



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Печка QR-кода недопустима!

МФТИ

и 1

Посмотрим на степени 7:

Т.к. $11 + 18 < 39$, то 11 и 18 не являются

обе минимальными, на которое делится.

Тогда сумма степеней хотя бы 39.

Пусть $\deg_7(a) = 18$; $\deg_7(b) = 11$; $\deg_7(c) = 20$.

Тогда $\deg_7(ab) = 19 \geq 11$; $\deg_7(bc) = 20 \geq 18$;

$\deg_7(ac) = 39 \geq 39$.

Посмотрим на степени 2:

Пусть $\deg_2(a) = x$; $\deg_2(b) = y$; $\deg_2(c) = z$.

Тогда:

$x + y \geq 15$; $y + z \geq 17$; $z + x \geq 23$.

Тогда $2(x + y + z) \geq 55$

$x + y + z \geq \left\lceil \frac{55}{2} \right\rceil = 28$

Пусть $x = 10$; $y = 5$; $z = 13$:

Тогда: $\deg_2(ab) = 15 \geq 15$; $\deg_2(bc) = 18 \geq 17$,

$\deg_2(ac) = 23 \geq 23$.

Ответ:

Тогда произведение минимал: $2^{28} \cdot 7^{39}$. Это выполняется, так как

если представить $a = 2^{10} \cdot 7^{18}$; $b = 2^5 \cdot 7^{11}$; $c = 2^{13} \cdot 7^{20}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порука QR-кода недопустима!

№ 2

Т.к. $\frac{a}{b}$ несократима, то $\text{НОД}(a, b) = 1 \Rightarrow$

пусть p — делитель $a+b$. Тогда он не является
ни делителем a , ни делителем b (иначе

можно умалить общности $a:p, b:p \Rightarrow$

$$\Rightarrow a+b = \overset{a}{p}d + \overset{b}{p}nd = p(d+nd) = p \cdot r, \quad r \in \mathbb{Z}$$

Тогда запишем $a+b = pr$.

Тогда $a^2 + 2ab + b^2 = pr^2$.

$$a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = pr^2$$

$$(a+b)^2 - 2ab = pr^2$$

$$pr^2 - 2ab = pr^2$$

$$p(pr^2 - k) = 2ab : p. \quad a \not\equiv p, b \not\equiv p \Rightarrow 2 : p.$$

Значит $p = 2$. Также возможен вариант

$m = 9$, т.к. a и $b \not\equiv 3$, 9 подходит. Пример:

$$a = 1; b = 8 : \quad \frac{1+8}{1+2 \cdot 8 \cdot 1 - 8^2} = \frac{9}{1-56+64} = \frac{9}{9} = 1.$$

Ответ: $m = 9$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



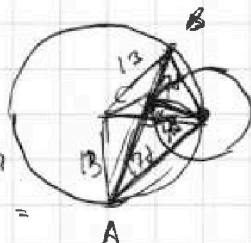
$$11 + 18 + 39 = 2(a+b+c)$$

4 7

$$a+b+c = 34$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{km}{nm}$$

$$\sqrt{49d^2+49} =$$



$$\text{НОД}(a,b)=1 \quad a \times p \quad b \times p$$

$$a+b = pk$$

$$a^2-7ab+b^2 = pq$$

$$(a+b)^2-9ab = pq$$

$$pk-9ab = pq$$

$$9ab = p(k-q)$$

$$\frac{1+2}{1-14+4} = \frac{3}{9}$$

$$3x^2-6x+2 > 0$$

$$3x^2+3x+1 > 0$$

$$49d^2+49 =$$

$$= 13^2+13^2-2 \cdot 13^2 \cos p \rightarrow 3$$

$$17d^2+49 =$$

$$= 13^2+13^2-2 \cdot 13^2 \cos p$$

$$3x^2-6x+2+3x^2+3x+1-2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)} = 81x^2-18x+1$$

