



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1
Т.к. нам надо найти наименьшее abc , то скажем, что
числа a, b и c ~~образуют~~ имеют вид $2^x \cdot 7^y$ без дробн.
множителей. a_2, b_2, c_2 — степени 2 при a, b и c соотв.
 a_7, b_7, c_7 — аналогично степени при 7 .

$$\begin{aligned}a_2 + b_2 &\geq 14 \\ b_2 + c_2 &\geq 17 \\ a_2 + c_2 &\geq 20\end{aligned}$$

$$2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 51$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 26$$

$$\Rightarrow a \cdot b \cdot c (\min) = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

$$\text{Ответ: } 2^{26} \cdot 7^{37}$$

$$\begin{aligned}a_7 + b_7 &\geq 10 \\ b_7 + c_7 &\geq 17\end{aligned} \Rightarrow a_7 + b_7 + c_7 \geq 27$$
$$\text{но } a_7 + c_7 \geq 37$$
$$\Rightarrow a_7 + b_7 + c_7 \geq 37$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

если бы ab делилось на $(a+b)$, то всю дробь можно было бы сократить на $a+b$, но $\rightarrow$

$\Rightarrow \frac{ab}{a+b}$ — несократима дробь, т.к. a и b не имеют общих делителей $\Rightarrow a+b$ не имеет делителей ни a , ни b

но член $8ab$ можно сократить еще и на b

то есть если $a+b$ будет делиться на 8 , то и всю дробь можно будет разделить на 8 .

если мы берем $a=3$ и $b=5$, то это работает ($\frac{a}{b}$ — несокр., $a+b$ кратно 8 .)

$\Rightarrow m=8$

Ответ: $m=8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

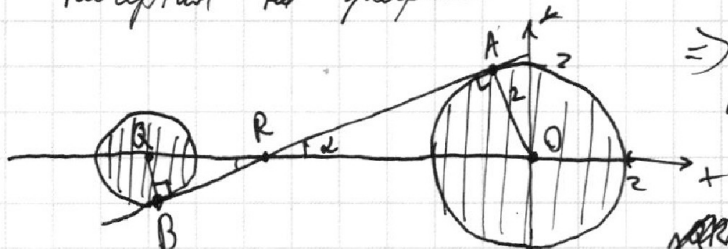
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



окружн. $((x+8)^2 + y^2 - 1)$ $\sqrt{6}$ $(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$

Начертим на графике



$y = 10b + ax$ - прямая
 $\Rightarrow$ 2 решения только когда
прямая касается 2х окружностей

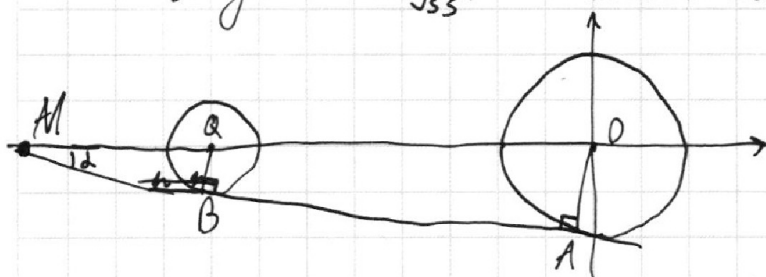
$\triangle QRB \sim \triangle ORA$ по 2м углам

$$\Rightarrow \frac{QR}{RO} = \frac{QB}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow QR = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{8} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{64}} = \frac{\sqrt{55}}{8}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = a = \frac{3}{\sqrt{55}}$$

аналогично получим $a = -\frac{3}{\sqrt{55}}$



$\triangle MQB \sim \triangle MOA$ по 2м углам

$$\Rightarrow \frac{MQ}{MO} = \frac{QB}{OA} \Rightarrow MQ = QO = 8$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{8} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{63}}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = -a = \frac{1}{3\sqrt{7}}$$

аналогично $a = -\frac{1}{3\sqrt{7}}$

$$\Rightarrow a = \left\{ -\frac{3}{\sqrt{55}}; -\frac{1}{3\sqrt{7}}; \frac{1}{3\sqrt{7}}; \frac{3}{\sqrt{55}} \right\}$$

$$\text{Ответ: } a = \left\{ -\frac{3}{\sqrt{55}}; -\frac{1}{3\sqrt{7}}; \frac{1}{3\sqrt{7}}; \frac{3}{\sqrt{55}} \right\}$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

