



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

Рассмотрим наименьшие степени вхождения
в разложение на множители числа $a \cdot b \cdot c$
у чисел 2 и 7.

Обозначим как a_1, b_1 и c_1 степени
вхождения числа 2 в числа a, b, c и a_2, b_2 и c_2 степени вхождения
числа 7 в те же числа, все они
натуральные. Так как при перемножении
степени вхождения числа складываются,
то можно составить систему:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 \geq 15 \\ b_1 + c_1 \geq 17 \\ a_1 + c_1 \geq 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 55 \\ a_1 + b_1 + c_1 \geq 28 \end{cases}$$

Сложно подобрать решение: $a_1 = 10$
 $b_1 = 5$
 $c_1 = 13$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 11 \\ b_2 + c_2 \geq 18 \\ c_2 + a_2 \geq 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 68 \\ a_2 + b_2 + c_2 \geq 34 \end{cases}$$

Так как $a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{N}$, и $c_2 + a_2 \geq 39$, то
 $a_2 + b_2 + c_2 \geq 40$

Сложно подобрать решение:
 $a_2 = 11, b_2 = 1, c_2 = 28$

Тогда мы знаем, что
 $a \cdot b \cdot c : 2^{28} 7^{40}$, а такое минимальное число
равно $2^{28} 7^{40}$

Ответ: $2^{28} 7^{40}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

a и b - взаимнопросты

$$\begin{cases} a+b:m \\ a^2-9ab+b^2:m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b:m \\ (a+b)^2-9ab:m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b:m \\ 9ab:m \end{cases}$$

$$m = \text{НОД}(a+b; 9ab)$$

Поскольку a и b взаимнопросты, то

$$\text{НОД}(a+b; a) = \text{НОД}(a+b; b) = 1, \text{ тогда}$$

$$\text{НОД}(a+b; 9ab) = \text{НОД}(a+b; 9), \quad m \leq 9,$$

пример для $m=9$: $a=4, b=5$

~~Пример~~
Пример подойдёт, так как знаменатель равен
 $16 - 140 + 25 = -99 \neq 0$, неопределённости нет.

Ответ: наибольшее значение $m=9$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

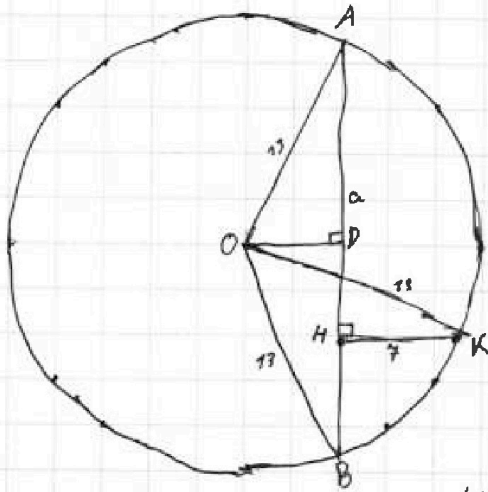
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3



O, K - центры окружностей
 Ω, ω ; $AB = a$ (исканное)
 $KH \perp AB$,
 ω проходит через H по
условию, т.к. ω касается AB .
 $KH = 7$; $OD \perp AB$ на
 AB ; $AH = \frac{27a}{24}$; $HB = \frac{7a}{24}$

Решение:

$AD = BD$, т.к. $OD \perp AB$ на хорду AB ; $AD = \frac{a}{2}$;

$$OD^2 = OA^2 - AD^2 = 13^2 - \frac{a^2}{4}; DH = a - \frac{a}{2} - \frac{7a}{24} = \frac{5a}{24};$$

