



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

значит отметить, что те числа, на которые делится
 ab ; bc ; ac — это и есть минимальные значения
 ab ; bc ; ac соответственно, тогда перемножим
их и получим ответ

$\sqrt{ab \cdot bc \cdot ac} = abc = \sqrt{2^{51} \cdot 7^{64}}$ — но видно, что получится
целой только из 2^{51} , но если a, b, c натуральны, то есть abc — натуральное,
нужно поделить в какую-то сторону сдвинуть так чтобы
минимальные значения, то $\sqrt{2^{51}}$ — минимальное значение, то
 $\sqrt{2^{51}}$ не имеет дельты, тогда берем $\sqrt{2^{52}} = 2^{26}$

получается, что $abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$. теперь стоит обратиться к
условию и проверить верность условия. можно на это
действовать попарно проверять, то же проделав все три
этих чисел деления делаются из попарно, то есть, то же самое
но здесь видно, что $7^{32} \neq 7^{37}$, то 7^{32} не, то есть $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$
поддерживает условие — каждый пример, тогда это было бы

$$\text{пусть } a = 2^9 \cdot 7^{15}$$

$$b = 2^6$$

$$c = 2^{11} \cdot 7^{22}$$

$$abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{15}$$

$$\Rightarrow ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{22}$$

$$\Rightarrow bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\Rightarrow ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

значит, вариант $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$ — верный, удовлетворяет
всем условиям и минимальным.

$$\text{Ответ: } abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) подберем дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}, \text{ тогда}$$

$$\frac{a+b}{a^2+8ab+b^2-8ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab} \text{ отсюда следует, что}$$

если дробь сокращается на m , то 1) $m \leq a+b$

2) $(8ab)$ и $(a+b)$ имеют общий делитель m

т.к. b — наименьшая сумма квадратов чисел и
какого-то числа, то сокращение возможно лишь в
случае, когда это число имеет общий делитель с числен-
ным, тогда

найдем наибольший общий делитель чисел
 $(8ab)$ и $(a+b)$

1) $\frac{a}{b}$ — несократимая дробь, $(a, b) = 1$, тогда a и b взаимно
просты числа. Сумма взаимно простых чисел не делится
ни на одно из этих чисел. представим $(a+b)$ в виде произв.

$$a+b = p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3} \dots \quad \text{или их произв.}$$

или одно из этих чисел не равно a или b

$$8ab = 8 \cdot a \cdot b$$

Значит единственный возможный общий делитель — это 2^x
и $x \leq 3$, тогда максимальный делитель — 8
Значит, $m = 8$ — наибольший общий делитель

Ответ: $m = 8$

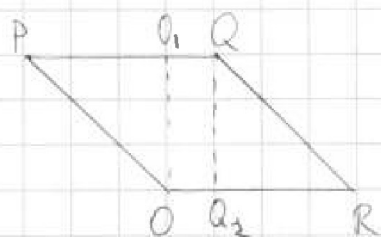
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$O(0;0) \quad R(15;0)$$

$$P(0;24) \quad Q(3;24)$$

Итак, опустим перпендикуляр из O
на PQ и из Q на OR

- $O_1O = 24$ - расстояние между пр. OR и PQ $24 - 0 = 24$
- $OQ_1 = 3$ - x координата $m. O_1$ и x коорд $m. Q$ $3 - 0 = 3$
- $PO_1 = PQ - O_1Q = 15 - 3 = 12$ $|12 - 3| = 15$

4. Значит, в $\triangle PO_1O$ и в $\triangle QO_1R$ 12 подобных $\triangle$ с целочисленными катетами, тогда m_k

$$\frac{PO_1}{OQ_1} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} \quad \text{посчитаем кол-во целочисленных точек}$$

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + \dots}_{(1 \text{ ряд}) \quad (1 \text{ ряд} \quad \text{напр})}$$

$$12 + 1 = 13$$

$$\sum_{ar} = \frac{2 \cdot 1 + 2(B-1)}{2} \cdot 13 = \frac{2 + 12 \cdot 2}{2} \cdot 13 = 169$$

кол-во целочисленных точек в прямоугольнике

$$O_1QO_2O \quad (O_1Q - 1) \cdot 24 = 2 \cdot 24 = 48$$

Итого в n -ме $169 + 48 = 217$ целочисленных точек

$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$, т.е. все прямоугольники с
целыми сторонами содержат по 2 целых точки
вариантов сторон 6

может поместиться только 2 прямоугольника: 10×2 и 12×2
по 1 прямоугольнику: 4×8 и 6×6

