



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



✎ [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

✎ [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

✎ [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

✎ [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$n_1 \quad a, b, c \in \mathbb{N} \quad ab: 2^{15} 7^{11} \quad bc: 2^{17} 7^{18} \quad ac: 2^{23} 7^{39}$$

$$a = 2^{k_1} \cdot 7^{m_1} \cdot x_1 \quad b = 2^{k_2} \cdot 7^{m_2} \cdot x_2 \quad c = 2^{k_3} \cdot 7^{m_3} \cdot x_3 \quad (k_1, m_1, k_2, m_2, k_3, m_3, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N})$$

$$ab: 2^{15} \Rightarrow 2^{k_1} \cdot 2^{k_2} \geq 2^{15} \Rightarrow k_1 + k_2 \geq 15$$

$$ac: 2^{23} \Rightarrow 2^{k_1} \cdot 2^{k_3} \geq 2^{23} \Rightarrow k_1 + k_3 \geq 23$$

$$bc: 2^{17} \Rightarrow 2^{k_2} \cdot 2^{k_3} \geq 2^{17} \Rightarrow k_2 + k_3 \geq 17$$

имеем:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 \geq 15 \\ k_1 + k_3 \geq 23 \\ k_2 + k_3 \geq 17 \end{cases} \Rightarrow 2(k_1 + k_2 + k_3) \geq 15 + 23 + 17 \Rightarrow k_1 + k_2 + k_3 \geq \frac{55}{2} = 27,5$$

$$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N} \Rightarrow k_1 + k_2 + k_3 \in \mathbb{N} \Rightarrow k_1 + k_2 + k_3 \geq 28$$

$$ac: 7^{39} \Rightarrow abc: 7^{39}$$

$$k_1 + k_2 + k_3 \geq 28 \Rightarrow abc: 2^{28} \quad \Rightarrow abc: 2^{28} \cdot 7^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Пример на $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$

$$a = 2^{10} \cdot 7^{21} \quad b = 2^5 \quad c = 2^{13} \cdot 7^{18}$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{21} : 2^{15} \cdot 7^{11} \quad bc = 2^{18} \cdot 7^{18} : 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39} : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$abc = 2^{10+5+13} \cdot 7^{21+18} = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Число $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$ и есть пример на

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{39} \Rightarrow \min(abc) = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

нз

$$\gcd(a, b) = 1 \quad a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$$

Если $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ (т.к. $\frac{9}{8}$ несократ.)

можно сократить на m , то

$$\begin{aligned} a+b &\equiv 0 \pmod{m} & a^2-7ab+b^2 &\equiv 0 \pmod{m} \\ a &\equiv -b \pmod{m} & (-b)^2-7(-b) \cdot b+b^2 &\equiv 0 \pmod{m} \\ & & b^2+7b^2+b^2 &\equiv 0 \pmod{m} \\ 9b^2 &\equiv 0 \pmod{m} & \Rightarrow 9b^2 &\vdots m \end{aligned}$$

Допустим, что $\gcd(b^2, m) \neq 1$. Тогда $b^2 \vdots k$ и $m \vdots k$, $k \in \mathbb{N}$,
 $\Rightarrow b \vdots k$

но $\gcd(a, b) = 1$ ~~тогда~~ $\Rightarrow a \not\vdots k \Rightarrow a+b \not\vdots k \Rightarrow$ мы не сможем

сократить на $m \Rightarrow (b^2, m) = 1 \Rightarrow (b, m) = 1 \Rightarrow 9 \equiv 0 \pmod{m}$

$$9 \vdots m \Rightarrow m \leq 9$$

Пример при $m=9$

$$a=4 \quad b=5 \quad : \quad \frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{4+5}{4^2-7 \cdot 4 \cdot 5+5^2} = \frac{9}{16+25-140} = \frac{9}{-99} = -\frac{1}{11}$$