~~Проведем перпендикуляр $O'H$ на вектор DH ,~~

~~получив O' , тогда $\triangle O'O'K$ - прямоугольный,~~

$$O'H = OD; DH = O'O'; O'O'^2 + O'K^2 = OK^2;$$

$$\left(\frac{5a}{24}\right)^2 + \left(7 + \sqrt{13^2 - \frac{a^2}{4}}\right)^2 = 13^2; ODB: a \leq 26;$$

$$\frac{25a^2}{24^2} + 49 + 14\sqrt{13^2 - \frac{a^2}{4}} + 13^2 - \frac{a^2}{4} = 13^2;$$

$$\frac{25a^2}{36} + 49 - \frac{a^2}{4} = 14\sqrt{13^2 - \frac{a^2}{4}};$$

$$\frac{25a^2}{36} + 49 - \frac{a^2}{4} = 14\sqrt{13^2 - \frac{a^2}{4}};$$

$$-\frac{a^2}{36} + 49 = 14\sqrt{13^2 - \frac{a^2}{4}}; \frac{-a^2}{36} + 49 = \sqrt{13^2 - \frac{a^2}{4}}; a^2 \leq \frac{36 \cdot 7}{17}$$

~~Треугольник ODB прямоугольный; $OD^2 + BD^2 = OB^2$;~~

~~или~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Перенесём O на вектор DN получив O' , тогда
 $\triangle OO'K$ — ~~равносторонний~~ прямоугольный, $O'H = OD$;
 $DN = OO'$, $(OO')^2 + (O'K)^2 = OK^2$;

$$\left(\frac{5a}{24}\right)^2 + \left(7 + \sqrt{13^2 - \frac{a^2}{4}}\right)^2 = 13^2; \quad a \leq 26; \quad b = \frac{a}{4};$$

$$\frac{25a^2}{36} + 49 + 14\sqrt{13^2 - \frac{a^2}{4}} + 13^2 = 169$$

$$\frac{25a^2}{36} + 49 + 14\sqrt{13^2 - \frac{a^2}{4}} + 169 - 169 = 0$$

$$\frac{25a^2}{36} - 4a^2 + 49 = -14\sqrt{13^2 - \frac{a^2}{4}};$$

$$-\frac{77a^2}{36} + 49 = -14\sqrt{13^2 - \frac{a^2}{4}};$$

$$\frac{17a^2}{36} - 7 = 2\sqrt{13^2 - \frac{a^2}{4}}; \quad C = \frac{b}{6}; \quad C = \frac{a}{24};$$

$$17a^2 - 7 = 2\sqrt{13^2 - 24a^2}; \quad C \geq \sqrt{\frac{7}{17}}; \quad \boxed{C^2 \geq \frac{7}{17}}$$

$$289a^4 - 238a^2 + 49 = 26 - 48a^2;$$

$$289a^4 - 190a^2 + 23 = 0; \quad D = 190^2 - 4 \cdot 289 \cdot 23 = 36100 - 26588 =$$

$$C^2 = \frac{190 \pm \sqrt{9572}}{289}; \quad C^2 = \frac{190 + \sqrt{9572}}{289} = 9572;$$

первый случай не удовлетворяет
Поэтому $a = \frac{\sqrt{190 + \sqrt{9572}}}{17} \cdot 24$ об 32.

Ответ: $a = \frac{\sqrt{190 + \sqrt{9572}}}{17} \cdot 24$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №4

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

↓

$$D = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 12;$$

$$D = 9 - 3 \cdot 4 \cdot 7 = -3 < 0 \text{ (значение всегда положительно)}$$

$$x \in \left(\frac{6-2\sqrt{3}}{2 \cdot 3}, \frac{6+2\sqrt{3}}{2 \cdot 3} \right) \Rightarrow x \in \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

ОДЗ

Но так как значение второго корня всегда > 0 ,
то мы можем домножить обе части на
сопряжённое, то есть на $\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1}$;

$$(3x^2-6x+2) - (3x^2+3x+1) = (1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$1-9x = (1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