Задача 2:

$$a_2 + b_2 = 14$$

$$b_2 + c_2 = 17$$

$$a_2 + c_2 = 20$$

$$2(a+b+c) = 51$$

$$\Rightarrow \min(a+b+c) = 26$$

$$(x \in (1; 1.5))$$

$$\sqrt{(x-1)(2x-3)} - \sqrt{2x^2+2x+1} = (2-7x)$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4 \cdot 2}}{4}$$

$$(x-1)(2x-3) + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2x^2+2x+1)} = 4 + 49x^2 - 28x$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 = 4x^2 - 3x + 4$$

$$\Rightarrow -45x^2 + 25x = 2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2x^2+2x+1)}$$

$$5x(5-9x) = 2\sqrt{(x-1)(2x-3) \dots}$$

$$25x^2(25+81x^2-90x) = 4\sqrt{(x-1)(2x-3)(2x^2+2x+1)}$$

$$625x^2 + 2025x^4 - 2250x^3 = (16x^4 - 24x^3 - 8x^2 + 4x + 12) = 0$$

$$2009x^4 - 2226x^3 + 633x^2 - 4x - 12 = 0$$

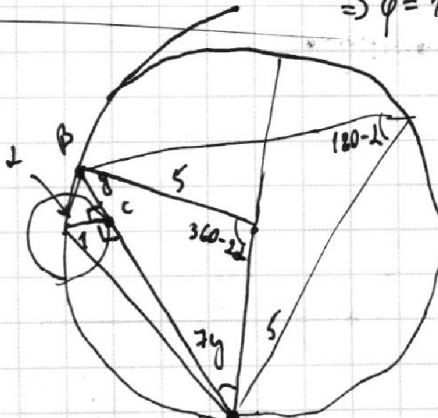
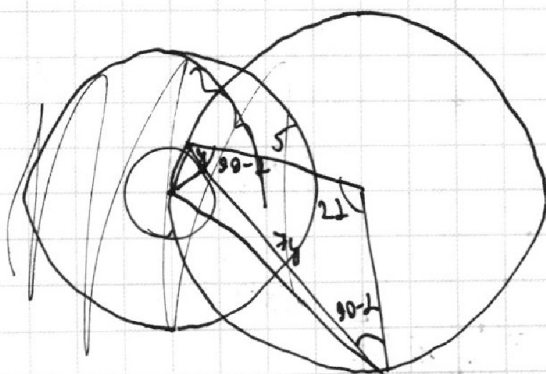
$$\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2-6ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

8y

$$180 - (360 - 2\alpha) =$$

$$= 2\alpha - 180$$

$$\Rightarrow \varphi = 180 - \alpha$$



$$\frac{5}{\cos \alpha} = \frac{8}{\sin 2\alpha} \Rightarrow$$

$$8y = 5 \cdot 2 \cdot \sin \alpha$$

$$= 10 \cdot \sin \alpha$$

$$\Rightarrow y = 1.25 \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{y}{x+y} = \dots$$

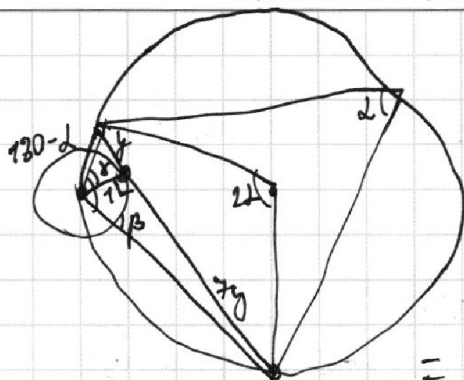
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☒	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = \frac{5}{4} \cdot \sin L$$

$$\sin(180-L) = \sin L =$$

$$= \sin(\gamma + \beta) = \frac{4}{\sqrt{1+y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+7^2y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \cdot \frac{7}{\sqrt{1+7^2y^2}} =$$

$$= \frac{84}{\sqrt{1+y^2} \cdot \sqrt{1+7^2y^2}} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{84}{4}\right)^2 = (1+y^2) \cdot (1+49y^2)$$

$$100 = 1 + 50y^2 + 49y^4$$

$$0 = -99 + 50t + 49t^2$$

$$t = \frac{-50 \pm \sqrt{50^2 + 4 \cdot 49 \cdot 99}}{2 \cdot 49}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-50 + \sqrt{2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99}}{2 \cdot 49} =$$