$$6x^2-3x+2-2\sqrt{} = 81x^2-18x$$

$$-2\sqrt{} = 75x^2-15x+2$$

$$4(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1) = (75x^2-15x+2)^2$$

$$4(9x^4+9x^3+3x^2-18x^3-18x^2-6x+6x^2+6x+2) =$$

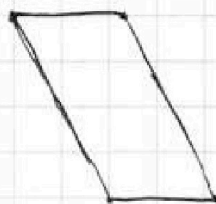
$$= (75^2x^4 - 2 \cdot 75 \cdot 15x^3 + 2 \cdot 2 \cdot 75x^2 + 15^2x^2 - 2 \cdot 2 \cdot 15x + 4)$$

$$4(9x^4 - 9x^3 - 9x^2 + 2) = 75^2x^4 - 30 \cdot 75x^3 + 4 \cdot 75x^2 + 15^2x^2 - 4 \cdot 15x + 4$$

$$0 = x^4(75^2-36) - x^3(30 \cdot 75-36) + x^2(15^2+4 \cdot 75+36) - 4 \cdot 15x - 4$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{r} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 7 \\ 7 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{array}$$

$$(-13, 26) \quad (3, 26)$$



$$(0, 0) \quad (16, 0)$$

$$\frac{1+8}{1-78+84} = \frac{9}{19} = 1 \quad \frac{64}{8}$$

$$\begin{cases} 49d^2+49 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cos \alpha \\ 17d^2+49 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cos \beta \\ 34d^2 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cos(\alpha+\beta) \end{cases}$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{49(1+d^2)}{2 \cdot 13^2}$$

$$\cos \beta = 1 - \frac{49+17d^2}{2 \cdot 13^2}$$

$$34d^2 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 (\cos \alpha \cos \beta) - \sin \alpha \sin \beta$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

н 5

Наш параллелограмм имеет сторону, паралл
 Ox , и сторону, паралл $y = -2x$.

Отсюда пусть $y_1 = y_2 \Rightarrow x_2 - x_1 = 7$.

$\Rightarrow$ на одной прямой возможно взять 10 или
9 точек (в зависимости от количества
расположенных на прямой точек}; 14 по 10

(13 по 9). Если $y_1 = y_2 + 2$, то $x_2 - x_1 = 8$.

Также на варианты расположить вдоль эти точки
паралл переносом вдоль $\perp$ прямой: 10 или 9
(13 по 10, 12 по 9). Тогда ~~далее~~ заметим,

что при увелич $y_1 - y_2$, мы передвигаемся
вдоль стороны $\parallel y = -2x$. $\Rightarrow$ на каждую гориз.

выборе т.А кол-во вариантов будет одинаково.

$\Rightarrow$ таких случаев: $10 \frac{14 \cdot 15}{2} + 9 \frac{13 \cdot 14}{2} = 2385$

Также есть случаи, когда $y_2 \geq y_1$.

Тогда мы двигаемся уже вдоль прямой $k = 2x$
(при изм разн. y_1 и y_2).

А значит, каждый раз кол-во вариантов паралл.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

переноса по горизонтали увеличивается
на 2. (также присутствуют "нечётные" строки,
где число целоч. т. на 1 меньше, самих
строк также на 1 меньше).

Тогда число ^{таких} расстановок будет:

$$13 \cdot 12 + 12 \cdot 11 + 12 \cdot 14 + 11 \cdot 13 + 11 \cdot 16 + 10 \cdot 15$$

$$13 \cdot 12 + 12 \cdot 25 + 11 \cdot 29 + 10 \cdot 15 = 925$$

$$\text{Тогда всего перестановок} \quad 2389 + 925 = \\ = 3314$$

Ответ: 3314 пар.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

№ 6

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 + 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

Чтобы выполнялось неравенство возможны 2 случая:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 \leq 0 \end{cases}$$

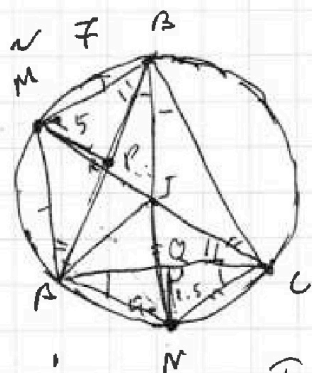
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\angle BAC = 2\gamma$
Пусть $\angle ABC = 2\beta$, $\angle ACB = 2\gamma$, I - центр
впис. окр.
 P - середина AB , Q - середина AC .

