



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-12;24)$ ,  $Q(3;24)$  и  $R(15;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac : 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$abc$  - мин.?

$a, b, c$  должны состоять  
только из простых  
множителей 2 и 7,  
чтобы  $abc$  было минимал., т.к.

иначе другие множит. не  
увеличат на выходы, услов.  
и  $a, b, c$ , не увеличат  
ни  $abc$ , тогда - увеличат.  
(т.к. любой прост. множ.  $> 1$ )

Другой вариант: (т.к.  $ab, bc, ac \neq 0$ , т.к.  $a, b, c \in \mathbb{N}$ )

$$\begin{cases} 1. ab = 2^{14} \cdot 7^{10} \\ 1. bc = 2^{17} \cdot 7^{17} \\ 1. ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \end{cases} : \begin{matrix} \text{т.к. } b \neq 0 \\ a \neq 0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \frac{c}{a} = 2^3 \cdot 7^7 \\ ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \end{cases}$$

$$c^2 = 2^{23} \cdot 7^{44}$$

это невозможно  
т.к.  $\sqrt{2^3} \notin \mathbb{N}$

Представим  $\begin{cases} a = 2^x \cdot 7^y \\ b = 2^z \cdot 7^f \\ c = 2^e \cdot 7^g \end{cases}$ , где  $x, y, z, f, e, g \in \mathbb{N}$   
 $\neq 0$

$$\begin{cases} 2^x \cdot 7^y \cdot 2^z \cdot 7^f = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot 2^k \cdot 7^l \\ 2^z \cdot 7^f \cdot 2^e \cdot 7^g = 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot 2^u \cdot 7^v \\ 2^x \cdot 7^y \cdot 2^e \cdot 7^g = 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot 2^w \cdot 7^r \end{cases}$$

т.к. третий вариант невозможен  
то для рав-ва  
должны  
на 2 и 7  
в нуж. ст.  $\neq 0$   
т.к.  $x, y, z, f, e, g \in \mathbb{N}$   
 $k, l, u, v, w, r \in \mathbb{N}$   
 $\neq 0$

$$\begin{cases} x+z=14+k \\ y+f=10+l \\ z+e=17+u \\ f+g=17+v \\ x+e=20+w \\ y+g=37+r \end{cases}, \text{ а } abc = 2^{x+z+e} \cdot 2^{y+f+g} \cdot 2^k \cdot 7^l \cdot 2^u \cdot 7^v \cdot 2^w \cdot 7^r =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



51 (продолжение)

$k, l, m, n, o, p$  - наименьш. подкод. типа

$$\begin{cases} x+z=14+k \\ y+f=10+l \\ z+e=17+m \\ f+g=17+n \\ x+e=20+o \\ y+g=37+p \end{cases}$$

Найти

$$x+z+e \quad y+f+g$$

$$\begin{cases} x+z \geq 14 \\ y+f \geq 10 \\ z+e \geq 17 \\ f+g \geq 17 \\ x+e \geq 20 \\ y+g \geq 37 \end{cases}$$

А так  
наименьш. это  
все 2 типа

$$\begin{aligned} x-z &\geq 3 \\ x+z &\geq 14 \end{aligned}$$

$$2x \geq 17$$

$$x \geq 8,5$$

$$\Rightarrow x=9 \text{ (наим. } x)$$

$$9+z \geq 14$$

$$z \geq 5$$

$$z=5 \text{ (наим. } z)$$

$$5+e \geq 17$$

$$e \geq 12$$

$$e=12 \text{ (наим. } e)$$

$$x+z+e = 9+5+12 = 26$$

$$y-f \geq 20$$

$$y+f \geq 10$$

$$2y \geq 30$$

$$y \geq 15$$

$$y=15 \text{ (наим.)}$$

$$g \geq 37-y$$

$$g \geq 22$$

$$g=22 \text{ (наим.)}$$

$$f+g \geq 17$$

$$f \geq -5$$

$$f=0 \text{ (наим.)}$$

$$y+g+f=37$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } 26 \quad 37$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

52

$$\frac{a}{b} \text{ — несократима} \Rightarrow$$

$$\text{НОД}(a, b) = 1$$

$$a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$$

$$\frac{a+b}{a^2-bab+b^2}$$

можно  
сократить  
на  $m$

$\Rightarrow$  т.к. у нас  $a$  и  $b$  —  
взаимно прост., т.к.  
 $\text{НОД}(a; b) = 1$

$$a^2 - bab + b^2 =$$

$$= 2a^2 - 4ab + 2b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) =$$

$$= 2(a-b)^2 - (a+b)^2$$

или

$$a^2 - bab + b^2 =$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 - 3ab = (a+b)^2 - 3ab$$