Ответ: $m=9$

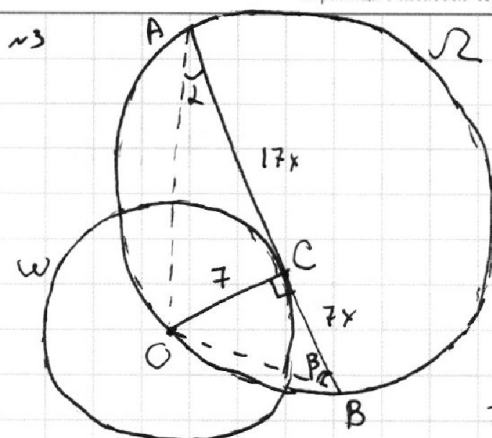
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $AC:CB = 17:7$, $r_1 = 7$, $r_2 = 17$

И-ти: $AB = ?$

Решение:

C - точка касания, OC - радиус $\Rightarrow$
 $\Rightarrow OC \perp AB$ $OC = r_1 = 7$

$\angle DAC = \alpha$, $\angle OBC = \beta$

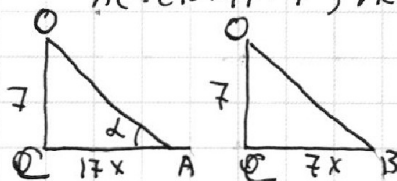
$AC:CB = 17:7$, $AC = 17x$, $CB = 7x$, $AB = 24x$

По Т. Пифагора $\triangle OAC$

$$OA = \sqrt{289x^2 + 49}$$

По Т. Пифагора $\triangle OBC$

$$OB = \sqrt{49x^2 + 49}$$



$$\sin \alpha = \frac{7}{\sqrt{289x^2 + 49}}$$

$$\sin \beta = \frac{7}{7\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

По Т. синусов в $\triangle AOB$

из $\triangle OBC$ $BO = \frac{7}{\sin \beta}$

$$\frac{BO}{\sin \alpha} = \frac{7}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = 26$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{7}{26} = \frac{7}{\sqrt{289x^2 + 49}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$289x^2 + 49 > 0 \quad x^2 + 1 > 0$$

$$26 = \sqrt{(289x^2 + 49)(x^2 + 1)} \quad \uparrow^2$$

$$676 = 289x^4 + 338x^2 + 49$$

$$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0$$

Решим относительно x^2

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = -\frac{627}{289} \end{cases}, \text{ но } x^2 > 0 \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \quad (\text{т.к. } x > 0, \text{ т.к. это длина})$$

$$x = 1 \Rightarrow 24x = 24$$

Ответ: 24

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~ 4

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x^4$$

Ограничения:

$$3x^2-6x+2 \geq 0$$

$$3x^2+3x+1 \geq 0$$

$$\cdot (3x^2+3x+1) = 81x^2 - 18x + 1$$

$$3x^2+3x+1 \geq 0$$

$$-2\sqrt{9x^4+9x^3+9x^2-18x^3-18x-6x+6x^2+6x+2} = 75x^2-15x-2$$

$$4(9x^4-9x^3+9x^2-18x+2) = 5625x^4 + 225x^2 + 4 - 2250x^3 -$$

$$-300x^2 + 60x$$

$$5589x^4 - 2214x^3 - 111x^2 + 132x - 4 = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