$$= \frac{-50 + 148}{2 \cdot 49} = \frac{98}{98} = 1$$

$$\begin{array}{r} \times 49 \\ 49 \\ + 196 \\ \hline 2451 \\ \times 196 \\ 4900 \\ + 1960 \\ \hline 4840 \\ \times 99 \\ 881 \\ + 440 \\ \hline 1321 \\ \times 196 \\ 2640 \\ + 1321 \\ \hline 4001 \\ \times 99 \\ 3960 \\ + 4001 \\ \hline 7961 \\ \times 196 \\ 15822 \\ + 7961 \\ \hline 23783 \\ \times 120 \\ 28536 \\ + 23783 \\ \hline 52319 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 142 \\ 142 \\ + 142 \\ \hline 284 \\ \times 142 \\ 4396 \\ + 284 \\ \hline 4680 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 142 \\ 142 \\ + 142 \\ \hline 284 \\ \times 142 \\ 4396 \\ + 284 \\ \hline 4680 \end{array}$$

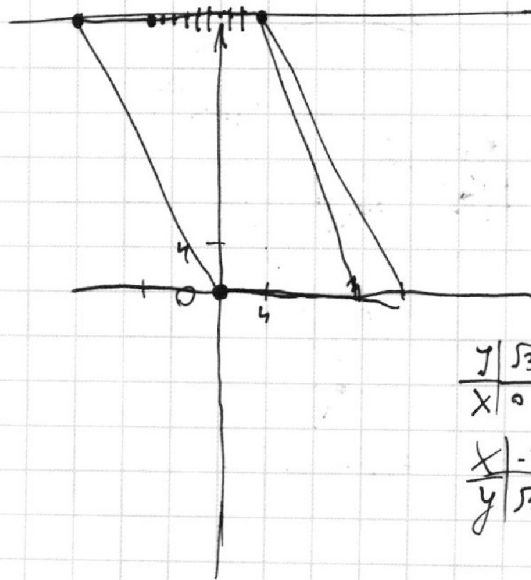
$$\begin{array}{r} \times 144 \\ 144 \\ + 168 \\ \hline 312 \end{array}$$

10. ans

$$12 \cdot 12 \cdot 10$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} =$$

y	√3	0	1	√6	√5	√10	√21
x	0	1	2	3	4	-1	-2
x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	√13	√5	1	√5	√13		



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☐	☒	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = ax + 10b$$

$$\Rightarrow ((x+8)^2 + (ax+10b)^2 - 1)(x^2 + (ax+10b)^2 - 4) \leq 0$$

Упрощения $\Rightarrow$ нули правой и левой части равен.

$$(x+8)^2 + a^2x^2 + 100b^2 + 20abx = 1$$

$$x^2 + 16x + 64 + a^2x^2 + 100b^2 + 20x \cdot (ab) = 1 = 0$$

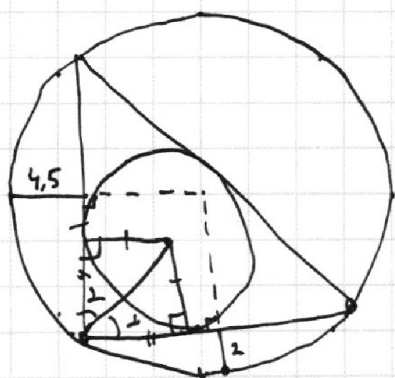
$$x^2 \cdot (1+a^2) + x(16+20ab) + (100b^2+63) = 0$$

$$x^2(1+a^2) + x(20ab) + (100b^2-4) = 0$$

$$x = \frac{-(16+20ab) \pm \sqrt{(16+20ab)^2 - 4(1+a^2)(100b^2+63)}}{2(1+a^2)}$$

$$x_1 = \frac{-20ab \pm \sqrt{400a^2b^2 - 4(1+a^2)(100b^2-4)}}{2(1+a^2)}$$

$$x_+ = x_{1+} \Rightarrow \frac{-(16+20ab) + \sqrt{\dots}}{-16 + \sqrt{(16+20ab)^2 - \dots}} = \frac{-20ab + \sqrt{\dots}}{-16 + \sqrt{(16+20ab)^2 - \dots}}$$

