



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.



1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. $ab: 2^{15} 7^{11}$
 $bc: 2^{17} 7^{18}$
 $ac: 2^{23} 7^{39}$

~~$abc \geq 2^{23} 7^{39}$, т.к. $ac \geq 2^{23} 7^{39}$~~

~~Чтобы abc было наименьшим, найдем пример~~

~~где $abc = 2^{23} 7^{39}$~~

~~Пусть $a = 2^{16} \cdot 7^{21}$, $b = 1$, $c =$~~

~~чтобы~~

~~Пусть $a = a_2 \cdot a_7$, $b = b_2 \cdot b_7$, $c = c_2 \cdot c_7$, где a_2 — множитель равен~~

Пусть $a = 2^{a_2} \cdot 7^{a_7}$, $b = 2^{b_2} \cdot 7^{b_7}$, $c = 2^{c_2} \cdot 7^{c_7}$

Тогда рассмотрим критические случаи:

$ab \geq 2^{15} 7^{11} \Rightarrow a_2 + b_2 \geq 15$

$a_7 + b_7 \geq 11$

$bc \geq 2^{17} 7^{18} \Rightarrow b_2 + c_2 \geq 17$

$b_7 + c_7 \geq 18$

$ac \geq 2^{23} 7^{39} \Rightarrow a_2 + c_2 \geq 23$

$a_7 + c_7 \geq 39$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 15 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_2 + c_2 \geq 17 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 + c_2 \geq 23 & (3) \end{cases}$$

$$(3) - (1) =$$

$$c_2 - b_2 \geq 8 \Rightarrow 2c_2 \geq 25 \Rightarrow c_2 \geq 12,5$$

Чтобы c было натуральным, c_2 должно быть натуральным.

$$\text{А } c_2 = 13 \Rightarrow b_2 \geq 54; a_2 \geq 10; a_2 + b_2 \geq 15$$

Значит в а в с будет $(a_2 + b_2 + c_2)$ рублей

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 13 + 15 \geq 28$$

$$\begin{cases} a_7 + b_7 \geq 11 & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_7 + c_7 \geq 18 & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_7 + c_7 \geq 39 & (6) \end{cases}$$

$$(6) - (4) =$$

$$c_7 - b_7 \geq 28 \Rightarrow 2c_7 \geq 46 \Rightarrow c_7 \geq 23$$

$$\text{А } a_7 \geq 16 \Rightarrow b_7 \geq 0$$

Значит в а в с будет $(a_7 + b_7 + c_7)$ рублей

$$a_7 + b_7 + c_7 \geq 23 + 16 = 39$$

Чтобы а в с было минимальным: $a_2 + b_2 + c_2 = 28$

$$a_7 + b_7 + c_7 = 39$$

$$a_7 + b_7 + c_7 = 2^{28} \cdot 7^{39} - \text{минимальное}$$

$$\text{Ответ: } a_7 + b_7 + c_7 = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2. $\frac{a}{b}$ - несократима.

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

Чтобы эта дробь сократилась, нужно, чтобы $(a+b):m$

Пусть $a \equiv_m r_a$; $b \equiv_m r_b$

То из:

$$r_a + r_b \equiv_m 0 \Rightarrow r_a \equiv_m -r_b \quad r_b \equiv_m -r_a$$

$$a^2 - 7ab + b^2 \equiv_m 0$$

$$r_a^2 - 7r_a r_b + r_b^2 \equiv_m 0$$

$$r_a^2 + 7r_a^2 + r_a^2 \equiv_m 0 \Rightarrow 9r_a^2 \equiv_m 0$$

При этом $m \nmid r_a$ (или $r_a = 1$), т.к. числа $m: r_a$:

$$a = m \cdot n + r_a = r_a \cdot l \Rightarrow a: r_a$$

$$\left. \begin{array}{l} a+b: m \Rightarrow a+b: r_a \Rightarrow b: r_a \\ \frac{a}{b} - \text{несократима} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{r_a = 1}$$

Значит $9 \equiv_m 0 \Rightarrow m = 9$ (максимальное)

Приведём пример: $a=2, b=7$

$$\frac{2+7}{4-7 \cdot 7 \cdot 2+49} = \frac{9}{-45} = \frac{1}{-5}$$

Ответ: при $m = 9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

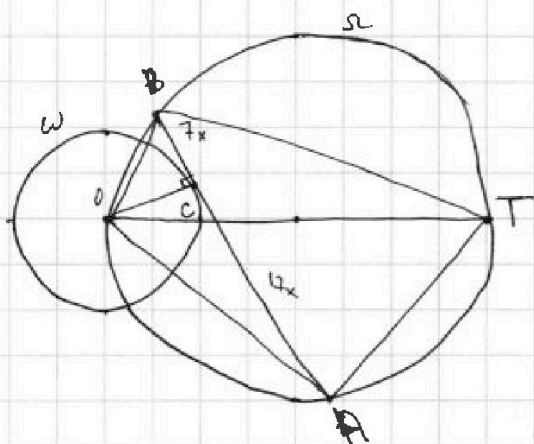
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

3.