Всего 6 вариантов найденных может быть использован на практике
т.к. можно поместить и в отрезке 12×12 , то
прибавляется еще 12×12 в варианты по количеству

$$2 \cdot 12 \times 12 + 12 \times 12$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

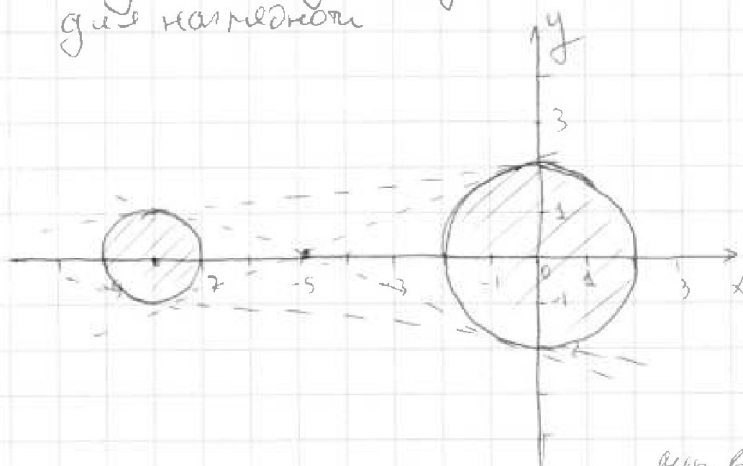
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

итак, рассмотрим (второе) кр. 6

$$(x+8)^2 + y^2 = 1 \text{ - ур. окружности } R=1 \text{ центр } (-8; 0)$$

$$x^2 + y^2 = 4 \text{ - ур. окружности } R=2 \text{ центр } (0; 0) \text{ построим две касательные}$$



возьмем точки

$$A(0; 0), B(-8; 0)$$

$$\text{и } C(5; 5)$$

тогда видно, что

в т. А и В касание

левой части кр. 6а

отмечены все

в т. С касание правой

части

кр. 6а не выходит за пределы

окружности

следовательно если прямая $y = ax + 10b$ будет касаться обеих окружностей, то будет иметь 2 решения системы

$$1) \text{ приравняем } y = ax + 10b \text{ и } (x+8)^2 + y^2 = 1$$

$$x^2(1+a) + x(16-20ab) + 100b^2 + 63 = 0 \quad a \neq -1$$

$$D = 4(100a^2b^2 - 320ab - a - 100b^2)$$

касание, а не пересечение в центре $D=0$

$$100a^2b^2 - 320ab - a - 100b^2 = 0$$

$$2) \text{ приравняем } y = ax + 10b \text{ к } x^2 + y^2 = 4$$

$$x^2(a+1) - 20abx + 100b^2 - 4 = 0$$

$$D = 4(100a^2b^2 - 100ab^2 - 100b^2 + 4a + 4) \text{ касание только в}$$

центре $D=0$

$$100a^2b^2 - 100ab^2 - 100b^2 + 4a + 4 = 0$$

$$\text{решим систему } \begin{cases} 100a^2b^2 - 100ab^2 - 100b^2 + 4a + 4 = 0 \\ 100a^2b^2 - 320ab - a - 100b^2 = 0 \end{cases}$$

$$100ab^2 - 320ab - (5a+4) = 0 \quad D = 4^2 \cdot 10^2 a^2 + 4^2 \cdot 10^2 + 2000a$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$D_{\text{кр}} = 4^4 \cdot 10^2 a^2 + 2000a + 4^2 \cdot 10^2 = 160^2 a^2 + 2000a + 1600$$

ноль вариантов ~~1600~~ ~~2000~~ ~~1600~~

$$D=0 \rightarrow 160^2 a^2 + 2000a + 1600 = 0 \rightarrow 4 \cdot 10^6 a^2 + 4 \cdot 4^2 \cdot 10^2 a + 4^4 \cdot 10^2 = 0$$
$$= 4 \cdot 10^4 (100 - 64) = 1200^2$$

$$a_1 = \frac{-2000 \pm \sqrt{2000^2 - 4 \cdot 160^2 \cdot 1600}}{2 \cdot 160^2} = \frac{-2000 \pm 1200}{320} = 2,5$$

$$a_2 = \frac{-2000 - 1200}{320} = -10$$

$$b_{\text{кр}} = \frac{160a \pm \sqrt{160^2 a^2 + 2000a + 1600}}{200a}$$

итого всего 4 значения варианта

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab: 2^{14} \cdot 7^{10} \text{ min}$
 $bc: 2^{17} \cdot 7^{17} \text{ min}$
 $ac: 2^{20} \cdot 7^{37} \text{ min}$