Тогда: $\angle NAC = \angle ABN = \angle NBC = \angle ACM = \beta$;
 $\angle MAB = \angle ACM = \angle MCB = 2\angle MBA = \gamma$

Тогда по лемме о трезубце:

$AN = NC = IN$; $AM = MB = MI$. $\angle ANB = 2\gamma$ (опор
на дугу AB).

$AN = 2.5 / \sin 2\beta$. $\angle IAN = \beta + \gamma = 90^\circ$

$\Rightarrow$ по т. синусов: $\frac{AI}{\sin 2\beta} = \frac{AN}{\sin 90^\circ}$. $AI = AN \cdot \frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta}$.

$AN = \frac{2.5}{\sin \beta} \Rightarrow AI = \frac{2.5 \cdot \sin 2\beta}{\sin 2\beta \cos 2\beta} = 5 \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\beta}$. Аналогично

$AI = 10 \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\beta} \Rightarrow 5 \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\beta} = 10 \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\beta} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\beta} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{AC}{\sin 2\beta} = \frac{AB}{\sin 2\beta} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \sqrt{2}$.

Т.к. $AN = NI$, $AM = MI$, то $AMIN$ - ромб $\Rightarrow$

$\Rightarrow AI \perp MN$. Также MN - середн. к AI

$\Rightarrow 2AN \cdot \sin \gamma = AI = 2AM \cdot \sin \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2.5 \sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{5 \sin \beta}{\sin \gamma} \Rightarrow \sin^2 \gamma = 2 \sin^2 \beta \Rightarrow \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow MB = MA = \sqrt{2} AN = \sqrt{2} NC$.

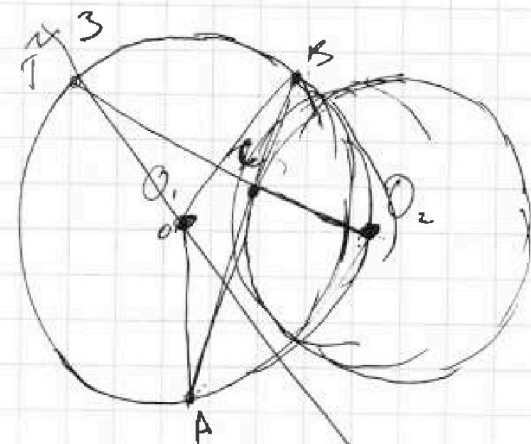
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порука QR-кода недопустима!



Пусть O_1 и O_2 — центры
окружностей Ω и ω соотв.

Пусть T — ^{второе} пересечение
прямой O_2C с Ω .

Тогда заметим, что

ровно одна точка C на ω удовлетворяет
равенству $AC/BC = \frac{17}{7}$. ^{по дискр. непрерывности*} Докажем, что нам
подходит T . C , такая, что $CT = 17$.

Тогда степ. T к ω отк $\Omega = -7 \cdot 17 = -x^2 - 17x \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow AC = 17, BC = 7$. Докажем, что

$\angle ACO_2 \neq 90^\circ$ (тогда AB касательная).

$AO_2 = \sqrt{AO_1^2 + O_1O_2^2} = 13\sqrt{2} = \sqrt{17^2 + 7^2} = \sqrt{338} = \sqrt{2 \cdot 169} =$
 $= 13\sqrt{2}$. Значит, по т. ^{косинусов} $\angle ACO_2 = 90^\circ$ ($\cos = 1$) $AC \perp CO_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow AB$ касательная к ω . А т.к. T подходит

и она единственная, то $AB = AC + BC = 24$.