Дано: AB - катетона ω .
 $AC \Rightarrow$
 $AC : CB = 7 : 7 \quad 17 : 7$
 $R_{\omega} = 7$
 $R_{\omega} = 13$
 Найти AB .

Решение:

Пусть $AC = 7x \Rightarrow CB = 7x$

$$OC \perp AB \text{ (} AB \text{ — касательная)}, OC = R_{\text{ос}} = 7$$

Проведен диаметр OL OT .

$\angle OBA = \angle OTA$ (опираются на одну сторону)

Рассмотрим $\triangle OCB$ и $\triangle OAT$

$\angle OAT = 90^\circ$ (опирается на диаметр)
 $\angle OCB = 90^\circ$ ($OC \perp AB$)
 $\angle OBA = \angle OAT$

$\Rightarrow \triangle OCB \sim \triangle OAT$

Пусть $OA = a$.

$$\frac{BC}{OC} = \frac{TA}{AO} \Rightarrow \frac{7x}{7} = \frac{TA}{9} \Rightarrow TA = 9x$$

Запишем Т. Пифагора для треугольников:
 $\triangle OCA$, $\triangle OCB$, $\triangle OAT$:

$$\Delta OCA, \Delta OCB, \Delta OAT:$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a^2 = 7^2 + 17^2 x^2 \\ OB^2 = 7^2 (1 + x^2) \\ OT^2 = a^2 (1 + x^2) \end{cases}, OT = 26$$

$$a^2 = \frac{26^2}{1 + x^2}$$

$$\& \frac{26^2}{1 + x^2} = 7^2 + 17^2 x^2 \quad | \cdot (1 + x^2)$$

$$26^2 = 7^2 + 7^2 x^2 + 17^2 x^2 + 17^2 x^4$$

$$\text{Пусть } y = x^2$$

$$17^2 y^2 + 2(17^2 + 7^2)y + 7^2 - 26^2 = 0$$

$$y = \frac{17^2}{17^2} y^2 + \left(1 + \frac{7^2}{17^2}\right)y + \frac{7^2 - 26^2}{17^2} = 0$$

$$y = \frac{-1 - \frac{7^2}{17^2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{7^2}{17^2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{7^2 - 26^2}{17^2}}}{2}$$

подходит
только с +

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{\left(1 + \frac{7^2}{17^2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{7^2 - 26^2}{17^2}} - 1 - \frac{7^2}{17^2}}{2}}$$

$$\text{Тогда: } AB = 17x + 7x = 24x = 24 \sqrt{\frac{\sqrt{\left(1 + \frac{7^2}{17^2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{7^2 - 26^2}{17^2}} - 1 - \frac{7^2}{17^2}}{2}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{4} \quad \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$
$$\frac{(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1})(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})}{\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}} =$$

$$= (1 - 9x) \cdot \cancel{\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}} \neq 0, \text{ т.к. } 3x^2 + 3x + 1 \text{ не имеет корней.}$$

$$\frac{3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1}{\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}} = \cancel{9x + 1} - 9x$$

$$\frac{-9x + 1}{\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}} = 1 - 9x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1