~~ab < bc~~
~~bc < ac~~

$ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$
 $bc = 2^{17} \cdot 7^{17}$
 $\frac{c}{a} = 2^3 \cdot 7^7$
 $c = a \cdot 2^3 \cdot 7^7$

НОК

$\frac{a}{b} = 2^3 \cdot 7^{20}$

$b = \frac{a}{2^3 \cdot 7^{20}} \quad a = b \cdot 2^3 \cdot 7^{20}$

$\frac{c}{b} = 2^6 \cdot 7^{27}$

$b = \frac{c}{2^6 \cdot 7^{27}}$

~~$abc = 2^{37} \cdot 7^{30} \cdot \frac{c}{2^3 \cdot 7^5} \cdot \frac{a}{2^3 \cdot 7^{20}}$~~

~~$abc = ac \cdot b = 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot \frac{ac}{2^9 \cdot 7^{17}} = \frac{2^{20} \cdot 7^{37} \cdot a \cdot c}{2^9 \cdot 7^{17}}$~~

$a = 2^{10} \cdot 7^7$
 $b = 2^7$
 $c = 2^{10} \cdot 7^{30}$

$a + c \geq 20$
 $b + c \geq 17$
 $a + b \geq 14$

$a + b + 2c \geq 37$
 $2c \geq 23$
 $c \geq 11,5$

$c_{\min} = 12$

$c = 2^{11}$
 $b = 2^6$
 $a = 2^9$

$a + c \geq 31$
 $2b \geq 11$
 $b \geq 5,5$
 $b \geq 6 \text{ min}$

$2a + b + c \geq 34$
 $2a \geq 12$
 $a \geq 6$

$2^{26} \cdot 7^{32}$

$a + c \geq 37$
 $b + c \geq 17$
 $a + b \geq 10$

$2c \geq 44$
 $b \geq 0$
 $2a \geq 30$
 $c \geq 22$
 $a \geq 15$

$c = 22$
 $a = 15$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a}{b} \quad (a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N})$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-8ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

$$m < a+b$$

$$3 \text{ и } 5$$

$$8ab \cdot 8a+b$$

$$8ab \bmod a+b \cdot m = a+b \bmod m$$

$$\frac{a}{b} = c$$

$$a = bc$$

$$m = 8$$

$$a+b \text{ / } a \text{ и } b \text{ m.k.}$$

$$225 - 856$$

a и b взаимнопростые

$8ab$ и a и b , то

$a+b$ также взаимно

прост.
масштаб

$$\frac{8}{8^2 - 8 \cdot 15}$$

$$a+b : 8$$

$$m = 8$$

$$\sqrt{49x^4 + x^2} = x \sqrt{49x^2 + 1}$$

$$BP = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$PA = \sqrt{4x^2 + 1}$$

$$A \frac{1}{2} \sqrt{(x+1)(x^2+1)} \sin \angle BPA$$

$$AC : CB = 7$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2x}$$

$$RSL = 5$$

$$r \omega = 1$$

$$\angle BWA = 180 - \alpha$$

$$\angle BSLA = 2\alpha$$

$$2 \angle BPA = 360 - \angle BQA$$

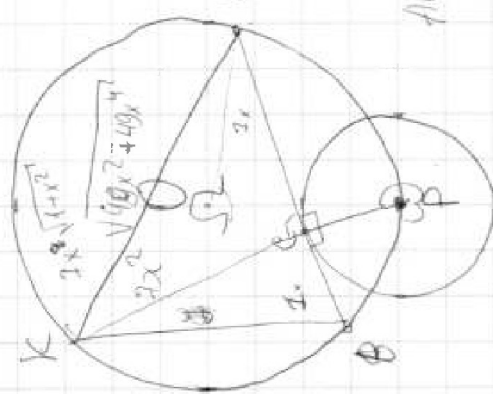
$$S_{\triangle POA} = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot \sin \angle POA = \frac{1}{2} \sqrt{(x+5)(x-5)^2(5-x)} =$$

$$25 \sin \angle POA = 2(4x-5) \sqrt{4x(5-16x^2)} \quad P = 8x + 10$$

$$5 = \frac{2x \sqrt{1+x^2} \cdot 2x \cdot \sqrt{49x^2+1}}{2 \cdot 4x^2 \cdot 8x}$$