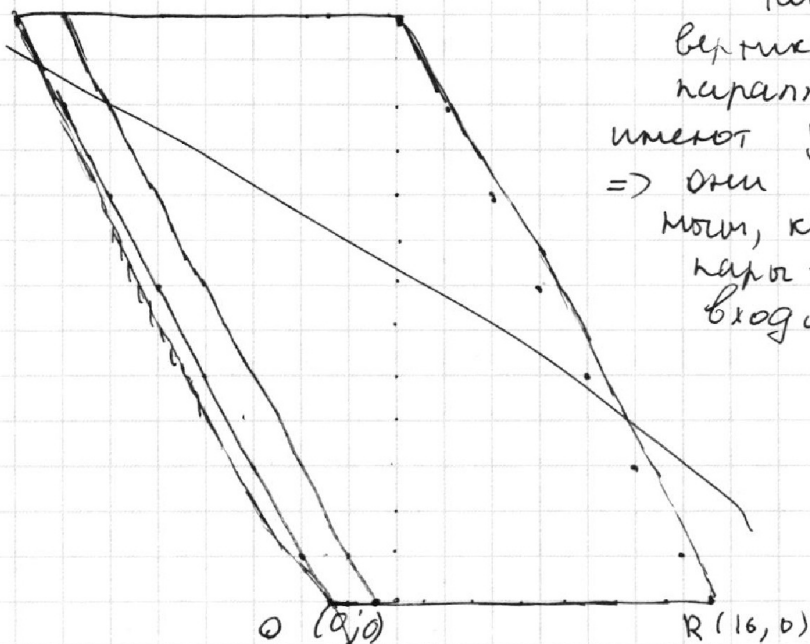
1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

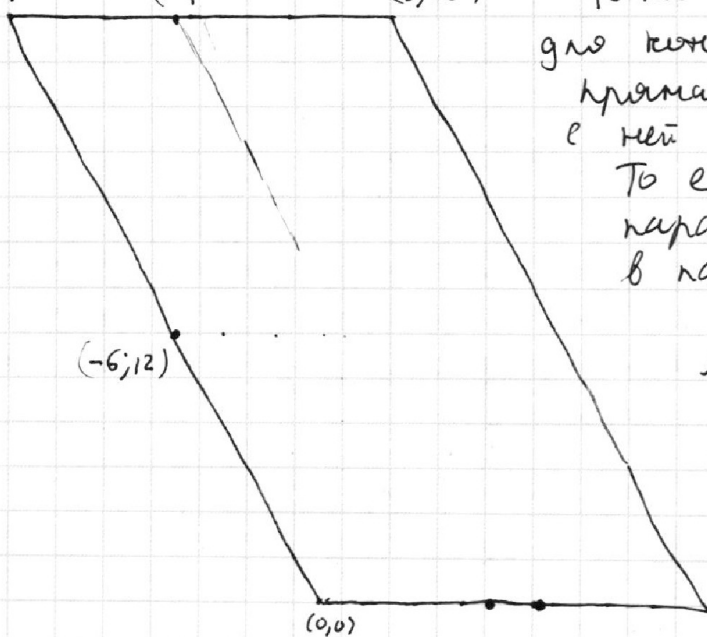


$P(-13, 26)$ $N5(26, 2)$ $(3, 26)$



Также заметим, что
вертикальные стороны
параллелограмма также
имеют угловой коэффициент $\cdot 2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ они параллельны про-
мы, которые составляют
пару $\Rightarrow$ они тоже пара
близки

$(-13, 26)$ $(-6, 26)$ $(3, 26)$



самая правая
Точка $(-6, 12)$ - первая точка,
где которой существует
прямая на g и, стоящая
с ней в паре.
То есть левая сторона
параллелограмма тоже
в паре с $(-6, 26)$, паре
имеющей через
ее

всего 27 точек
коорд. по y

27.27 пар
где каждая
пара прямых

Всего таких пар прямых будет 10 (от 0 до 9
по x , если смотреть нижней стороны $h/2$
т.к. по x прямые находятся на расстоянии 7

Ответ: $27 \cdot 27 \cdot 10 = 7290$ пар

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 5 (задача 1)

$P(-13; 20)$

$Q(3; 26)$

$A(x_1, y_1)$

$B(x_2, y_2)$

с целыми координатами

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$-13 \leq x_1, x_2 \leq 16$$

$$0 \leq y_1, y_2 \leq 26$$

Если у нас есть какая-то точка (x_1, y_1) , то

тогда $-2x_1 - y_1 = 14 - y_2 - 2x_2$, где $-2x_1 - y_1$ — фикс.

