



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2.

Пусть $ab = k \cdot 2^{19} \cdot 7^{10}$; $bc = l \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}$; $ac = m \cdot 2^{20} \cdot 7^{27}$, где k, l, m — натуральные числа (это возможно по условию делимости и $a, b, c \in \mathbb{N}$)

$$\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 = klm \cdot 2^{19+17+20} \cdot 7^{10+17+27} = 2^{56} \cdot 7^{54} \cdot klm$$

но т.к. это $(abc)^2$, то степени в разложении должны быть четными $\Rightarrow klm : 2 \Rightarrow klm \geq 2$.

$$\Rightarrow (abc)^2 : 2^{56} \cdot 7^{54} \cdot 2 = 2^{52} \cdot 7^{54}$$

$$\Rightarrow abc : 2^{26} \cdot 7^{27} \text{ делится. Но } abc : ab : 7^{27}$$

$$\Rightarrow abc : 2^{26}, abc : 7^{27} \Rightarrow abc : 2^{26} \cdot 7^{27} \Rightarrow abc \geq 2^{26} \cdot 7^{27} \text{, т.к. и взаимнопросты}$$

Пример: $a = 2^8 \cdot 7^{20}$, $b = 2^6$, $c = 2^{12} \cdot 7^{17}$

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{27}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2.

$\text{НОД}(a, b) = 1$ по условию.

Пусть $\begin{cases} (a+b):m \\ (a^2-6ab+b^2):m \end{cases}$, т.е. дробь $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$ сократима на m .

$$a^2-6ab+b^2 = ((a+b)^2 - 8ab) : m \quad \text{и} \quad (a+b):m \Rightarrow (a+b)^2:m \Rightarrow 8ab:m$$

Пусть $\text{НОД}(a, m) = d_1$, $\text{НОД}(b, m) = d_2$, $a = d_1 \cdot a_1$, $b = d_2 \cdot a_2$.

Примем, очевидно $(a, d_2) = (b, d_1) = 1$, иначе не выполняется $(a, b) = 1$.

По предположению $\begin{matrix} a+b:m \\ \uparrow \\ d_1 \end{matrix} \begin{matrix} :d_1 \\ \uparrow \\ d_1 \end{matrix} \Rightarrow b:d_1$. Однако $\text{НОД}(b, d_1) = 1$ по
возможности только при $d_1 = 1$.

Аналогично $b, m:d_2 \Rightarrow a:d_2 \Rightarrow d_2 = 1$

$\Rightarrow 8ab:m$, где a и b взаимнопросты с $m \Rightarrow 8:m \Rightarrow m \leq 8$. — оценка.

Пример: $a=3, b=5 \Rightarrow$ дробь имеет вид $\frac{3+5}{9-6 \cdot 3 \cdot 5+25} = \frac{8:2}{-56} = -\frac{1}{7}$

Ответ: при $m=8$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

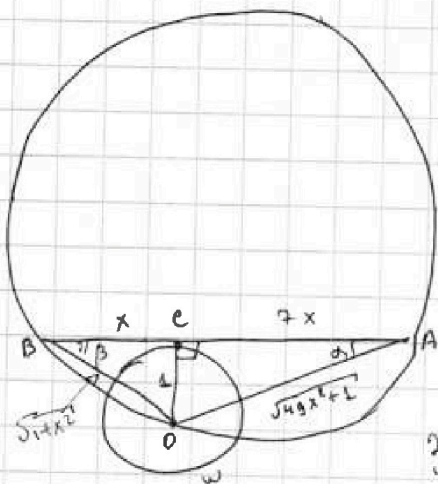
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 3.



Пусть $BC = x \Rightarrow AC = 7x$, O - центр

$OC \perp AB$ по свойству касательной.

$\Rightarrow \triangle OCA$ и $\triangle OCB$ - прямоугольные ($\angle C = 90^\circ$)

$\Rightarrow$ по т. Пифагора $OA = \sqrt{1 + 49x^2}$, $OB = \sqrt{1 + x^2}$

$$\Rightarrow \sin \angle BAO = \sin \angle CAO = \frac{OC}{OA} = \frac{1}{\sqrt{49x^2 + 1}}$$

Запишем т. синусов для $\triangle ABO$:

$$\frac{OB}{\sin \angle BAO} = 2.5 \quad \text{радиус } \Omega \text{ по условию}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{1+x^2}}{1/\sqrt{49x^2+1}} = 10 \quad \Rightarrow \sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{49x^2+1} = 10 \quad \uparrow^2$$

$$(1+x^2)(49x^2+1) = 49x^4 + 50x^2 + 1 = 100$$

Решаем биквадратное уравнение: $49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$.

$$D_{11} = 2500 + 49 \cdot 99 = 6250 + 4851 = 11101 = 105^2$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{-25 \pm 105}{98} \quad \angle 0 \text{ ПК}$$

$$x^2 = \frac{-25 + 105}{98} = 1 \quad \Rightarrow x = 1$$

$$AB = BC + CA = x + 7x = 8x = 8$$

Ответ: 8.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x \quad \text{ООЗ: } \begin{cases} 2x^2-5x+3 \geq 0 \\ 2x^2+2x+1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_1 = 25-4 \cdot 2 \cdot 3 = 1 \\ D_2 = 4-2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5 \pm 1}{4} = 1 \\ x \geq \frac{5 \pm 1}{4} = \frac{3}{2} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Введём замену: $a = 2x^2-5x+3$, $b = 2x^2+2x+1$.

