МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A\,(x_1;y_1)$ и $B\,(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$2^{14}7^{10} < 2^{17}7^{17} < \cancel{20}\, 2^{20}7^{37}$

Так как $ac \vdots 2^{20}7^{37}$, то abc не меньше $2^{20}7^{37}$

Если $ab \vdots 2^{14}7^{10}$, $bc \vdots 2^{17}7^{17}$, то $ab^2c \vdots 2^{31}7^{27}$

$ab^2c \vdots 2^{31}$

пусть x_a – степень двойки у числа a, x_b – степень двойки у числа b, x_c – степень двойки у числа c.

Тогда $x_a + 2x_b + x_c \geqslant 31$.

Для наименьшего возможного значения произведения $x_a + 2x_b + x_c = 31$.

Нужно подобрать такие x_a, x_b и x_c так, что $x_a + x_b + x_c$ – минимально.

При этом, так как $ac \vdots 2^{20}$, то $x_a + x_c \geqslant 20$

Рассмотрю следующие варианты. $x_a + x_c$ должно быть нечётным, иначе $x_a + 2x_b + x_c$ – сумма двух чётных чисел, а 31 – нечётное число

$x_a + x_c$	x_b	$x_a + x_b + x_c$
21	5	26
23	4	27
25	3	28
27	2	29
29	1	30
31	0	31

Можно заметить, что минимальная сумма $x_a + x_b + x_c = 26$

Тогда abc не меньше $2^{26}7^{37}$

Приведу пример на $abc = 2^{26}7^{37}$

$a = 2^9 \cdot 7^{20}$
$b = 2^5$
$c = 2^{12} \cdot 7^{17}$

Ответ: $2^{26}7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

То, что $\frac{a}{b}$ несократима, означает то, что у a и b нет общих множителей.

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-8ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$ Пусть можно сократить дробь на x. Тогда $(a+b) \vdots x$; $(a+b)^2-8ab \vdots x$

Так как $(a+b) \vdots x$, то и $(a+b)^2 \vdots x$, тогда $8ab \vdots x$

Пусть в x есть какой-то простой множитель p.

Тогда $(a+b) \vdots p$, $8ab \vdots p$. Есть 3 варианта:

либо $a \vdots p$, либо $b \vdots p$, либо $8 \vdots p$

Первые 2 случая не подходят, так как если $(a+b) \vdots p$, то при $a \vdots p$ $b \vdots p$, а при $b \vdots p$ также $a \vdots p$. Получается, что a и b имеют общий множитель, противоречие.

Следовательно, $8 \vdots p$. Единственное простое число, на которое делится число 8 — это 2. $\Rightarrow p = 2$.

Тогда x — это степень двойки ~~$x=p$~~ $x = 2^n$, $8ab \vdots 2^n$

Понятно, что ни a, ни b не делятся на 2 (доказано ранее), тогда у 8ab максимальная степень двойки 2^3. Значит, максимальное число $x = 2^3 = 8$

Пример: $a = 3$, $b = 5$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{3+5}{3^2-6\cdot3\cdot5+5^2} = \frac{8}{9-90+25} = \frac{8}{34-90} = \frac{8}{-56}$$

$\frac{8}{-56}$ можно сократить на 8 , $\frac{8}{-56} = \frac{1}{-7}$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$

Пусть $y=\sqrt{2x^2-5x+3}$, $t=\sqrt{2x^2+2x+1}$

Тогда $y^2-t^2=2x^2-5x+3-2x^2-2x-1=2-7x$

Тогда $y-t=y^2-t^2$

$y-t=(y-t)(y+t)$

Есть 2 варианта

① $y-t=0$

② $\begin{cases} y-t\neq 0 \\ y+t=1 \end{cases}$

вариант ①

$y=t$

$\sqrt{2x^2-5x+3}=\sqrt{2x^2+2x+1}$

возведу обе части в квадрат

$\begin{cases} 2x^2-5x+3=2x^2+2x+1 \\ 2x^2-5x+3\geq 0 \\ 2x^2+2x+1\geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 7x=2 \\ 2x^2-5x+3\geq 0 \\ 2x^2+2x+1\geq 0 \end{cases}$