2



3



4



5



6



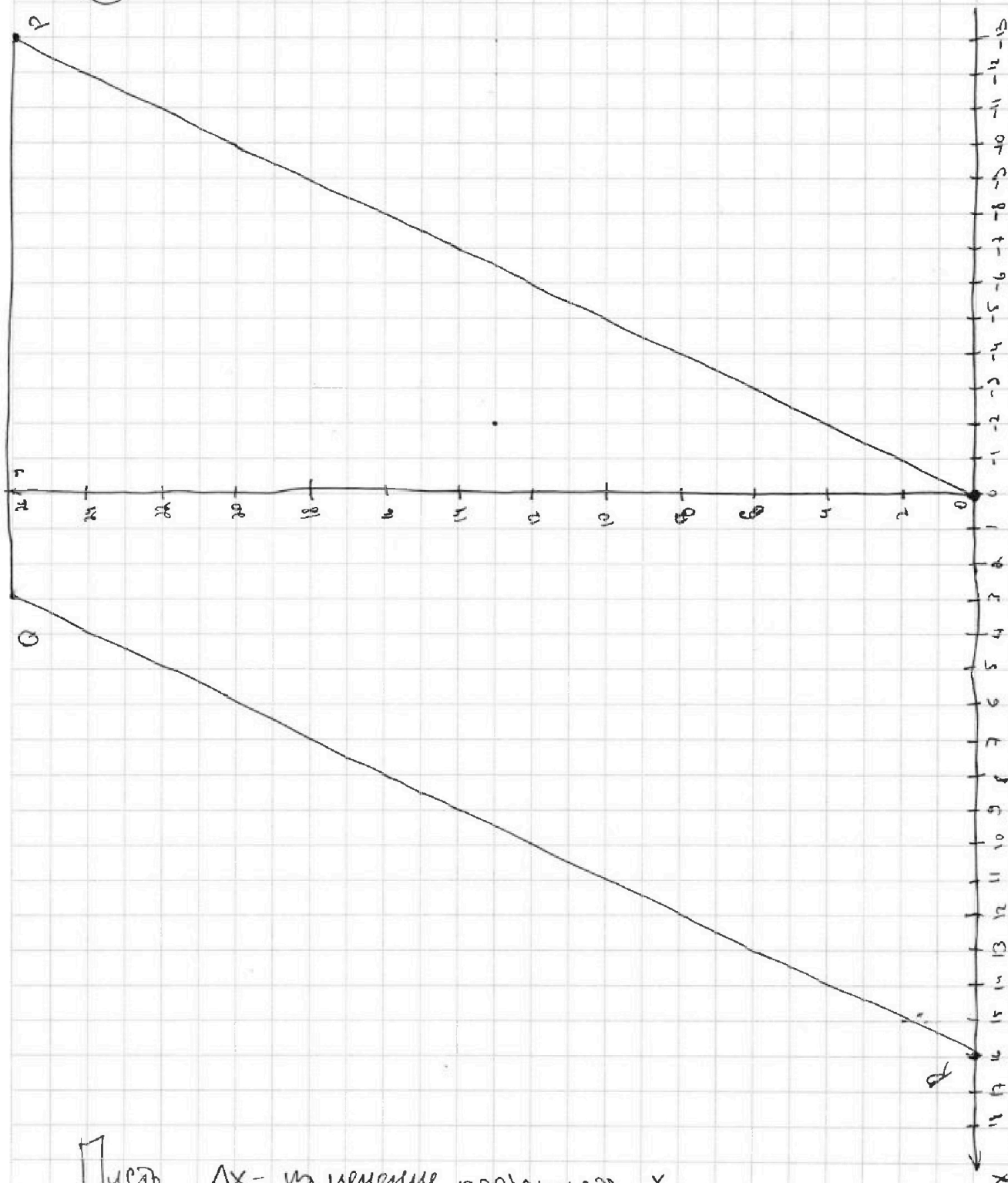
7



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5. (График проверки)



Пусть Δx - изменение координаты x ,
 Δy - изменение координаты y . Тогда при

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2\Delta x + \Delta y = 14$$

~~Δx может~~ $|\Delta x| \leq 16$; $|\Delta y| \leq 26$

$$|\Delta x| \leq 32$$
 ; $|\Delta y| \leq 26$

Пр отрицательные

Будем рассматривать Δy .

Отрицательные рассматривать не будем, т.к. паров будет повторяться, просто меняя местами точки.

При $\Delta y = 1$:

$\Delta x = 13$ ~~таких пар точек:~~

~~Перепроверим все точки.~~

Рассмотрим для таких точек систему уравнений которой они должны удовлетворять:

(этим ~~уравнения~~ неравенствами описывается внутренность параллелограмма).

$$y \geq -2x$$

$$y \geq 0$$

$$y \leq 26$$

$$y \leq 32 - 2x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y - 2x \leq y \leq 32 - 2x$$

$$0 \leq y + 2x \leq 32$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$(y_2 + 2x_2) - (y_1 - 2x_1) = 14$$

$$\cancel{(y_2 + 2x_2)}$$

$$14 \leq y_2 + 2x_2 \leq 32 \Rightarrow 0 \leq (y_1 - 2x_1) \leq 18$$

Значит таких пар 19

Ответ: 19 пар.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

Первое уравнение: прямая $y = -ax + 8b$

Второе неравенство = две окружности

1-ая в центре $(0; 0)$ и радиусом 1

2-ая в центре $(0; 12)$ и радиусом 4

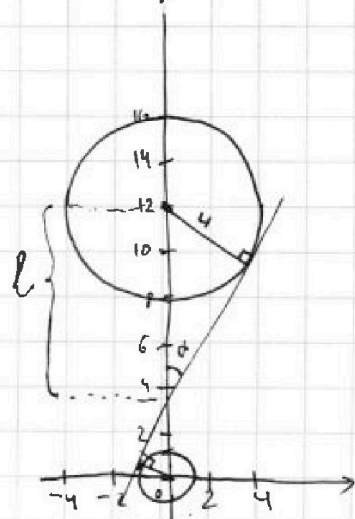
Внутри окружности соответствующая скобка < 0

