 $x_2 + x_3 \geq 17$
 $x_3 + x_1 \geq 20$
 $2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 51$
 $x_1 + x_2 + x_3 \geq 26$

$a = (x_1, x_2)$
 $b = (x_3, x_4)$
 $c = (x_5, x_6)$
 $x_1 + x_3 + x_5 =$

$x_1 + x_3 = 14 \Rightarrow x_5 = 6$
 $x_2 + x_4 = 17 \Rightarrow x_6 = 11$
 $x_1 + x_5 = 20 \Rightarrow x_2 = 14$

$\varphi_2(a) = y_1$
 $\varphi_2(b) = y_2$
 $\varphi_3(c) = y_3$

$y_1 + y_2 \geq 10$
 $y_2 + y_3 \geq 17$
 $y_3 + y_1 \geq 27$

$x_1 + x_2 + x_3 = 26$

$y_1 + y_2 + y_3 \geq 32$

$x_1 + x_2 \geq 14$

$x_1 + x_2 + x_3 = 32$

$x_3 \leq 12$

$x_3 = 12$

$x_1 + x_2 = 14$

$x_1 = 8$

$x_2 = 6$

$x_3 = 12$

$y_1 = 8$
 $y_2 = 6$
 $y_3 = 12$

$y_1 \geq$

$y_1 = 18$
 $x_1 = 2$
 $y_2 = 15$

$y_1 \geq 0$

$y_1 = 15$

$y_2 = 0$

$y_3 = 22$

$y_1 + y_2 + y_3 \geq 32$

$y_1 + y_2 = 10$

$y_2 + y_3 = 17$

$y_3 + y_1 = 27$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(a, b) = 1, \forall a, b \in \mathbb{N}$$

$$(*) \quad (a+b, a^2 - bab + b^2)$$

$$\begin{aligned} (a+b, (a+b)^2 - 3ab) &= \\ &= (a+b, -3ab) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 1 \overline{) 1-4b+4b^2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 1-4b+4b^2 \end{array} = \frac{8}{8} = 1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4

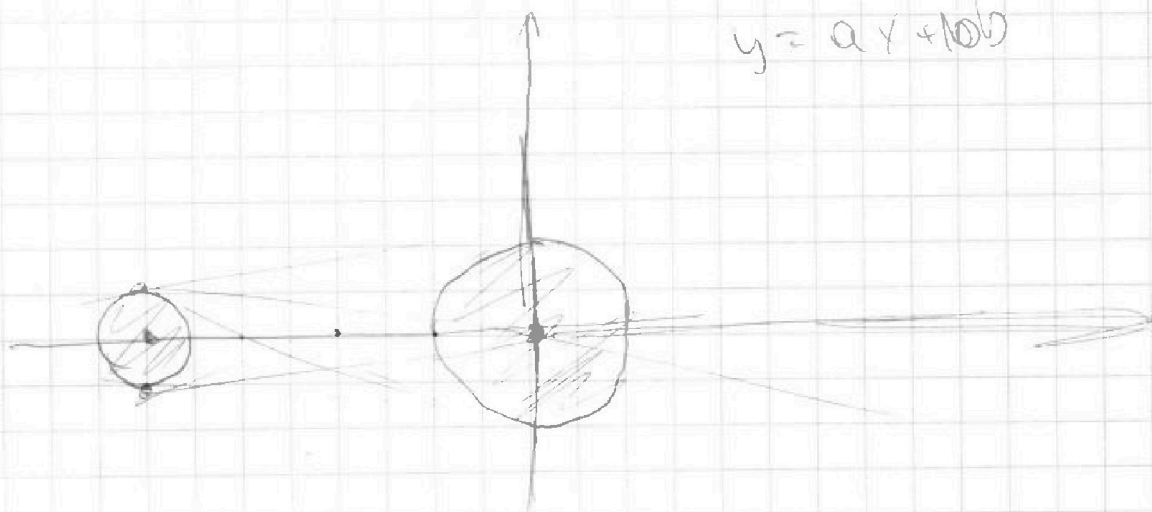
$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - \sqrt{x}$$