↓

$$1-9x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1 \Rightarrow y_8 = 3 \cdot \frac{1}{9} - 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{6}$$

$$3x^2-6x+2 \leq 0$$

Проверка, подходит ли $x = \frac{1}{9}$ по
этим условиям

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$$

↓

$$3x^2-6x+2 \leq 0$$

↓

$$3x^2+3x+1 \leq 0;$$

$$x \in \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{6}}{3} \right)$$

$$x^2+x \leq 0; x \in (-1; 0)$$

$$1 - \frac{\sqrt{6}}{3} > 0 \Rightarrow x \in \emptyset$$

Остается единственный
корень $x = \frac{1}{9}$; $\frac{1}{9} < 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$, так как $-\frac{8}{9} < -\frac{\sqrt{3}}{3}$, так как
 $(8)^2 = 64 > 27 = (\sqrt{3} \cdot 3)^2$

Ответ: $x = \frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Возьмём заданную А. Тогда возможные ТМТ
точки В имеют вид прямой с наклоном -2.

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 19$$

Точка А, у которой есть
хотят одна пара В лежит
не выше прямой

$y = -2x + 19$ (подобрал по край-
ней точке А* А(9;0); Все

прямые с наклоном -2 пересе-
кают одинаковое количество
точек В параллелограмме,

т.к. верхняя и нижняя

сторона параллелограмма параллельны оси
Ох, а боковые — прямой $y = -2x$, прямые
с таким наклоном всегда пересекают

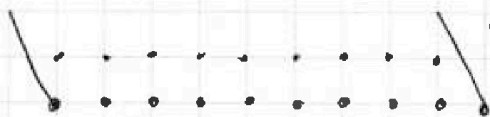
$$\frac{h}{2} + 1 \text{ точек } (h - \text{высота}) = \frac{26}{2} + 1 = 14;$$

Всего параллельных А ~~точек~~

А можно считать на прямых y_2

то при $y_2 \in [2k; 2k+1]$ (тогда, всего параллельных
точек А = $10 + (10-1) = 19$, на $y_2 = 26 \rightarrow 10$ точек;

$$\downarrow 19 \text{ точек } 13 \cdot 19 + 10 = 247 + 10 = 257$$



Для каждой А ровно 13
вариантов В →

$$\text{ответ равен } 13 \cdot 257 = 3341$$

Ответ: 3341

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

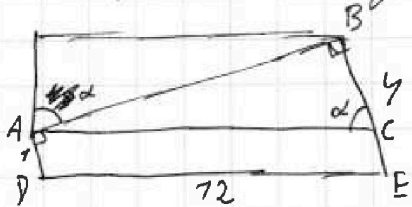
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

и она тоже является ответом системы.

Построим 2 случая (D, E — центры окружностей)

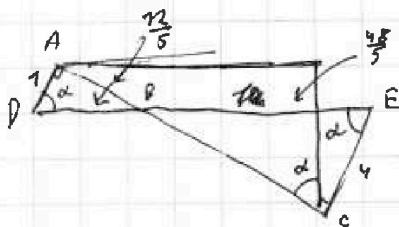


$$\operatorname{tg} \alpha = a$$

$$AB^2 + BC^2 = AC^2; AB^2 + 3^2 = 12^2 + 4^2$$

$$AB = \sqrt{144 - 9} = 3\sqrt{15}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{3\sqrt{15}}{3}$$

$$a = \pm \sqrt{15}$$



$$DB = 12 \cdot \frac{7}{5}; BE = 12 \cdot \frac{4}{5} = \frac{48}{5}$$

$$AB^2 = DB^2 - DA^2 = \frac{144}{25} - 7^2 = \frac{119}{25}$$

$$AB = \frac{\sqrt{119}}{5}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{119}}{5}$$

$$\text{Получаем } a = \left\{ \pm \sqrt{15}; \pm \frac{\sqrt{119}}{5} \right\}$$

$$\text{Ответ: } a = \left\{ \sqrt{15}; -\sqrt{15}; \frac{\sqrt{119}}{5}; -\frac{\sqrt{119}}{5} \right\}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