Пусть  $a+b = m \cdot x$ , где  $m, x \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \frac{m \cdot x}{(m \cdot x)^2 - 3ab} = \frac{m \cdot x}{m^2 x^2 - 3ab}$$

$\Rightarrow$  чтобы сократить на  
 $m$  надо, чтобы

$$3ab : m$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = x \cdot m \quad \text{---} \quad / : a \\ a+b = x \cdot m \quad \text{---} \quad / : b \end{cases}$$

$$\Rightarrow a : m$$

$$b : m$$

$$\Rightarrow 3ab : m$$

$\Rightarrow$  макс.  $m = 3$ , т.к.  $a, b$  и  $m$   
между собой взаимно  
просты.

$\Rightarrow$  ответ:  $m = 3$ .

Заметим, что

сумма взаимно  
простых чисел

на каждое из них,

ведь чтобы сумма дел. на  $a$ ,

надо чтобы каждое слагаемое дел. на  $a$ .



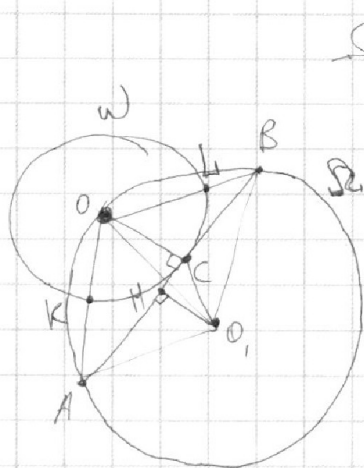
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AC : CB = 7$$

$C$  - т. касан.

$$r_W = 1 = R$$

$$R_\Omega = 5 = R$$

$AB = ?$

Пусть  $AO \cap W = \pi. K$

$OB \cap W = \pi. L$

Тогда по др. касат. и секущ.

$$AC^2 = AK \cdot (AK + 2r)$$

$$BC^2 = BL \cdot (BL + 2r)$$

$$49x^2 = AK^2 + 2AK$$

$$x^2 = BL^2 + 2BL$$

$$AK_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 49x^2}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 + 49x^2} > 0$$

$$\Rightarrow AK = -1 + \sqrt{1 + 49x^2}$$

$$BL_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4x^2}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 + x^2} > 0$$

$$\Rightarrow BL = -1 + \sqrt{1 + x^2}$$

Проведем  $OC$  - радиус в т. касан.

$\Rightarrow OC \perp AB$  (как радиус проведен в т. касан.)

Проведем  $O_1O$ ,  $O_1B$  и  $O_1A$  -

радиус  $\Omega$

Соед.  $AO$ ,  $OB$  и  $CO$ ,

Проведем  $O_1M \perp AB$  ( $M \in AB$ )

Пусть  $CB = x$ , тогда

$$AC = 7x$$

$O_1M$  - высота в  $\triangle O_1AB$  ( $O_1A = O_1B$ )  
явл. медианой.

$$\Rightarrow AB = \frac{AB}{2} = \frac{AC + CB}{2} = \frac{8x}{2} = 4x$$

$$\Rightarrow OA = r + AK = \sqrt{1 + 49x^2}$$

$$OB = r + BL = \sqrt{1 + x^2}$$

$\Rightarrow$  уг  $\angle AOB$ : (по т. косин.)

$$\cos \angle AOB = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB} = \frac{1 + 49x^2 + 1 + x^2 - 64x^2}{2 \sqrt{1 + 49x^2} \cdot \sqrt{1 + x^2}} = \frac{2 - 54x^2}{2 \sqrt{1 + 49x^2} \cdot \sqrt{1 + x^2}} = \frac{1 - 27x^2}{\sqrt{1 + 49x^2} \cdot \sqrt{1 + x^2}}$$

Заметим, что

$$\angle AOB = \frac{\angle AOB}{2} = \frac{180^\circ - \angle AOB}{2} = 90^\circ - \frac{\angle AOB}{2}$$

$$\cos \angle AOB = \cos 90^\circ - \frac{\angle AOB}{2} = -\cos \frac{\angle AOB}{2}$$

$$\left( \begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \\ \Rightarrow \cos \alpha &= \sqrt{\frac{\cos 2\alpha + 1}{2}} \end{aligned} \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3 (продолжение)

$$\Rightarrow \cos \angle \frac{AO, B}{2} = -\cos \angle AOB$$

Заметим, что  $O, H$  - выс. (высшие точки)

$$\Rightarrow \angle AO, H = \frac{\angle AOB}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \angle AO, H = -\cos \angle AOB$$