$$\text{GA3: } 2\sqrt{x}$$

$$2x^2 - 5x + 3 - 2(1 - 1)(x - \frac{3}{2})$$

$$2x^2 + 2x + 1 = \sqrt{x}$$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{x}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{b}{\sin 2\beta} = 2R$$

$$\text{tg } \beta = \frac{4}{5}$$

$$\frac{c}{\sin 2\alpha} = 2R$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{4}{\sin 2\alpha + \text{tg } \beta} = 2R = \frac{9}{\sin 2\beta + \text{tg } \alpha}$$

$$\frac{4}{2\sin^2 \alpha} = \frac{9}{2\sin^2 \beta}$$

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{2}{3}$$

$$3\sin x = 2\sin y$$

$$\sin^2 x + \cos^2 y = 1$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \sin^2 x + \cos^2 y = 1$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 (1 - \cos^2 x) + \cos^2 y = 1$$

$$\frac{9}{4} - \frac{9}{4} \cos^2 x + \cos^2 y = 1$$

$$2\cos^2 y - \frac{9}{4} \cos^2 x = \frac{5}{4}$$

$$4\cos^2 x = 4\cos^2 y - 5$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{4}{9}} \quad \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{4}{9}} \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\sin \beta = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\alpha = 15^\circ$$

$$\sin \alpha = \sin y$$

$$y = 15^\circ$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 3x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$4x^2 - 3x + 4 + 2\sqrt{(4x^2 - 3x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 1$$

$$4x^2 - 3x + 4 = 4\left(x^2 - \frac{3}{4}x + 1\right) =$$

$$= 4\left(\left(x^2 - \frac{3}{8}\right)^2 + 1 - \left(\frac{3}{8}\right)^2\right)$$

$$\frac{9}{64}$$

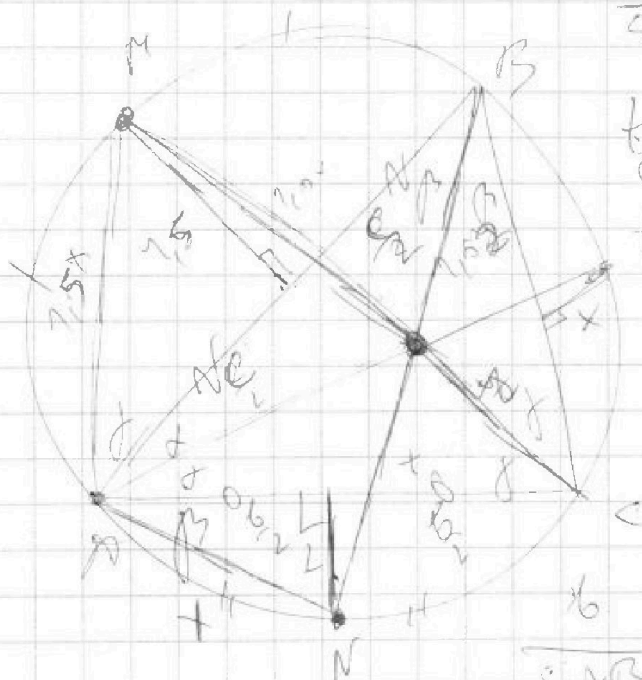
$$\cos \alpha \cos \beta = 9$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \sqrt{\frac{2}{4.5}}$$

$$\tan \alpha = \frac{4.5}{9}$$

$$\tan \beta = \frac{4}{6}$$

$$\frac{9}{\cos \beta} - 9 \cos \beta = \frac{4 \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta}$$



$$9 \sin^2 \alpha \cos \beta$$

$$9 \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta} = 4 \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

$$9 \sin^2 \beta \cos \alpha = 4 \sin^2 \alpha \cos \beta$$

$$\frac{9 \cos^2 \beta}{\cos \alpha} = \frac{4 \cos^2 \alpha}{\cos \beta}$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\tan \beta = \frac{4}{6}$$

$$\frac{\sin \alpha \cos \beta}{9} = 2R$$

$$\frac{\sin \alpha \cos \beta}{9} = 2R$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