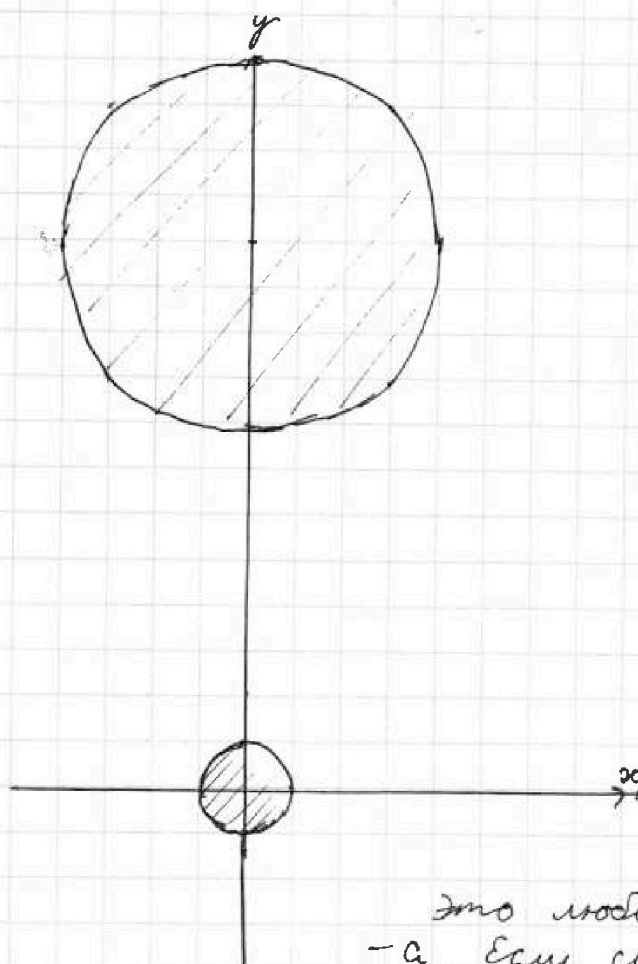
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Реш~~
Задача №6

Рассмотрим выражение $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$,
а точнее фигуры в скобках; первая ось скобки -
формула кругов с координатами $(0; 0)$ и $(0; 12)$
и радиусами $\sqrt{1} = 1$ и $\sqrt{16} = 4$ соответственно.



Круги не пересекаются,
так что мы можем
изобразить началь-
ное выражение
как множество
точек, лежащих
в ~~этих~~ внутри
окружностей и
на окружностях.

Пом. временно
 $ax + y - 8b = 0$ -
формула прямой
~~с уравн~~ $y = -ax + 8b$,
с наклоном $-a$.
П.в.к. b может прини-
мать любые
значения, но

Для заданного a
это любая прямая с углом наклона
 $-a$. Если система имеет 2
решения, то прямая - общая касательная
двух окружностей, ~~как~~ как рисунок
симметричный, но для ответа a и y ~~каждой~~
касательной с углом наклоном $-a$ есть пара -
симметричная касательная с наклоном a ,