$x=\frac{2}{7}$

Если подставить $x=\frac{2}{7}$ в $2x^2+5x+3$ и $2x^2+2x+1$, получатся выражения >0, корень подходит

вариант ②

$y+t=1$

$y=1-t$

$\sqrt{2x^2-5x+3}=1-\sqrt{2x^2+2x+1}$

возведу обе части в квадрат

$\begin{cases} \cancel{2x^2}-5x+3=1-2\sqrt{2x^2+2x+1}+\cancel{2x^2}+2x+1 \\ 2x^2-5x+3\geq 0 \\ 2x^2+2x+1\geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2\sqrt{2x^2+2x+1}=7x-1 \\ 2x^2-5x+3\geq 0 \\ 2x^2+2x+1\geq 0 \end{cases}$

снова возведу обе части в квадрат

$\begin{cases} 4(2x^2+2x+1)=49x^2-14x+1 \\ 2x^2-5x+3\geq 0 \\ 2x^2+2x+1\geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 8x^2+8x+4=49x^2-14x+1 \\ 2x^2-5x+3\geq 0 \\ 2x^2+2x+1\geq 0 \end{cases}$

$41x^2-22x-3=0$

$\cancel{2x^2-5x}$

$D=22^2-4\cdot 41\cdot 3=484-492$

$D<0$, корней нет.

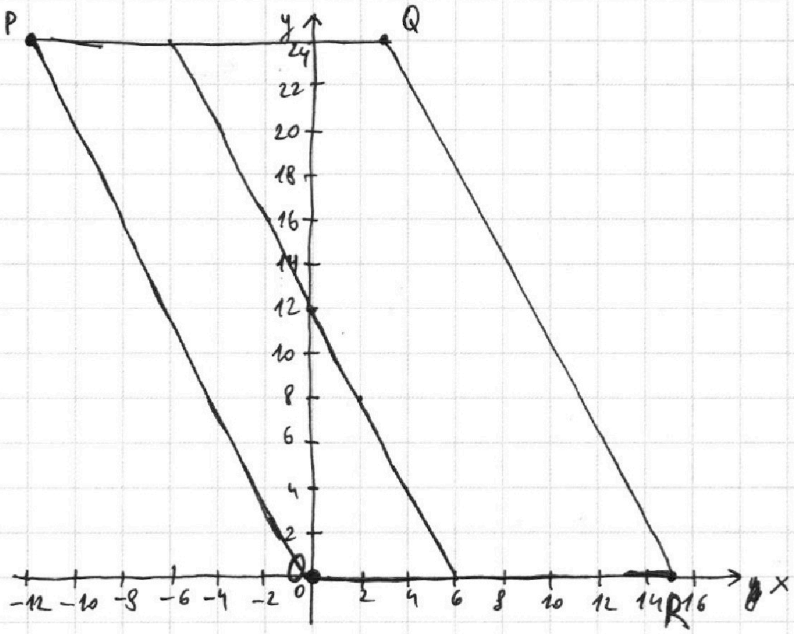
Ответ: $x=\frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть мы зафиксировали точку A

Тогда из уравнения:

$2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$

можно выразить y_2 через x_2.

$y_2=-2x_2+12+(2x_1+y_1)$

Если x_1 и y_1 уже известны, то $2x_1+y_1=\text{const}$.

Тогда для любых координат точки A точки B лежат на прямой с коэффициентом −2 и сдвигом на $12+(2x_1+y_1)$.

Такая прямая для $A(0;0)$ представлена на графике

Пусть прямая RQ и прямая PO описаны функцией $y=kx+b$ найду k, для этого подставлю координаты точек Q и R

$\begin{cases} 24=3k+b \\ 0=15k+b \end{cases}$ вычту из 1 уравнения второе.