$$\Rightarrow y_2 + 2x_2 = 14 + 2x_1 + y_1, \text{ это график прямой} \Rightarrow$$

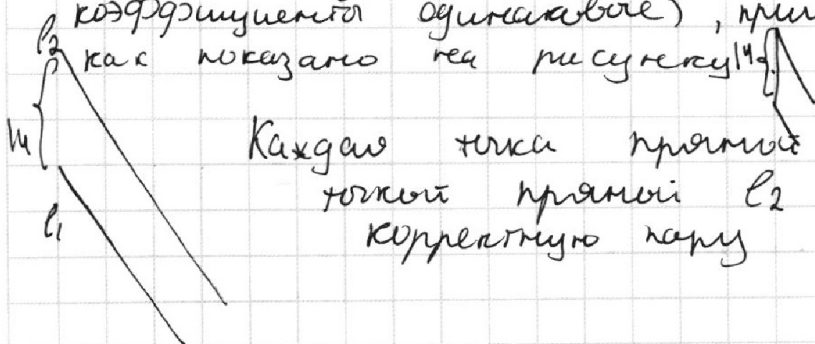
$\Rightarrow$ для точки, точки, которые могут быть (или
внутри лежат на одной прямой

Примем коэф. угла наклона прямой равен
 $k = -2$ $y_2 = -2 \cdot x_2 + 14 + 2x_1 + y_1$

Но точки с фикс. $-2x_1 - y_1$ тоже аналогично
находятся на одной прямой

То есть: $y_2 + 2x_2 = 14 + 2x_1 + y_1$

$\Rightarrow$ корректной парой будут являться точки точки
лежащие на двух параллельных прямых (т.е. угловые
координаты одинаковые), причем одна на 14 выше
как показано на рисунке



Каждая точка прямой l_1 с каждой
точкой прямой l_2 составляет
корректную пару

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~6 (часть 1)

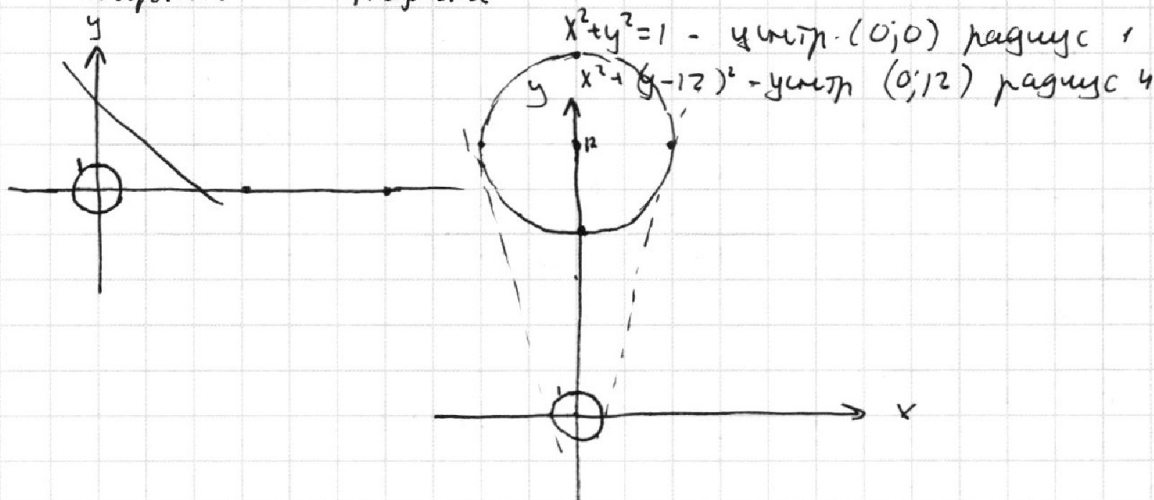
$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

(1) Рассмотрим сначала пер-во (2)

$$(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \quad (2) \quad x^2+y^2=1 \quad x^2+(y-12)^2=16 \quad \text{— нулевые точки}$$

— графики — окр. с рад 1 и 4

Нанерим эти графики



В точках на окружности (2) замечается, внутри окружности — отрицательного (т.к. графики не пересекаются, а внутри окр. отриц., вне — полож.) $\Rightarrow$ неравенство имеет бесконечно много решений, и это точки на окружностях и внутри них.