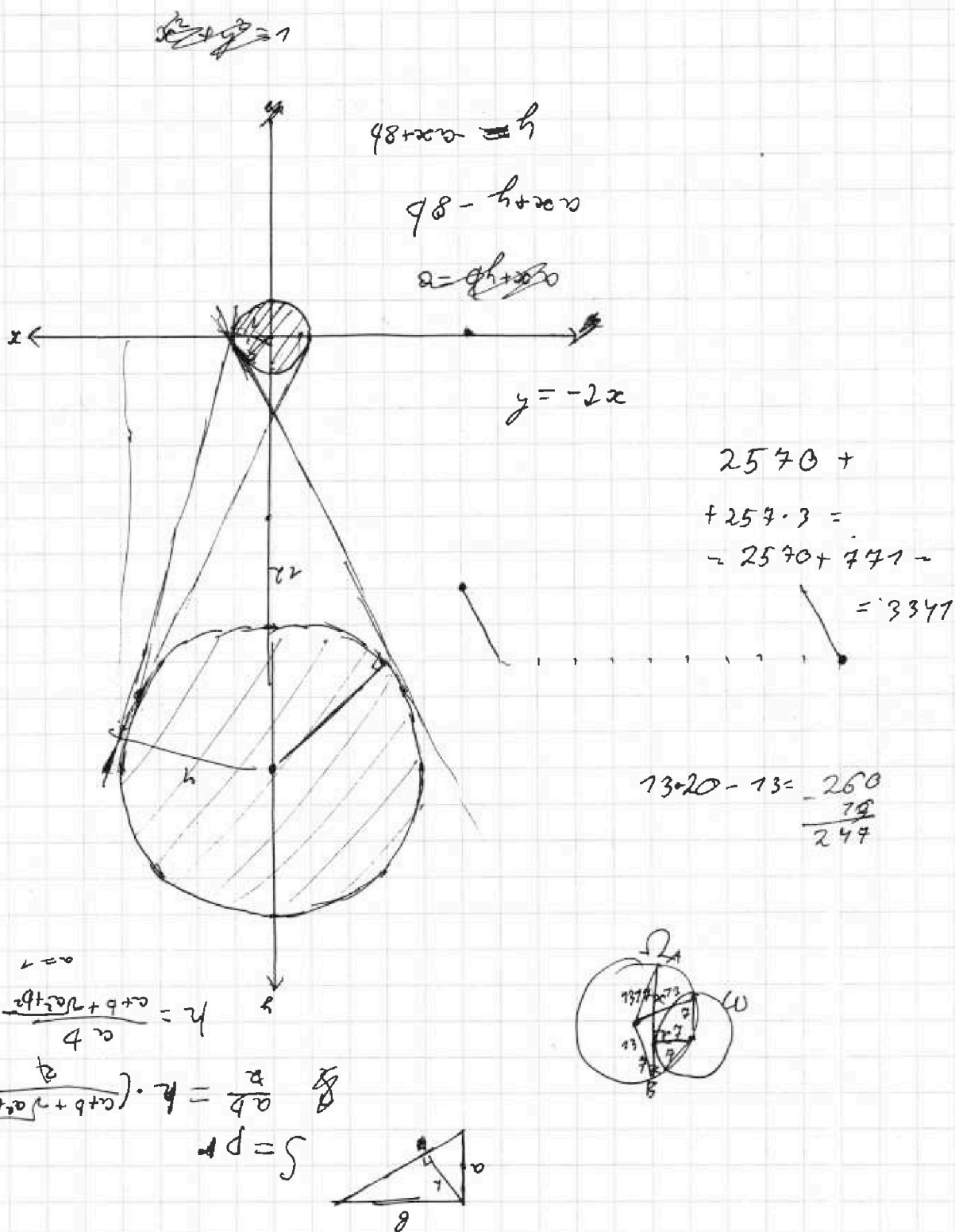
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| ☒ | ☒ | ☒ | ☒ | ☒ | ☒ | ☒ |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^{15} 7^{11}$$

$$bc: 2^{17} 7^{18}$$

$$ac: 2^{23} 7^{39}$$

$$\begin{aligned} a+b &: m \\ a^2+b^2-4ab &: m \\ (a+b)^2-9ab &: m \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \swarrow m=9 \\ & 9ab:m \\ & \searrow a+b:m \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} 10 & 5 \\ \oplus & \oplus \\ a_1+b_1 & \geq 15 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 15 & 13 \\ \oplus & \oplus \\ b_1+c_1 & \geq 17 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 10 & 13 \\ \oplus & \oplus \\ a_1+c_1 & \geq 23 \end{matrix}$$

$$a_1+b_1+c_1=?$$

$$\frac{23+17+25+7}{2} = 28$$

$$a+b+c \leq 27,5$$

$$\begin{aligned} a_1-b_1 &= 6; & b_1 &= 4; & a_1 &= 10,5 \\ a_1+b_1 &= 15; & c_1 &= \end{aligned}$$