$24=-12k$

$k=-2$. Получается, что у прямой для точек B и прямых PO и RQ одинаковый коэффициент

Тогда если точку A перемещать ~~по~~ из точки (0;0) по отрезку PO, то количество точек B для этой точки не изменится, так как эти 2 прямые параллельны. Значит, можно выбрать множество точек A, лежащих на одном ~~прямой~~ отрезке, параллельном PO и для них ~~однозна~~ находить одно и то же множество точек B, лежащих на ~~одной прямой~~ одном отрезке, параллельном PO. Всего на отрезке PO 25 ~~13~~ точек с целочисленными координатами значит, столько точек будет на любом отрезке, параллельном PO и равном ему. Выбрать прямую для точек A — ~~11 вариантов (если $x_1 > 10$)~~, то 10 вариантов (если $x_1 > 9$,
* то прямая для точек B лежит за пределами параллелограмма)

Получается, итоговый ответ — это сколько вариантов выбрать отрезок для точек A умножить на количество точек A на отрезке умножить на количество точек B на соответствующем отрезке

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

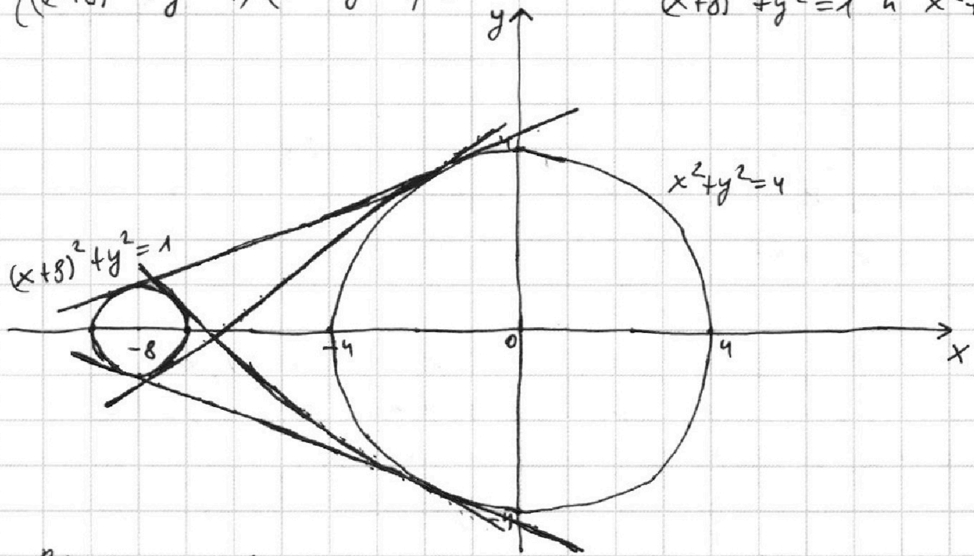
Продолжение задачи 5

Тогда общее количество вариантов — это $10 \cdot 25 \cdot 25 = 6250$

Ответ: 6250

$$\begin{cases} ax-y+10b=0 \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\le 0 \end{cases}$$

Изображу графики ~~функций~~ уравнений $(x+8)^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=4$



Выражение ≤ 0 если либо $((x+8)^2+y^2-1)\le 0$ и $(x^2+y^2-4)\ge 0$, либо $((x+8)^2+y^2-1)\ge 0$ и $x^2+y^2-4\le 0$

В первом случае на графике $((x+8)^2+y^2-1)\le 0$ — область внутри маленького круга, $(x^2+y^2-4)\ge 0$ — область вне большого круга. Пересечение этих областей — область внутри маленького круга вместе с границами.

Во втором случае на графике $((x+8)^2+y^2-1)\ge 0$ — область вне маленького круга, $(x^2+y^2-4)\le 0$ — область внутри большого круга. Пересечение этих областей — область внутри большого круга вместе с границами.

Уравнение $y=ax+10b$ имеет график прямой. Чтобы система имела ровно 2 решения, прямая не должна проходить через окружности (все точки внутри окружностей удовлетворяют неравенству. Значит, прямая должна касаться двух окружностей, в таком случае будет ровно 2 решения.

Нужно подобрать a, то есть угол наклона прямой.

Максимальный и минимальный углы наклона представлены на графике.