(1) Это график — прямая

Если прямая пересечет хотя бы одну из окружностей, то будет бесконечно много решений у системы, т.к. ~~по~~ подойдут все точки прямой внутри окружности, а по условию нужно ровно 2 решения $\Rightarrow$ прямая не пересекает окружности, если прямая не касается окружности, то тогда с той окружностью нет ни одного решения. Прямая может касаться окружн. ровно в одной точке. Нам нужно 2 решения $\Rightarrow \Rightarrow$ 2 точки касания $\Rightarrow ax+y-8b$ — прямая, которая является касательной к обеим окружностям.

У двух непересекающихся окружностей ровно 2 общие касательные.

Тогда у уравнений ниже должно быть по одному решению

$$ax+by \quad ax+y-8b = x^2+y^2-1$$

$$ax+y-8b = x^2+(y-12)^2-16$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 (часть 2)

$$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} + 8b - 1 - \frac{a^2}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 8b - \frac{a^2}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

должно быть равно нулю решение, а это график окр.: $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ такое может быть только при радиусе 0

$$\Rightarrow 8b - \frac{a^2}{4} - \frac{1}{4} = 0 \quad b = \left(\frac{a^2}{4} + \frac{1}{4}\right) : 8$$

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{a}{2} \quad y = \frac{1}{2}$$

$$ax + y - 8b = x^2 + (y - 12)^2 - 16. \text{ Подставим } x \text{ и } y$$

$$a \cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{2} - 8b = \frac{a^2}{4} + \frac{23^2}{4} - 16$$

$$\frac{a^2}{4} - \frac{527}{4} + 16 = 8b \quad \frac{a^2}{4} - \frac{483}{4} = 8b$$

$$b = \left(\frac{a^2}{4} + \frac{5}{4}\right) : 8 = \left(\frac{a^2}{4} - \frac{483}{4}\right) : 8$$

$$\frac{a^2}{4}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{OB}{\sin \alpha} = 2.13 \quad \frac{OA}{\sin \beta} = 2.13 \quad \frac{AB}{\sin (180 - \alpha - \beta)} = 2.13 \quad \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta)$$

$$\sin \alpha = \frac{7}{26} \quad \sin \beta \cdot \sin \alpha = 26 \quad AB = 26 \cdot \sin (180 - \alpha - \beta) =$$

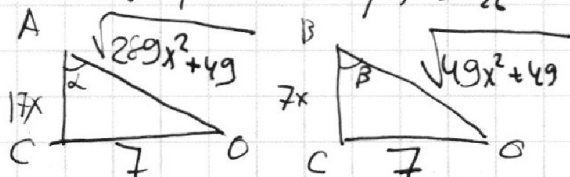
$$2 \sin \beta \cdot \sin \alpha = \cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta) = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)}{2} = \frac{8.7}{26}$$

$$\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta) = \frac{14}{26}$$



$$\sin \beta = \frac{7}{49 \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\sin \alpha = \frac{7}{\sqrt{289x^2 + 49}}$$

$$\sin \beta \cdot \sin \alpha = \frac{26}{26} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{7}{\sqrt{289x^2 + 49}}$$

$$26 = \sqrt{(x^2 + 1)(289x^2 + 49)}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x^2$$

$$3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)} = 81x^2 - 18x + 1$$

$$-2\sqrt{9x^4 + 9x^3 + 3x^2 - 18x^3 - 18x - 6x + 6x^2 + 6x + 2} = 75x^2 - 15x - 2$$