Ответ: 24

* если мы загопим T А близко к T пересек Ω и ω ,
при увелич $\angle O_1O_2A$

то $\frac{AC}{BC} \rightarrow 0$ если T В то $\frac{AC}{BC} \rightarrow \infty$. Функция $\frac{AC}{BC}$ непрерывна.
 $\frac{AC}{BC}$ растёт. (а функции $\frac{AC}{BC}$ — непрерывна).

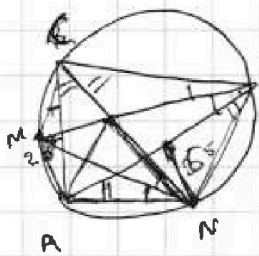
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{5}{\sin \alpha} \cdot \sin \beta = \frac{2.5 \cdot \sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$2 = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2(x_2 - x_1) + \frac{y_2 - y_1}{2} = 14$$

16
14 · 10
13 · 9
13 · 12
13 · 10
12 · 9

$$10 \frac{14 \cdot 15}{2} + 9 \frac{13 \cdot 14}{2}$$

13 · 12
+ 12 · 11
+ 12 · 14
+ 11 · 13
+ 11 · 16
+ 10 · 15

38
× 12
76
+ 38
456
+ 319
775
+ 150
925

29
+ 11
29
+ 29
319

$$150 \cdot 4 + 7 \cdot 9 \cdot 13$$

$$150 + 117 =$$

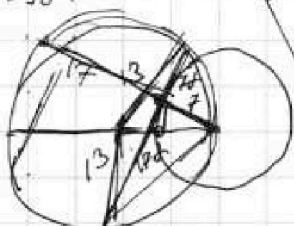
117
× 267
7
+ 23189
925
3319

$$49^2 + 17^2 = 2 \cdot 13^2$$

$$49 + 119 = \frac{288}{13}$$

$$7 \cdot 17 = 13^2 - l^2$$

$$l^2 = 169 - 119 = 50$$



17
× 17
119
+ 289
408

17
× 17
119
+ 289
408

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

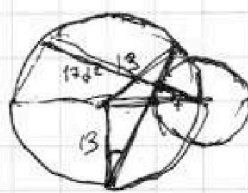
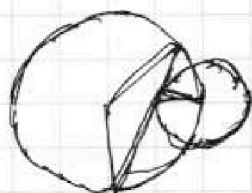
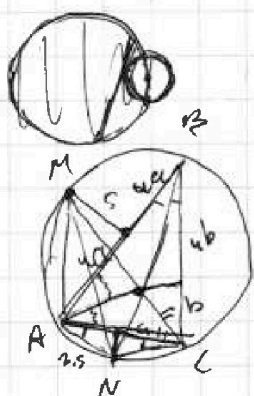
МФТИ



$$24^2 x^2 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \left(\frac{2 \cdot 13^2 - 49 - 49x^2}{2 \cdot 13^2} \cdot \frac{2 \cdot 13^2 - 49 - 17^2 x^2}{2 \cdot 13^2} - \sqrt{\left(1 - \left(\frac{2 \cdot 13^2 - 49 - 49x^2}{2 \cdot 13^2}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{2 \cdot 13^2 - 49 - 17^2 x^2}{2 \cdot 13^2}\right)^2\right)} \right) \quad \cos \beta = \frac{\cos \gamma}{2 - \cos \gamma}$$

$$24^2 x^2 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \left(\frac{2 \cdot 13^2 - 49 - 49x^2}{2 \cdot 13^2} \cdot \frac{2 \cdot 13^2 - 49 - 17^2 x^2}{2 \cdot 13^2} - \sqrt{\frac{4 \cdot 13^4 - (2 \cdot 13^2 - 49 - 49x^2)^2}{2 \cdot 13^4} \cdot \frac{4 \cdot 13^4 - (2 \cdot 13^2 - 49 - 17^2 x^2)^2}{2 \cdot 13^4}} \right) \quad 13 + 6 = 19$$

$$2 \cdot 13^2 \cdot 24^2 x^2 = 4 \cdot 13^4 - (2 \cdot 13^2 - 49 - 49x^2) (2 \cdot 13^2 - 49 - 17^2 x^2) - \sqrt{(4 \cdot 13^4 - (2 \cdot 13^2 - 49 - 49x^2)^2) (4 \cdot 13^4 - (2 \cdot 13^2 - 49 - 17^2 x^2)^2)}$$