Тогда уравнение примет вид $\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$
 $a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

$$\downarrow$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \sqrt{a} - \sqrt{b} = 0 \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \end{cases} \quad \text{подставим обратно } x:$$

$$\begin{cases} 2x^2-5x+3 = 2x^2+2x+1 \\ \sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ \sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1 \end{cases}$$

сложим эти 2 уравнения.

$$2\sqrt{2x^2-5x+3} = 3-7x, \text{ возведём в квадрат (ООЗ: } 3-7x \geq 0, x \leq \frac{3}{7} \text{)}$$

$$4(2x^2-5x+3) = 9-42x+49x^2$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D_1 = 121 + 3 \cdot 41 = 244 = 4 \cdot 61 = (2\sqrt{61})^2$$

$$15^2 = 225 < 244 < 256.$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{11-2\sqrt{61}}{41} \text{ удовл. ООЗ} \\ x_2 = \frac{11+2\sqrt{61}}{41} > 1 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$15 < 2\sqrt{61} < 16$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

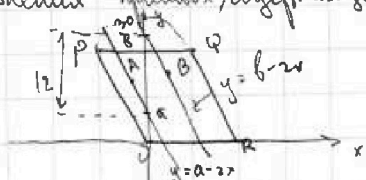
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5.

Уравнения прямых, содержащих стороны паралл-ма: $PO: y+2x=0, y=-2x$
 $QR: y+2x=30=0, y=30-2x$
 $PQ: y-24=0, y=24$
 $OR: y=0$



Пусть точки A и B лежат на прямых, описываемых уравнениями $y=a-2x$ и $y=b-2x$ соответственно (т.е. это прямые, проведенные через т. A и т. B, параллельные PO и QR)

По условию, чтобы пара {A; B} имела подгруппу, должно выполняться $2x_2+y_2-(2x_1+y_1)=12$, т.е. $b-a=12, b=12+a$.

Заметим, что если $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Z}$, то $a, b \in \mathbb{Z}$

При этом $0 \leq a, b \leq 30$, чтобы точки A и B не оказались снаружи стороны PO стороны QR

$\Rightarrow$ существует 19 пар прямых, на которых лежат бы A и B при $a=0, b=12; a=1, b=13, \dots, a=18, b=30$.

При этом каждая из ~~этих~~ прямых вида $y=2k-2x$ имеет 19 целых точек внутри и на границе параллелограмма, т.е. решений системы

$$\begin{cases} y=2k-2x \\ 0 \leq y \leq 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2k-2x \\ 0 \leq 2k-2x \leq 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq 2k-2x \leq 24 \\ 0 \leq 2k-2x \leq 24 \end{cases} \Rightarrow k-12 \leq x \leq k, \text{ т.е. } x \in \{k-12, k-11, \dots, k-1, k\}$$

А каждая прямая вида $y=2k+1-2x$ имеет 12 точек внутри параллелограмма.

$$\begin{cases} y=2k+1-2x \\ 0 \leq y \leq 24 \end{cases}, y, k, x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} y=2k+1-2x \\ 0 \leq 2k+1-2x \leq 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq 2k+1-2x \leq 24 \\ 0 \leq 2k+1-2x \leq 24 \end{cases} \Rightarrow 2(k+1/2)+1 \leq 2x \leq 2k+1$$

$$k+1/2 \leq x \leq k+1/2$$

$$\Rightarrow \text{при } x \in \mathbb{Z} \quad k-12+1 \leq x \leq k \Rightarrow x \in \{k-11, k-10, \dots, k-1, k\}$$

Среди 19 пар прямых через т. A и т. B $9, 6, 2$,

$8 - a, b \in \mathbb{Z}$. Т.е. для всех точек, лежащих на прямой вида $y=t-2x, y+2x=t=\text{const}$,

то для каждой выбранной прямой ($y=a-2x$ или $y=b-2x$) им подходит все (любое) целое т.е. с ней внутри параллелограмма.

$\Rightarrow$ по правилу сложения и вычитания все пар точек A и B

$$\text{у нас } 9 \cdot 13 \cdot 13 + 8 \cdot 12 \cdot 12 = 2673.$$

пары точек с четными a, b на $y=b-2x$ пар точек на $y=a-2x$ пар точек на $y=b-2x$

Ответ: 2673

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

№6.

Заметим, что $(x+3)^2 + y^2 - 1 \leq 0$ — уравнение ^{внутреннего} круга с центром $(-3; 0)$ и радиусом $\sqrt{3}=1$,
 $x^2 + y^2 - 4 \leq 0$ — с центром $(0; 0)$ и радиусом 2.