На границе окружности равна 0

Снаружи окружности > 0

Чтобы неравенство выполнялось точка с координатами (x, y) должна лежать внутри какой-то из окружностей.

Чтобы было два корня, ~~она~~ ^{прямая} должна касаться двух окружностей, т.к. если она станет хордой какой-то из окружностей, то ~~то~~ корней станет бесконечное кол-во.



Будут подходить две внутренние касательные и две внешние.

Для внутренних:

$$\sin \alpha = \frac{4}{l} = \frac{1}{12-l}$$

$$48 - 4l = l \Rightarrow 48 = 5l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l = \frac{48}{5}$$

$$\text{Тогда } a = \pm 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

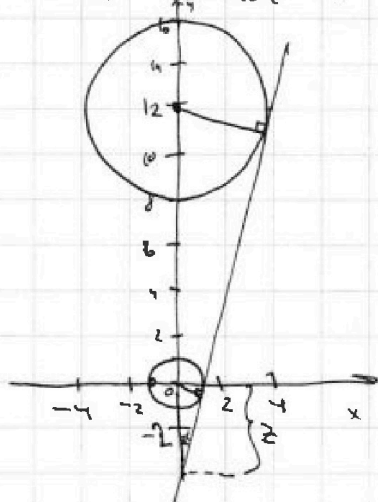
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда: $ax_1 + 0 - 8b = 0$
 $a \cdot 0 + 12 - \frac{48}{5} - 8b = 0$
 $ax_1 - 12 + \frac{48}{5} = 0$

ax_1
 $a = \pm \cot \alpha = \pm \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \pm \frac{\sqrt{1 - (\frac{20}{48})^2}}{\frac{20}{48}} = \pm \frac{48 \sqrt{1 - (\frac{20}{48})^2}}{20} = \pm \frac{24 \sqrt{1 - (\frac{5}{12})^2}}{10} =$
 $= \pm \frac{12 \sqrt{1 - (\frac{5}{12})^2}}{5} = \pm \frac{12 \sqrt{1 - \frac{25}{144}}}{5} = \pm \frac{12 \sqrt{\frac{119}{144}}}{5} = \pm \frac{\sqrt{119}}{5}$

Для величины x :



$\frac{z}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4z = 12 \Rightarrow z = 3$

$\sin \alpha = \frac{1}{3}$

$12 + z = 4z \Rightarrow z = 4$

$\sin \alpha = \frac{1}{4}$

$a = \pm \cot \alpha = \pm \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} =$
 $= \pm 4 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \pm \frac{4}{4} \sqrt{15} = \pm \sqrt{15}$

Ответ: $\pm \frac{\sqrt{119}}{5}$; $\pm \sqrt{15}$

стр 8

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

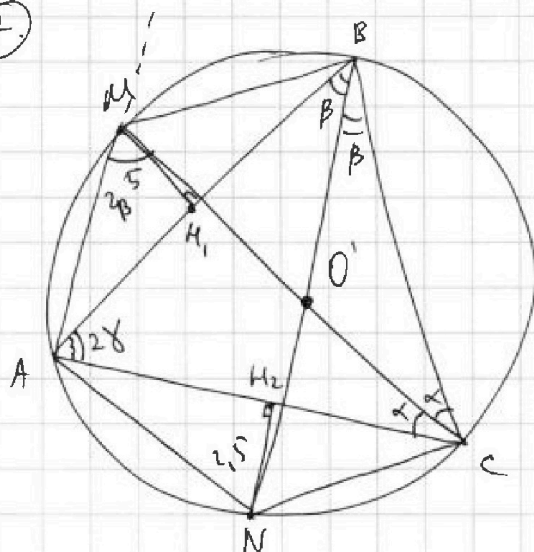
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



7



Дано: $\triangle ABC$ - вписанный

$$MH_1 = 5$$

$$NH_2 = 2,5$$

Найти: $AO' = ?$

Решение:

CM - биссектриса угла C (M - середина дуги)

BN - биссектриса угла B (N - середина дуги)