$$4(9x^4 - 9x^3 + 9x^2 - 18x + 2) = 5625x^4 - 225x^2 + 4 - 2250x^3 - 300x^2 + 60x$$

$$5589x^4 - 2214x^3 + 2169x^2 - 111x^2 + 132x - 4 = 0$$

$$3^5 \cdot 23 \quad 3^3 \cdot 2 \cdot 11 \quad 37 \cdot 3 \quad 3^5 \cdot 2 \cdot 11$$

$$x^2 + 1 \geq 0$$

$$289$$

$$-5589 \overline{) 54} \quad 621 \overline{) 9} \quad 9 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 23$$

$$3^5 \cdot 23$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

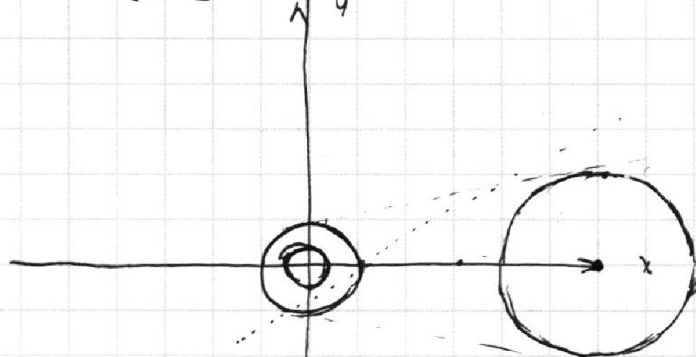
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sim 6 \quad \begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

$$x^2+y^2-1 \leq 0 \vee x^2+y^2-16 \geq 0$$



Подходят пары (x,y) , которые лежат внутри окружностей и на их контурах

Решениями второго неравенства являются

$ax+y-8b=0$ — прямая $\Rightarrow$ все точки ее пересечения и внутри окружностей

решениями $\Rightarrow$ если прямая пересекает, то решений бесконечно много $\Rightarrow$ прямая не должна пересекать $\Rightarrow$ она может либо касаться, либо не пересекать, но не

$\Rightarrow$ прямая касается обеих окружностей

$$\begin{aligned} ax+y-8b &= x^2+y^2-1 & ax+y-8b &= x^2+(y-12)^2-16 \\ x^2-ax+y^2-y+8b-1 &= 0 & x^2-ax+(y-12)^2-y+8b-16 &= 0 \\ x^2-ax+\left(\frac{a}{2}\right)^2 & & \left(x-\frac{a}{2}\right)^2 &= \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2-ax+\frac{a^2}{4}+y^2-y+\frac{1}{4}+8b-1 &= 0 \\ \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}-\frac{1}{4}+8b-1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax+y-8b &= x^2+y^2-1 & ax+y-8b &= x^2+(y-12)^2-16 \\ \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}-\frac{1}{4}+8b-1 &= 0 \end{aligned}$$

Другие решения

это возможно только когда

$$-\frac{a^2}{4}-\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a}{2}-12\right)^2 \\ & \frac{16}{4} - \frac{23}{2} \\ & \frac{16}{4} - \frac{527}{64} = \frac{483}{64} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{23}{23} \\ & \frac{45}{52} \\ & \frac{52}{4} + \frac{2}{4} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\text{НОД}(a, b) = 1 \quad a \in \mathbb{N} \quad b \in \mathbb{N} \quad \frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ Ответить верно

$\text{НОД}(a+b; a^2-7ab+b^2) = \text{НОД}(a^2-7ab+b^2; a+b) \cdot x$
 $= \text{НОД}(a^2-7ab+b^2; a^2-7ab+b^2 - a - b) = \text{НОД}(a^2-7ab+b^2; a-b)$