$$7 \cdot 17 = 7 \cdot 13$$

$$17x^2 = y$$

$$7 \cdot 17 = 7 \cdot 13$$

$$x = 17x^2$$

$$AN' = \frac{AC}{2 \cos \beta}$$

$$AB = \frac{10 \cos \beta}{\sin \beta}$$

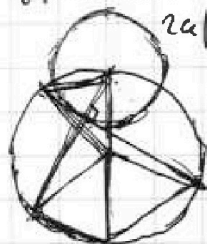
$$AN = \frac{2 \cdot 5}{\sin \beta}$$

$$AM = \frac{AB}{2 \cos \beta} = \frac{5}{\sin \beta}$$

$$\frac{AC}{2 \cos \beta} = \frac{2 \cdot 5}{\sin \beta}$$

$$\frac{AI}{\sin \beta} = \frac{AM}{\sin \beta} = \frac{AM}{\cos \beta} = \frac{AB}{2 \cos \beta \cos \beta}$$

$$AI = \frac{AB \sin \beta}{2 \cos \beta \cos \beta} = \frac{10 \cdot \sin \beta}{2 \cos \beta \cos \beta} = \frac{10 \sin \beta \cos \beta}{\cos \beta \cos \beta} = 10 \frac{\cos \beta}{\cos \beta} = 5 \frac{\cos \beta}{\cos \beta}$$



$$AC = \frac{5}{\sin \beta}$$

$$AB = \frac{10}{\sin \beta}$$

$$7 + 17^2$$

$$\frac{AI}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin \beta} = AB \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = 10 \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$$

$$\frac{\cos \beta}{\cos \beta} = 10 \frac{1 - \cos^2 \beta}{1 - \cos^2 \beta} \quad 2(\cos^2 \beta - \cos^2 \beta \cos \beta) = 2(\cos^2 \beta - \cos^2 \beta \cos \beta)$$

$$\cos^2 \beta = 2 \cos^2 \beta - \cos^2 \beta \cos \beta$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

☐ 1
 ☐ 2
 ☐ 3
 ☐ 4
 ☐ 5
 ☐ 6
 ☐ 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!



$$\sqrt{(x-1)(3x-2)} - x - \sqrt{(x+1)(3x+1)} - x = 1 - 8x$$

15 17 23

$$a+b \geq 15$$

$$b+c \geq 17$$

$$c+a \geq 23$$

$$a+b+c \geq \frac{15+17+23}{2} = \frac{55}{2} = 27.5$$

10 5

$$\frac{11+18+39}{2} =$$

$$CP(CP+5) = AC \cdot CB$$

$$BQ(BQ+2.5) = \frac{AB \cdot CB}{AC \cdot 2}$$

$$\sqrt{2} \cdot CP(CP+5) = BQ(BQ+2.5)$$

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

$$\frac{ax+y}{8}$$

$$x^4 + x^2(y^2-12)^2 - 16x^2 + x^2y^2 + y^2(y-12)^2 - 16y^2$$

$$-x^2 - (y-12)^2 + 16 \leq 0$$

$$x^2 + x^2y^2 - 24yx^2 + 144x^2$$

$$x^2 + 1 \leq 0$$

$$x^2 + (y-12)^2 - 16 \geq 0$$

$$x^2 + y^2 - 24y + 144 - 16 \geq 0$$

$$x^2 + y^2 - 24y + 128 \geq 0$$

$$24y \leq 128$$

$$y \leq \frac{128}{24} = \frac{32}{3}$$

$$y \leq 1$$

$$x^2 + y^2 - 1 \geq 0$$

$$x^2 + (y-12)^2 - 16 \leq 0$$

$$x^2 + y^2 - 24y + 144 - 16 \leq 0$$

$$24y \geq 128$$

$$y \geq \frac{128}{24} = \frac{32}{3}$$