Всего есть 4 варианта, как прямая может касаться двух окружностей $\Rightarrow$ 4 решения

Для касательных, которые проходят сверху и снизу для точек касания: $x_1+x_2=8$ (8 — расстояние между ~~координатами~~ ~~центрами~~ центрами окружностей)

~~$y_1+y_2=$~~

$y_1-y_2=3$ (3 — разница радиусов окружностей)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6 (продолжение)

Тогда $\begin{cases} x_1+x_2=8 \Rightarrow x_2=8-x_1 \\ 1-(x_1+8)^2-(4-x_2^2)=3 \end{cases}$

$1-x_1^2-16x_1-64-16+8x_2-x_2^2=3$

$x_1^2+x_2^2+16x_1-8x_2=-82$

$x_1^2+(8-x_1)^2+16x_1+8x_1-64=-82$

$x_1^2+\cancel{64}-\cancel{16x_1}+x_1^2+\cancel{16x_1}+8x_1-\cancel{64}=-82$

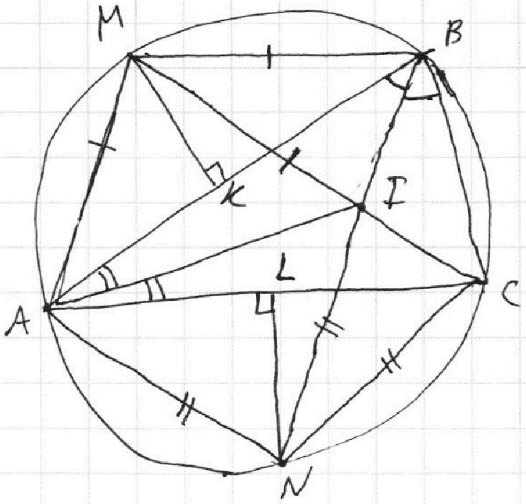
$2x_1^2+8x_1+82=0 \quad |:2$

$x_1^2+4x_1+41=0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть I – центр вписанной окружности.

Отрезки, стягивающие равные дуги, равны
$\Rightarrow AM = MB$, $AN = NC$.

По лемме о трезубце

$AM = MB = MI$

$AN = NI = NC$

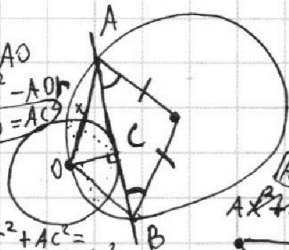
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$AC^2 = AX\cdot t$
$(AO-r)AO$
$AC^2 = AO^2 - AOr$
$AO^2 - AO = AC^2$



$AC:CB = 7$

$AC^2 = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$

$AX(AX+2r)$ Если $a:x$

$AX^2 + 2AX = AC^2$ $(a+b):x$, но $b:x$

$AX^2+2AX+1 = AC^2+1$ $(3, 24)$ $BO^2 = BC^2+1$

$AO^2 = BC^2+1$

$AO^2 = r^2 + AC^2 = 1 + AC^2$

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$

$5+3=8$
$25+9-90 =$
$= 34-90 =$
$= -56$

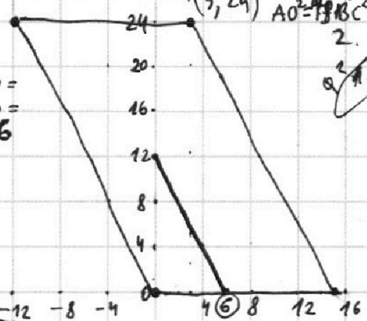
$D = \ldots = 4(3a+1)(3a+1)$

$a^2 - (6b)a + b^2$
$D = 36b^2 - 4b^2$
$D = 32b^2 = 16\cdot 2b^2$

$a_1 = \frac{6b+4b\sqrt2}{2} = 3b + 2\sqrt2 b$
$a_2 = \frac{6b-4b\sqrt2}{2} = 3b - 2\sqrt2 b$

$a^2 - 6ab + b^2 = (a - (3+2\sqrt2)b)(a - (3b - 2\sqrt2)b)$

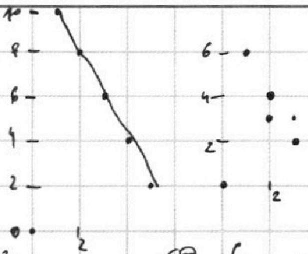
Если a – нечет и b – нечет, то $a+b$ – чет.
$a^2 - 6ab + b^2$ – чет – неразложим $\Rightarrow$ $a+b$ делится на 2