$$x = 1 - \text{верно}$$

$$\Rightarrow 100 = (1+x^2)(49x^2+1)$$





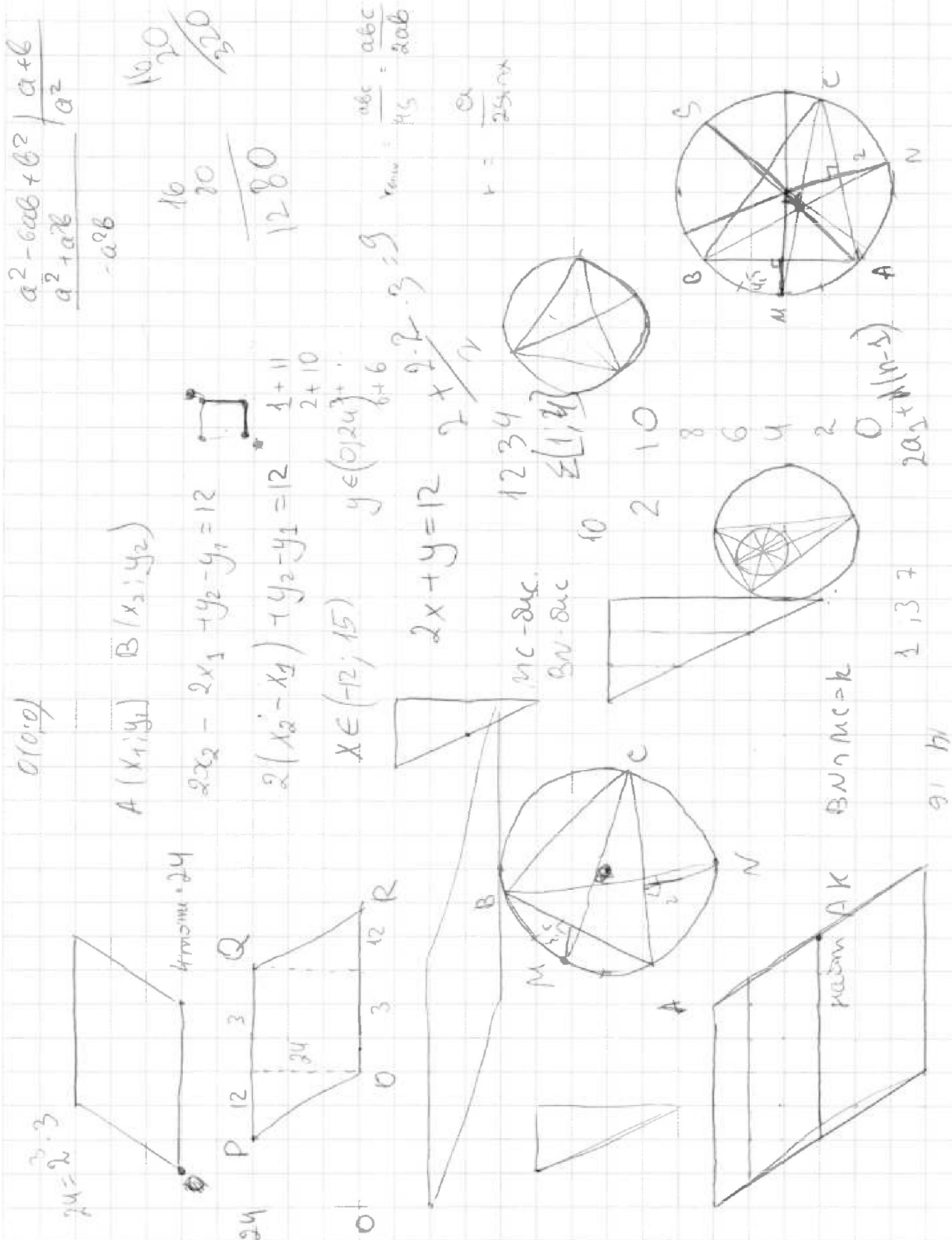
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$100 = 49x^2 + 49x^4 + 1 + x^2$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} 49x^4 + 50x^2 - 99 & x-1 \\ \hline 49x^4 - 49x^2 & \\ \hline 49x^3 + 50x^2 & \\ 49x^3 - 49x^2 & \\ \hline 99x^2 - 99 & \\ 99x^2 - 99x & \\ \hline 99x - 99 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 49x^3 + 49x^2 + 99x + 99 & x+1 \\ \hline 49x^3 + 49x^2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 99x^2 - 99 \\ 99x^2 - 99x \\ \hline 99x - 99 \end{array}$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$49x^3 + 49x^2 + 99x + 99 = 0$$

$$x = -1$$

$$x = 1 - \text{корень}$$

$$49x^3 + 49x^2 + 9$$

$$49x^3 + 49x^2 + 9 = 0$$

$$\begin{array}{l} x > 2 \\ x > 2 \\ x > 2 \end{array}$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 2x - 2$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 2 \geq 2x$$

$$\begin{array}{r} 181 \\ 2 \\ \hline 362 \end{array}$$

$$8 - 4 = 4$$

$$8x^2 + 2x + 1 > 0$$

$$\begin{array}{r} 129 \\ 129 \\ \hline 258 \\ 129 \\ \hline 387 \end{array}$$

$$x = \frac{4}{5+1} = \frac{2}{3}$$

$$8 - 25 = -17$$

$$8x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$8x^2 - 5x + 3$$

$$\sqrt{8x^2 - 5x + 3} - \sqrt{8x^2 + 2x + 1} = 2 - 2x$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