$$a_2-b_2=21$$

$$a_2+b_2 \geq 11$$

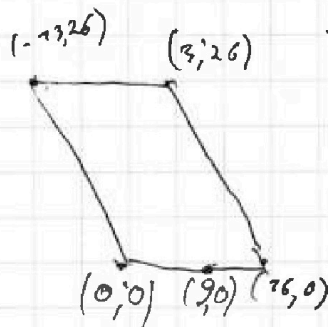
$$a_2+b_2+c_2 \geq 34$$

$$a_2+2b_2+c_2 \geq 29$$

$$c_2+a_2 \geq 39$$

$$3x^2$$

$$\begin{aligned} 3x^2 - 6x + 2 - 3x &= 2 \\ 2(3x^2 - x_1) + y_2 - y_1 &= 184 \end{aligned}$$



$$\begin{array}{r} 19 \\ \times 19 \\ \hline 171 \\ 171 \\ \hline 361 \end{array}$$

$$361$$

$$\begin{array}{r} \times 112 \\ \times 92 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$4756 = 2378 \cdot 2 =$$

$$\begin{array}{r} 2378 \\ \times 2 \\ \hline 4756 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 98 \\ 9 \overline{) 874} \\ \underline{81} \\ 64 \\ \underline{54} \\ 104 \\ \underline{98} \\ 60 \\ \underline{54} \\ 60 \\ \underline{54} \\ 60 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 92 \\ 18 \overline{) 1638} \\ \underline{18} \\ 18 \\ \underline{18} \\ 0 \end{array}$$

Handwritten signature or mark.

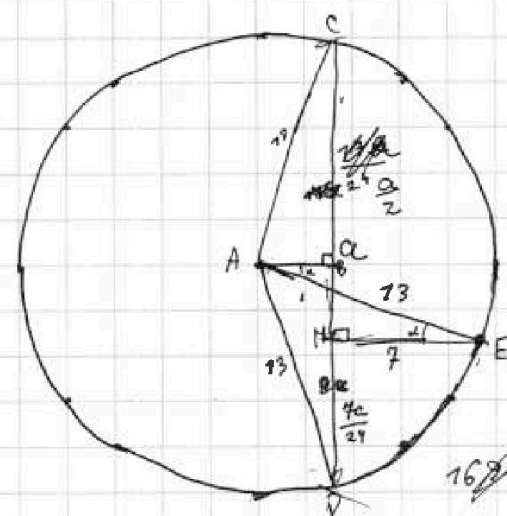
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AB^2 = 13^2 - \left(\frac{17a}{24}\right)^2$$

$$BH = \frac{5}{24}a$$

$$7 + \sqrt{120}$$

$$36 \cdot 4 = 120 + 27 = 147$$

$$25 - 147$$

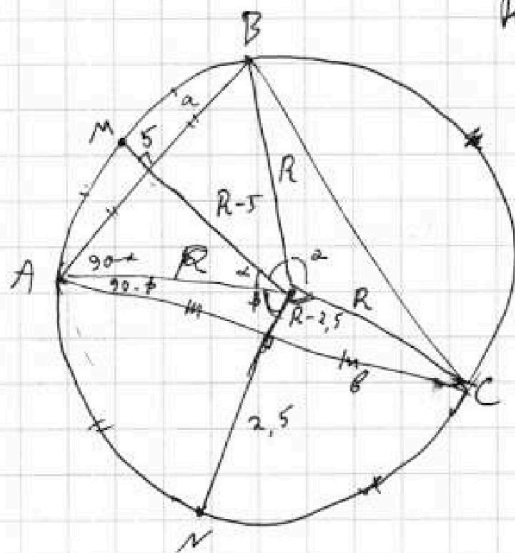
$$\frac{36 \cdot 4}{17}$$

$$OD =$$

$$\left(\sqrt{13^2 - \frac{a^2}{4}}\right)^2 + \left(\frac{a}{7}\right)^2 = 73$$

$$R = \frac{4abc}{S}$$

$$(R-5)^2 + a^2 = R^2$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