$\Delta AO, H$  - пр/уг

$$\Rightarrow \cos \angle AO, H = \frac{O, H}{AO,}$$

$$\frac{O, H}{AO,} = \frac{7x-1}{\sqrt{49x^2+1} \cdot \sqrt{1+x^2}} = \frac{O, H}{5}$$

$$O, H = \frac{35x^2-5}{\sqrt{1+49x^2} \cdot \sqrt{1+x^2}}$$

По т. Пифагора из  $\Delta AHO,$

$$AO,^2 = AH^2 + O, H^2$$

$$25^2 = 16x^2 + \frac{25(7x-1)^2}{(1+49x^2)(1+x^2)}$$

$$\frac{(25+16x^2)(1+50x^2+49x^4) + 25(7x-1)^2}{(1+49x^2)(1+x^2)} = 0$$

$$-25 - 25 \cdot 50x^2 - 25 \cdot 49x^4 + 16x^2 + 16 \cdot 50x^4 + 16 \cdot 49x^6 + 25 \cdot 7x^2 - 25 = 0 \quad | :x^2 (x \neq 0)$$

$$16 \cdot 49x^4 + 16 \cdot 50x^2 - 32 \cdot 50 + 16 = 0 \quad | :16$$

$$49x^2 + 50x^2 - 100 + 1 = 0$$

$$49x^2 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-50 \pm \sqrt{2500 + 49 \cdot 99}}{49 \cdot 2} = \frac{-25 \pm \sqrt{625 + 49 \cdot 99}}{49}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 49 \overline{) 5476} \\ \underline{441} \phantom{00} \\ 1066 \phantom{00} \\ \underline{980} \phantom{00} \\ 876 \phantom{00} \\ \underline{876} \phantom{00} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5476 \cdot 24 \\ 49 \overline{) 131424} \\ \underline{147} \phantom{000} \\ 144 \phantom{000} \\ \underline{147} \phantom{000} \\ 36 \phantom{000} \\ \underline{356} \phantom{000} \\ 0 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 7x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 + 7x + 1} + (2 - 7x) \quad | \cdot 12$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 7x + 1 + 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 + 7x + 1} + (2 - 7x)^2 - 28x + 49x^2$$

$$2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 7x - 1 - 4 + 28x - 49x^2 = 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 + 7x + 1}$$

$$-49x^2 + 21x - 2 = 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 + 7x + 1} \quad | \cdot 12$$

$$-(7x)^2 + 14x + 1 - 7x + 1 = -((7x - 1)^2 - (7x - 1)) = -((7x - 1)(7x - 1 - 1))$$

$$-(7x - 1)(7x - 2) + 2(7x - 2)\sqrt{2x^2 + 7x + 1} = 0$$

$$(7x - 2)(2\sqrt{2x^2 + 7x + 1} - (7x - 1)) = 0$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$2\sqrt{2x^2 + 7x + 1} = 7x - 1 \quad | \cdot 12 \quad \wedge \quad 7x - 1 \geq 0 \quad (7x \geq 1)$$

$$4(2x^2 + 7x + 1) = 49x^2 - 14x + 1$$

$$8x^2 + 8x + 4 - 49x^2 + 14x - 1 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 41 \cdot 3}}{41}$$

$$x_1 = \frac{11 + \sqrt{121 + 123}}{41} = \frac{11 + \sqrt{244}}{41}$$

$$x_2 = \frac{11 - \sqrt{244}}{41}$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{244}}{41}$$

$$\text{ответ: } \frac{11 + \sqrt{244}}{41}; \frac{2}{7}$$

Проверим  $x = \frac{2}{7}$

$$\sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} - \frac{10}{7} + 3} - \sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} + \frac{14}{7} + 1} = 0$$

$$\sqrt{\frac{8}{49} - \frac{10}{7} + 3} = \sqrt{\frac{8}{49} + \frac{11}{7}}$$

верно

Проверим

$$1(11 + \sqrt{244}) \geq 41 \quad 7(11 - \sqrt{244}) \geq 41$$

$$77 + 7\sqrt{244} \geq 41 \quad -7\sqrt{244} \geq -36$$

$$7\sqrt{244} \geq -36$$

верно

$$-7.15 \leq -36$$

не верно

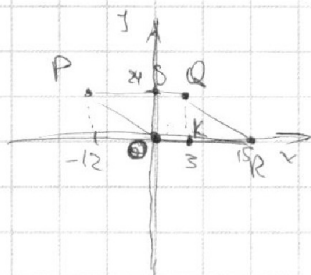
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Z}$$