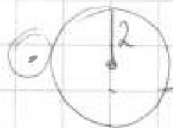
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = ax + 10b$$

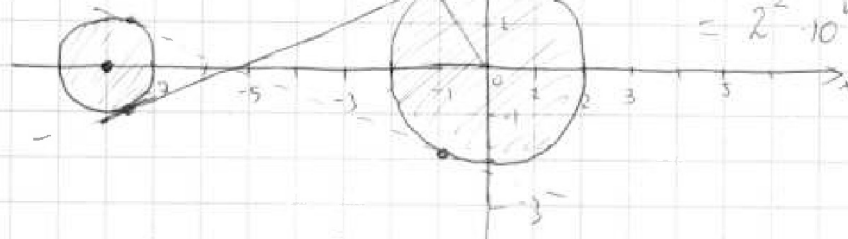


$$\begin{array}{r} 1000 \overline{) 40} \\ 80 \\ \hline 20 \end{array}$$

$$160^2 a^2 + 2000a + 1600$$

$$4 \cdot 10^6 - 4 \cdot 4^4 \cdot 10^4 \cdot 4^2$$

$$4 \cdot 10^4 (100 - 4^8) = 4 \cdot 10^4 \cdot 36$$



$$y = ax + 10b$$

$$a^2 x^2 + 100b^2 - 20abx$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ 4 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$(x+8)^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$x^2(a+1) - 20abx + 100b^2 = 0$$

$$x^2(1+a) + x(16-20ab) + 100b^2 + 63 = 0$$

$$D = 256 - 1280ab + 400a^2b^2 - 4a - 400b^2$$

$$D = 0$$

$$400a^2b^2 - 1280ab - 4a - 400b^2 = 0$$

$$100a^2b^2 - 320ab = a = 100b^2 = 0$$

$$100ab^2(a+1) = a(320b+a)$$

$$2) D = 400a^2b^2 - 4(a+1)(100b^2-4) =$$

$$D = 0 \quad 100a^2b^2 - 100ab^2 - 100b^2 + 4a + 4 = 0$$

$$100ab^2 - 4a - 4 - 320ab - a = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

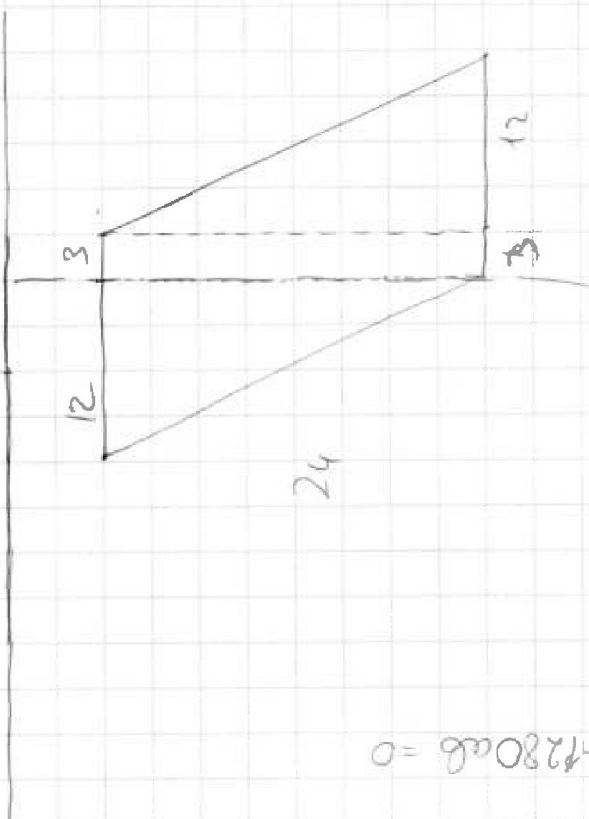
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

320
120

$12 \times 3 +$



$$500a^2b^2 - 100ab^2 - 50b^2 + 4 - 1280ab = 0$$