$15,0$

2.
$a^2 - 6ab + b^2 = 2ab$
$a^2 + b^2 + 2ab \ne 0$
$2+3=5$
$4+9-36 =$
$= 13-36 = 23$
$3+4 = 10$
$9+49-126 =$
$= 58-126 =$
$= -68$

$5\cdot AC + 5\cdot BC = (AC+BC)\cdot$



$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$
13:00
URGENT

$y_2 = -2x_2 + 12$
$+(y_1 + 2x_1)$ const

(5) Если одна точка зафиксирована, по другой – прямая

$25 \times 25 = 125, 50$

$24 = 3k + b$
$0 = 15k + b$
$24 = -12k$
$k = -2$ $b = 30$

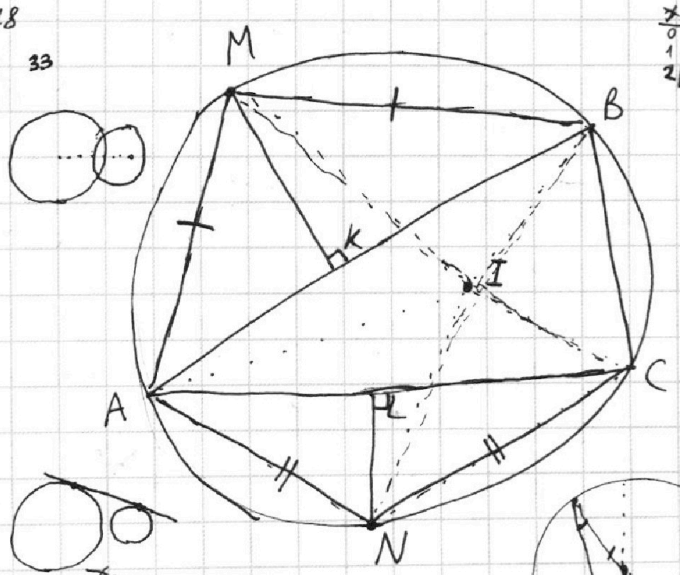
одинаковые углы наклона!

$15-5 = 10$ – кол-во линий всего
12 – кол-во x-ов всего
$12\cdot 10 = 120$ $12:10$ определить

x	x^2
0	0
1	1
2	1

18

12 33
15
6



найти расстояние от A до центра окружности вписанной в $\triangle ABC$
расстояние от M – 4,5
от N – 2

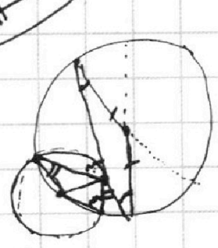
$MK = 4,5$

$NL = 2$

Найти AI
лемма о трезубце

$\cancel{\frac{AB\cdot MK}{2} = \frac12 AM\cdot AB\cdot \sin\angle MAK}$

$\cancel{\frac{AB\cdot MK}{2} + \frac{AB\cdot r}{2} = \frac12 AM\cdot AL \cdot \sin(\angle MAK+}$



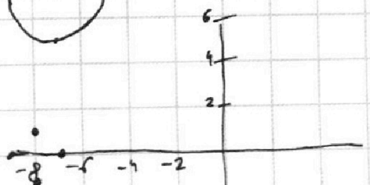
$x^2 + y^2 - 4$ $y = ax + 10b$

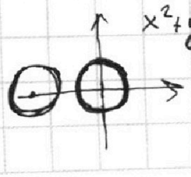
$x^2 + 16x + 64 + y^2 - 1$

(1) < (2)
$16x + 67$ вариантов

(2) > (1)
$-16x - 67$ вариантов

$x^2 + y^2 = 4$ $(x+8)^2 + y^2 = 1$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1. $ab : 2^{14} 7^{10}$ $\quad 2^{14} 7^{10} < 2^{17} 7^{17} < 2^{20} 7^{37}$ $\quad$ 10:50! $\quad$ 11:20 $\quad$ 12:00