5

$$\Rightarrow 2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

Сумма т. и т. к

$$(y_2 - y_1) \in (-24; 24)$$

$$(x_2 - x_1) \in (-15; 15)$$

$$2(x_2 - x_1) \in (-30; 30)$$

$$т. к. x_2, x_1 \in \mathbb{Z}$$

$$то 2(x_2 - x_1) - \text{чётное число} \in (-30; 30)$$

$$2 + 11 = 13, 4 + 4 = 8$$

$$\Rightarrow (y_2 - y_1) - \text{чётное число} \in (-24; 24)$$

$$\Rightarrow y_2, y_1 - \text{одна чётность}$$

$$2(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1) = 12$$

$$\text{При } (y_2 - y_1) = 24$$

$$2(x_2 - x_1) = -12, 2(x_2 - x_1) \in (-12; 30)$$

|                |     |     |     |     |     |     |
|----------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $2(x_2 - x_1)$ | -12 | -10 | -8  | -6  | -4  | -2  |
| $y_2 - y_1$    | -24 | -22 | -20 | -18 | -16 | -14 |
|                | 12  | 12  | 12  | 12  | 12  | 12  |
|                | 12  | 12  | 12  | 12  | 12  | 12  |

$y_2 \in \mathbb{Q}$   
 $y_1 \in \mathbb{Q}$

$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

$$x_1 = 3, x_2 = 6 \Rightarrow 3$$

$$\Rightarrow 9 \text{ пар}$$

При мет. у кол-во пар на 1 меньше, чем при мет. р. и г.

А при мет. р. и г. симметрично и у г. и у п. мет.

При симм.  $y_2 - y_1$  на 2  $(x_2 - x_1)$  на 1

это 2 группы старш

$\Rightarrow$  увелич. кол-во на 2

11 и 3

каждый из них по 11 и 3

$$11 + 10 + 11 = 32 \text{ пар}$$

|                |    |    |   |   |   |
|----------------|----|----|---|---|---|
| $2(x_2 - x_1)$ | 0  | 2  | 4 | 6 | 8 |
| $x_2 - x_1$    | 0  | 1  | 2 | 3 | 4 |
| $y_2 - y_1$    | 12 | 10 | 8 | 6 | 4 |

наим. кол-во в чет. р. и г. на 2

$$14 \cdot 15, 14 \cdot 17, 14 \cdot 19, 14 \cdot 21$$

$$13 \cdot 13$$

|                |    |    |    |
|----------------|----|----|----|
| $2(x_2 - x_1)$ | 10 | 12 | 14 |
| $x_2 - x_1$    | 5  | 6  | 7  |
| $y_2 - y_1$    | 2  | 0  | -2 |

только точки  $x_2$  и  $x_1$  поменяются



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☒

6  
☐

7  
☐

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

|                |        |        |        |     |     |     |     |     |
|----------------|--------|--------|--------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $2(x_2 - x_1)$ | 18     | 18     | 20     | 22  | 24  | 26  | 28  | 30  |
| $x_2 - x_1$    | 9      | 9      | 10     | 11  | 12  | 13  | 14  | 15  |
| $y_2 - y_1$    | -4     | -8     | -8     | -10 | -12 | -14 | -16 | -18 |
|                | $5u_1$ | $3u_1$ | $1u_1$ |     |     |     |     |     |

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$y = ax + 10b$  — прямая

$y_1, y_2 \leq 0$ , где  $y_1 = (x+8)^2 + y^2 - 1$

A

$(x+8)^2 + y^2 = 1$  — окр-ть  
центр  $(-8, 0)$   
радиус 1

$y_2 = x^2 + y^2 - 4$  — окр-ть  
центр  $(0, 0)$   
радиус 2

$\leq 0$  если  $y_1$  и  $y_2$  — разных знаков  
т.к.  $y_1$  и  $y_2$  — окр-ти,  
у которых внутри  $< 0$ ,  
окр-ть  $= 0$   
снаружи  $> 0$

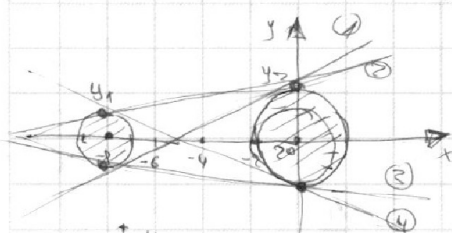
Заметим, что окр-ти

не пересекаются

$\Rightarrow$  нужны ~~окр-ти~~ —

внутри одной и снаружи

(там или  $y_1 > 0, y_2 \leq 0$   
 $y_1 \leq 0, y_2 > 0$ )



т.к. нам нужны только 2 р-та.