$\text{НОД}(147, 35) = (112, 35) = (77, 35) = (7, 35) = (7, 7) = 7$

$\text{НОД}(a^2-7ab+b^2; a+b) = \text{НОД}(a^2-7ab+b^2 - a - b, a+b)$

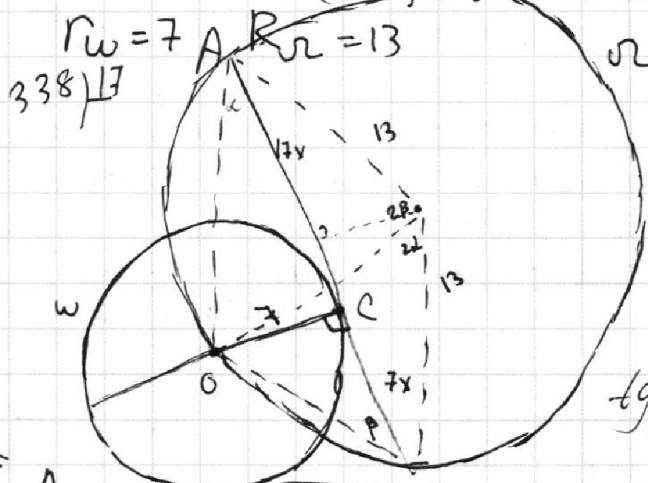
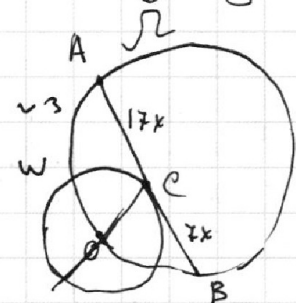
$a^2-7ab+b^2 - k(a+b) = a+b$

$a^2-7ab+b^2 - (k+1)(a+b) = 0$

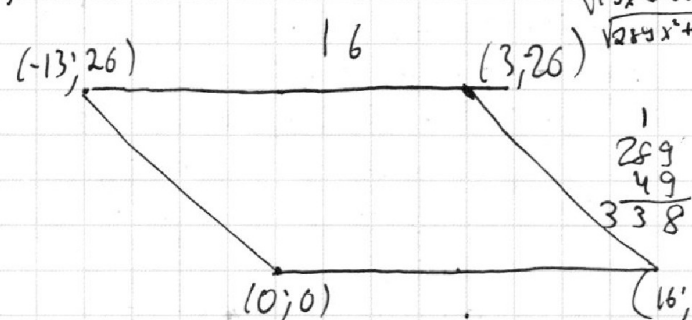
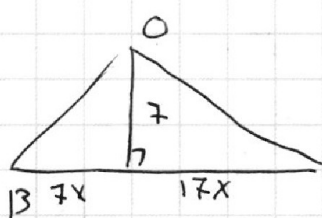
$a+b = x \quad ab = y$

$x^2 - 2y - 7y - (k+1) \cdot x = 0$

$a+b: m$
 $a^2-7ab+b^2: m$
 $(a^2-7ab+b^2) - 5ab + a+b = 676$
 $(a-b)^2 - 5ab + a+b$



$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$
 $OB = \frac{7 \cdot \sin \alpha}{\sin \beta}$
 $OA = \frac{7}{\sin \alpha}$
 $\tan \beta = \frac{1}{x} \quad \tan \alpha = \frac{7}{17x}$



$A(x_1, y_1)$
 $B(x_2, y_2)$
 $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$
 $2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 14$
 $m = k \cdot x$

$a+b \equiv 0 \pmod{m}$
 $a \equiv -b \pmod{m}$
 $a^2-7ab+b^2 \equiv 0 \pmod{m}$
 $b^2-7 \cdot b(-b)+b^2 \equiv 0 \pmod{m}$
 $b^2+7b^2+b^2 \equiv 0 \pmod{m}$
 $9b^2 \equiv 0 \pmod{m}$
 $(b, m) = 1$
 $b: m, \text{ то } a \not\equiv m \Rightarrow$
 $\Rightarrow a+b \not\equiv m \Rightarrow$
 $\Rightarrow b \not\equiv m$