O' - пересечение CM и BN

Найти AO' :

$$\angle AMC = \angle ABC = 2\beta$$

$$\angle ANB = \angle ACB = 2\alpha \quad (\triangle ABC - \text{впис.})$$

$$\angle AMB = 180 - 2\alpha \quad (\text{впис.})$$

$$\angle ANC = 180 - 2\beta \quad (\triangle ABC - \text{впис.})$$

$$180 - 2\alpha = 2\beta + 2\gamma \quad (\text{по } \triangle ABC) \Rightarrow \angle CMB = 2\gamma$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Вариант~~

$$\begin{aligned} ab &= 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc &= 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac &= 2^{13} \cdot 7^{33} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 + b_2 &= 15 \\ b_2 + c_2 &= 12 \\ a_2 + c_2 &= 23 \end{aligned}$$

$$a_2 - b_2 = 8$$

↓ АНФ

$$2c_2 = 25$$

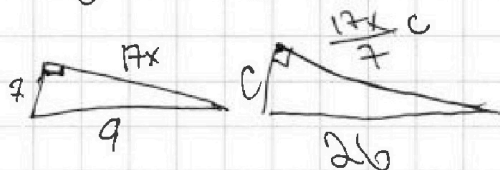
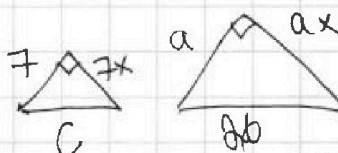
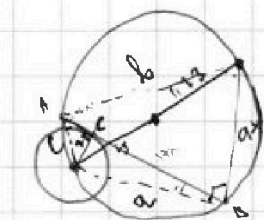
$$c_2 = 12,5$$

$$c = 13 \Rightarrow b = 4$$

$$c = 13 \Rightarrow a = 10$$

$$\frac{250}{10} = 25$$

Кому-то
равны
стороны



$$\frac{b}{c} = \frac{17x}{a} \Rightarrow$$

$$26^2 = c^2 + \left(\frac{17}{7}\right)^2 x^2 c^2$$

$$a^2 = 17^2 x^2 + 49$$

$$26^2 = a^2 - a^2 x^2$$

$$c^2 = 49 + 49 x^2$$

$$26^2 = a^2(1 + x^2)$$

$$c^2 = 7^2(1 + x^2)$$

$$\Rightarrow \frac{26}{c} = \frac{a}{7} \Rightarrow c = \frac{26 \cdot 7}{a}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{26^2}{a^2} = 1 + x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{26}{a^2} - 1$$

$$a^2 = \frac{26}{1+x^2}$$

$$\frac{26}{1+x^2} = 17x^2 + 49$$

$$x(1+x^2)$$

ну и там x на логиче заменой?

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1$$

$$x^2 - 2x + \frac{2}{3}$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{4 - \frac{8}{3}}}{2} = 1$$

$$x^2 + x + \frac{1}{3}$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{3}}}{2}$$

~~x~~



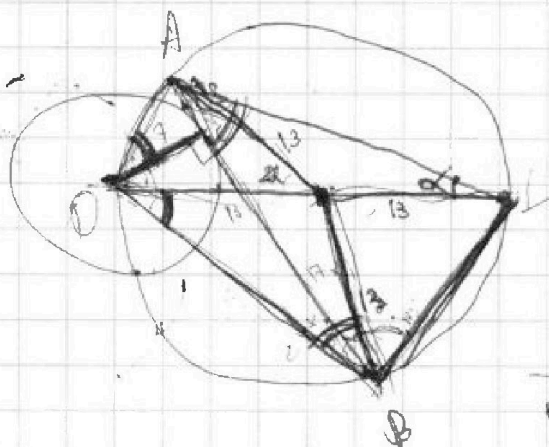
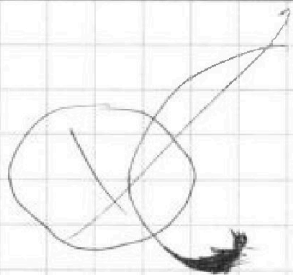
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{26}{49 + 49x^2} = \frac{26}{7\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{26}{7\sqrt{1+x^2}} = \frac{OB}{7} = \frac{BL}{7x}$$

$$\frac{26}{7\sqrt{1+x^2}} = \frac{OB}{7} = \frac{BL}{7x}$$

$$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac: 2^{23} \cdot 7^{35}$$

$$2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\begin{aligned} a &= 2^{16} \cdot 7^{21} \\ b &= 1 \\ c &= 2^{12} \cdot 7^{18} \end{aligned}$$

$$abc = 2^{23} \cdot 7^{39}$$