то это возможно, только если прямая

$y$  — касат. к обеим окр-тям

есть всего 4 таких прямых (см. на чертеже)

для пр.  $y$ , а — tg угла наклона пр.  $y$  к  $x$

Заметим, что углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  равны

также

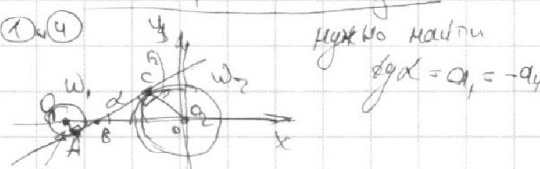
углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  равны

$$\Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2$$

$$\alpha_2 = -\alpha_1$$

$\Rightarrow$  Рассмотрим оба случая:

(1) и (4)



нужно найти  $\tan \alpha = \alpha_1 = -\alpha_2$

$\Rightarrow AC$  — касат. к  $\omega_1$  и  $\omega_2$

$\Rightarrow \triangle O_1AB \sim \triangle O_2CB$  (пр/уг и  $\angle O_1BA = \angle O_2CB$ )

$$\Rightarrow \frac{O_1B}{O_2B} = \frac{O_1A}{O_2C} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2} \text{ (как сход. тр. изод. \Delta O_1A)} \Rightarrow O_1B = \frac{1}{2} O_2B$$

$$O_1O_2 = 8 = O_1B + O_2B = 3O_1B$$

$$\Rightarrow O_1B = \frac{8}{3}$$

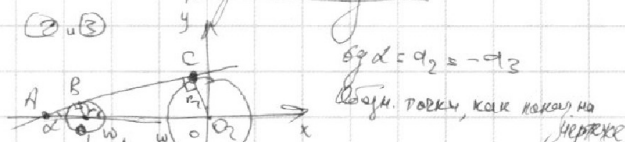
$\Rightarrow$  из  $\triangle O_1AB$  — пр/уг по т. Пифагора

$$AB = \sqrt{O_1B^2 - O_1A^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 - 1} = \frac{\sqrt{55}}{3}$$

$$\tan \alpha = \tan \angle O_1BA = \frac{O_1A}{AB} = \frac{1}{\frac{\sqrt{55}}{3}} = \frac{3\sqrt{55}}{55} = \alpha_1 = -\alpha_2$$

Второй случай

(2) и (3)



$$\tan \alpha = \alpha_2 = -\alpha_1$$

Ободн. точки, как касат. на чертеже

$\Rightarrow \triangle ABO_1 \sim \triangle CO_2$  (пр/уг и  $\angle ABO_1 = \angle CO_2$ )

$$\Rightarrow \frac{AB}{BO_1} = \frac{CO_2}{O_2B} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2} \text{ т.к. } AC \text{ — касат. к } \omega_1 \text{ и } \omega_2 \text{ (как сход. тр. изод. \Delta ABO_1)}$$

$$\angle A_1O = A_1O + O_1O_2$$

$$A_1O = O_1O_2 = 8$$

(продолж.)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6 (продолжение)

из  $\triangle ABO_1$  - ир/г (или было сказано)  
по т. Пифагора;

$$AB = \sqrt{AO_1^2 - O_1B^2} = \sqrt{64 - 1} = \sqrt{63}$$

$$\tan \angle BAO_1 = \frac{BO_1}{AB} = \frac{1}{\sqrt{63}} = \frac{\sqrt{3}}{63} = \frac{\sqrt{3}}{3 \cdot 21} = \frac{\sqrt{3}}{21} = \alpha_2 = -\alpha_3$$

$\Rightarrow$  При данных  $a$  можно будет подобрать  $10b$  так, что

линейка  $y$  будет касат. к обеим окр-тям,  
в частности это будет касат. по  $Oy$  2. пересек.

1) 2) 3) 4) и  $Oy$  (на это совсем другая история)

Ответ:  $-\frac{\sqrt{55}}{55}$ ;  $-\frac{\sqrt{7}}{21}$ ;  $\frac{\sqrt{7}}{21}$ ;  $\frac{\sqrt{55}}{55}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