$m \leq 9$
 25
 5
 140
 25
 16
 41

$4+5$
 $4^2-7 \cdot 4 \cdot 5+5^2$
 $16-140+25$
 -99
 $y+2x$

$-13 \quad 26$
 $0 \quad 0$
 $0+26 \quad 0-26$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

11 $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$ab: 2^{15} \cdot 7^{11} \quad bc: 2^{17} \cdot 7^{18} \quad ac: 2^{23} \cdot 7^{39} \quad abc: 2^{23} \cdot 7^{39} \quad - \frac{55}{15} \cdot 27,5$$

$$a = 2^{k_1} \cdot 7^{m_1} \cdot x, \quad b = 2^{k_2} \cdot 7^{m_2} \cdot x_2, \quad c = 2^{k_3} \cdot 7^{m_3} \cdot x_3$$

$$ab = 2^{k_1+k_2} \cdot 7^{m_1+m_2} \quad bc = 2^{k_2+k_3} \cdot 7^{m_2+m_3} \quad ac = 2^{k_1+k_3} \cdot 7^{m_1+m_3}$$

$$k_1+k_2 \geq 15 \quad m_1+m_2 \geq 11 \quad k_2+k_3 \geq 17 \quad m_2+m_3 \geq 18 \quad k_1+k_3 \geq 23 \quad m_1+m_3 \geq 39$$

$$2(k_1+k_2+k_3) \geq 15+17+23 \quad k_1+k_2+k_3 \geq \frac{55}{2} = 27,5 \quad k_1+k_2+k_3 \geq 28$$

$$2(m_1+m_2+m_3) \geq 11+18+39 \quad m_1+m_2+m_3 \geq \frac{68}{2} = 34$$

$$a = 2^{15} \cdot 7^{11} \quad b = 2^{17} \cdot 7^{18} \quad c = 2^{23} \cdot 7^{39} \quad a = 2^{10} \cdot 7^{11} \quad b = 2^{13} \cdot 7^{18} \quad c = 2^5$$

$$k_1+k_2+k_3 - k_1 - k_3 = k_2 = 17 \quad a+b \geq 15 \quad b+c \geq 17 \quad a+c \geq 23 \quad a+b+c \geq 27,5 \geq 28$$

$$abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39} \quad a = 2^{10} \cdot 7^{11} \quad c = 2^{13} \cdot 7^{18} \quad b = 2^5$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{21} \cdot 2^5 = 2^{20} \cdot 7^{21} \quad bc = 2^{17} \cdot 7^{18} \quad ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \quad 214 = 9 - 6 = 3$$

14

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x \quad \uparrow^2 \quad \text{Ограничение: } 3x^2-6x+2 \geq 0 \quad 3x^2+3x+1 \geq 0$$

$$3x^2-6x+2 - 2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)} + 3x^2+3x+1 = 81x^2-18x+1$$

$$-2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)} = 75x^2-15x-2$$

$$4(9x^4+9x^3+3x^2-18x-8x+6x^2+6x+2) = 5625x^4$$

$$3x^2-6x+2 \geq 0 \quad 3x^2+3x+1 \geq 0 \quad 75x^2-15x-2 \leq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{3} \quad x_{1,2} = \frac{15 \pm 5\sqrt{3}}{150}$$

$$36x^4 - 36x^3 + 36x^2 - 72x + 8 = 5625x^4 - 75x^2 - 2250x^3 + 60x + 4$$

$$5589x^4 - 2214x^3 - 111x^2 + 132x + 4 = 0$$

$$D = 169^2 + 627 \cdot 289$$

$$x_1, 0 \quad x_2, 1 \quad x_3, 2 \quad x_4, 3$$

$$3, 2, 1$$

$$x_1, y_1 \quad -2x_1 - y_1 = 14 - 2x_2 - y_2$$