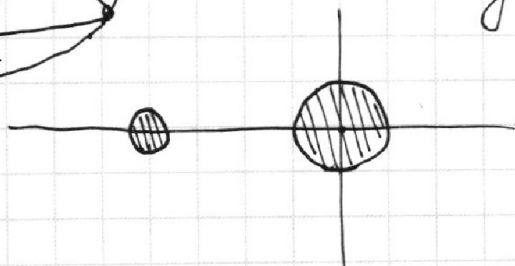


$$\frac{a}{b}$$

$$\frac{ab}{a+b}$$

$$\frac{5 \cdot 8}{5+8}$$

$$y = 10b + ax$$





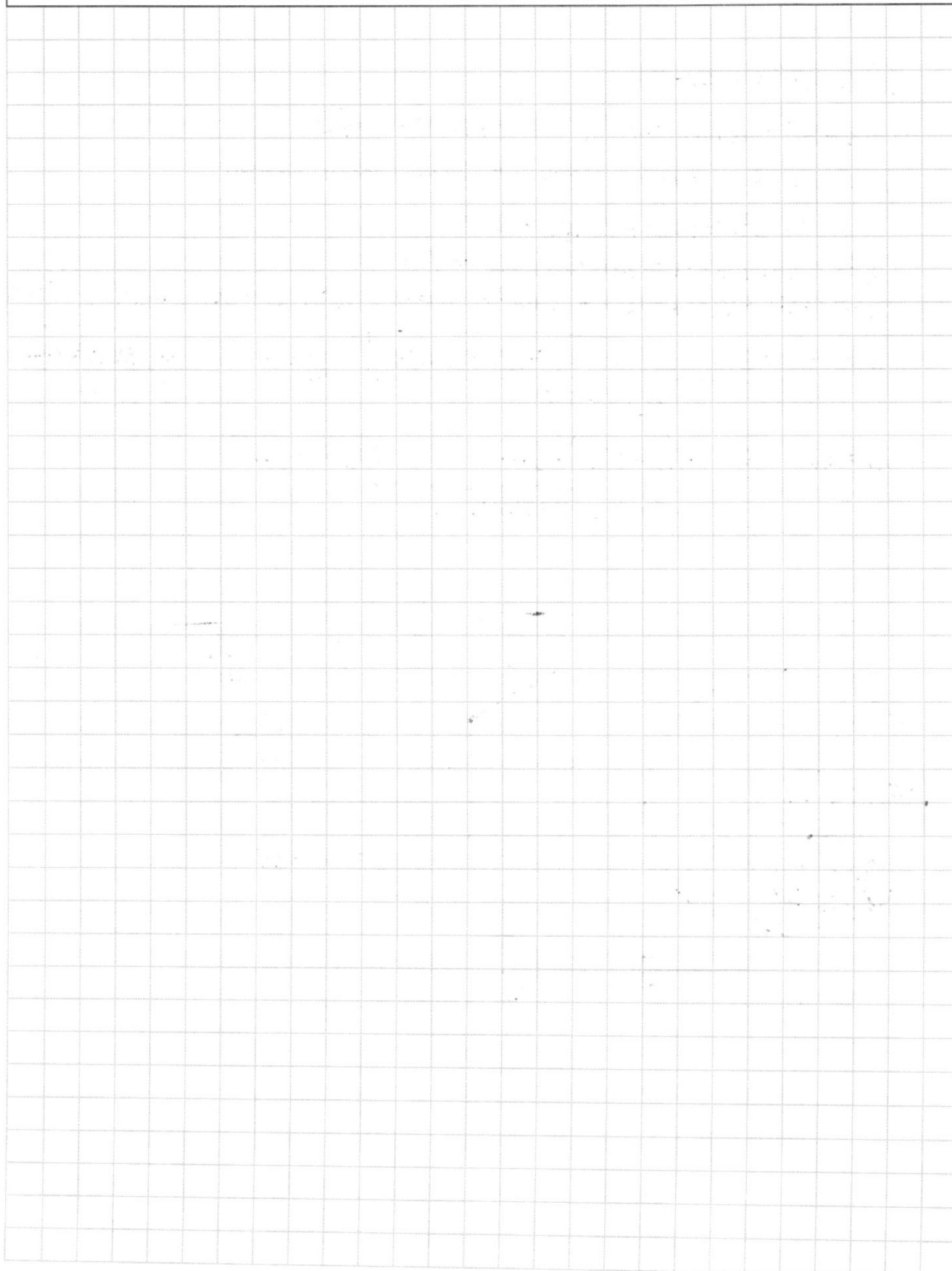
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