$bc : 2^{17} 7^{17}$ $\quad$ ~~abc ⟶~~ $2^{20} 7^{37}$

abc не меньше $\quad a b^2 c : 2^{31} 7^{27}$

$ac : 2^{20} 7^{37}$ $\quad ac : 2^{20}$ $\quad 2^{31} = 2^x \cdot 2^{2y}$

1 ✓

2 $\quad$ 2. $\dfrac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \dfrac{a+b}{a^2+2ab+b^2-8ab} = \dfrac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$ $\quad x+2y=31$

3 $\quad 2x+y$ - min

4 ✓ $\quad$ 21 5 $\quad$ 25 3

23 4 min

~~19 6~~

5 $\quad a : b$ д.б. взаимно просты. $\quad$ пример:

6 $\quad a = 2^{~~19~~} \cdot 7^{20}$

7 $\quad$ ~~m~~ ~~a+b~~

$m \leq \min(a+b,\ a^2-6ab+b^2)$ $\quad b = 2^5$

$8ab : a+b$? $\quad c = 2^{~~10~~\,12} \cdot 7^{17}$

4. $\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$ $\quad$ | в квадрат

$x_1+x_2 = \frac{5}{2}$ $\quad x_1+x_2=-1$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{2}$ $\quad x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}$ $\quad 2x^2-5x+3+2x^2+2x+1$

$x_1 = 1;\ x_2 = \frac{3}{2}$ $\quad D = 4-8<0$

$2(x-1)(x-\frac{3}{2})$ $\quad \cancel{2x^2+2}$ $\quad -2\sqrt{2x^2-5x+3}\sqrt{2x^2+2x+1} = 4+49x^2-24x$

$2x(x+1)+1$

$2x^2-2x$ $\quad 4x^2-3x+4 - \ldots\ldots = 4+49x^2-24x$

$-3x+3$ $\quad -2\ldots\ldots = 45x^2-21x$ $\quad$ | в квадрат

$(x-1)(2x-3)$

$4(x-1)(2x-3)(2x^2+2x+1) = 45^2x^4+21^2x^2-45\cdot2\cdot21x^3$

+ − +

1 $\quad \frac{3}{2}$ $\quad x=1,\ \sqrt{2-5+3}-\sqrt{2+2+1} \neq 2-7$

~~x=0~~ $\quad (2x^2-5x+3)-(2x^2+2x+1) = 2-7x$

$x_1 = \sqrt{2x^2-5x+3}$

$y_1 = \sqrt{2x^2+2x+1}$ $\quad x_1-y_1 = x_1^2-y_1^2$

$x_1-y_1 = (x_1-y_1)(x_1+y_1)$

$-5x+3 = 1-\bullet$

$+2x+1$ $\quad x6\ -\frac{1}{2}$

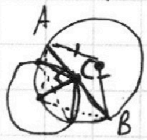
① $x_1-y_1=0$ $\quad AC : CB = 7$

$-7x+3 = 2-\bullet$ $\quad$ ② $x_1+y_1=1$ $\quad R(\omega)=1$

$-7x+1 = -\bullet$ $\quad R(\Omega)=5$

$\bullet = 7x-1$ $\quad$ ① $2x^2-5x+3 = 2x^2+2x+1$ $\quad AB$ - ?

$7x=2;\ x=\frac{2}{7}$



$$\begin{array}{r} 22 \\ \times\, 22 \\ \hline 44 \\ +\,44 \\ \hline 484 \end{array}$$

② $x_1+y_1=1$

$2x^2-5x+3 = 1+(2x^2+2x+1)-2\sqrt{2x^2+2x+1}$

$-5x+3 = 2+2x$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\, 41 \\ \hline 12 \\ +\,48 \\ \hline 492 \end{array}$$

~~3x-1~~ $\quad 7x-1 = 2\sqrt{2x^2+2x+1}$

6. $\quad 49x^2+1-14x = 4(2x^2+2x+1)$

$y = ax+10b$ $\quad 49x^2+1-14x = 8x^2+8x+4$

$41x^2-22x-3=0$

$x_1+x_2 = \frac{22}{41}$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{-3}{41}$