Примем эти круги не имеют общих точек. (мин. x для второй $x = -2$, т.к.

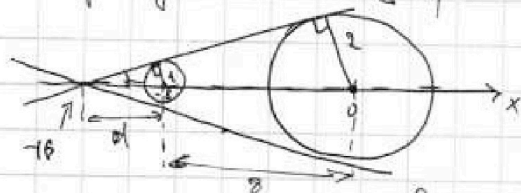
$$x^2 - 4 \leq -y^2 \leq 0 \Rightarrow |x| \leq 2 \text{ макс. } x \text{ для первой: } x = -2, \text{ тк. } (x+3)^2 - 1 \leq -y^2 \leq 0 \\ \Rightarrow |x+3| \leq 1 \text{ ; } -7 \leq -2 \Rightarrow \text{неравенство } ((x+3)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

верно для всех точек этих кругов, и только для них.

С каждым из кругов любая прямая плоскости может иметь либо 0, либо 1 (касание), либо бесконечно много точек (секущая).

Т.к. $ax - y + 10b = 0$ — уравнение прямой, и система должна иметь ровно 2 решения, то эта прямая должна иметь в сумме с двумя кругами ровно 2 общие точки $\Rightarrow$ по 1 с каждым $\Rightarrow$ это одна из 4х общих касательных.

1) рассмотрим две внешние общие касательные. В силу симметрии они пересекутся на линии центров кругов (в данном случае — Ox), образуя равные углы α с этой осью.



Пусть расстояние от точки пересечения касат. до центра меньшего круга — $d \Rightarrow$ до другого центра $d+3$ (т.к. $0 - (-3) = 3$)

Радиусы, проведенные в точки касания одной из касательных, перпендикулярны ей $\Rightarrow$ параллельны друг другу $\Rightarrow$ с Ox и той касат. образуют подобные треугольн. $\Delta \Delta \Rightarrow \frac{1}{d} = \frac{2}{d+3}$, где 1 и 2 — длины радиусов.

$$\Rightarrow d+3 = 2d \Rightarrow d = 3.$$

В меньшем из треугольников найдем второй катет по т. Пифагора: $\sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8}$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}}{8}$$

По условию касательные имеют уравнение $y = ax + 10b \Rightarrow a$ — тангенс угла, который образует ^{прямая} касательная с положит. направлением $Ox \Rightarrow$ для внешних касательных

$$a = \pm \frac{\sqrt{8}}{8}.$$

2) Аналогично для внутренних общих касательных: Только они уже образуют угол β с Ox .

Запишем аналогичное отношение подобия: $\frac{d'}{2} = \frac{3-d'}{2}$

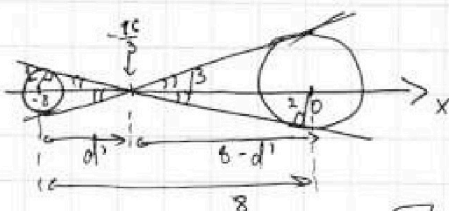
$$\Rightarrow 2d' = 3 - d' \Rightarrow d' = \frac{3}{3}$$

$$\Rightarrow \text{второй катет в меньшем треугольнике } \sqrt{\frac{6^2}{3} - 1^2} = \frac{\sqrt{55}}{3} \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\frac{\sqrt{55}}{3}} \cdot 3 = \frac{3\sqrt{55}}{55}.$$

$\Rightarrow$ для ^{внутренних} касательных $a = \pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$

Для каждой из 4х углов мы знаем точку на прямой $(-3; 0)$ или $(-\frac{16}{3}; 0)$ и её координаты $\Rightarrow$ можно восстановить $10b$ и b , b будет существовать.

Ответ: $a \in \{ -\frac{\sqrt{8}}{8}; +\frac{\sqrt{8}}{8}; -\frac{3\sqrt{55}}{55}; +\frac{3\sqrt{55}}{55} \}.$



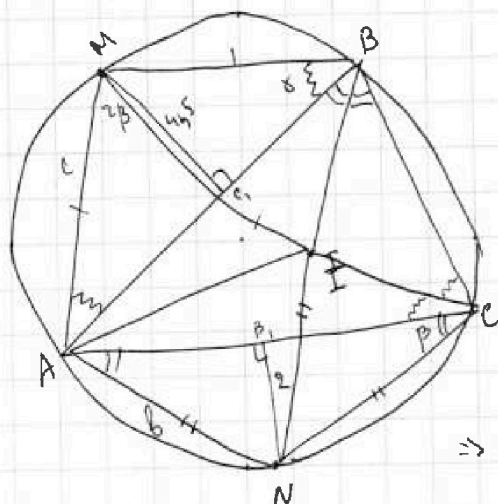
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Покажем о треугольнике $AM=MB=MI$, $(*)$
 $AN=NC=NI$, где I - центр
 вписанной окружности $\triangle ABC$ (т.е. пер. биссектр.)

Пусть C_1, B_1 - основания перпендикуляров
 из M на AB и из N на AC соответственно.

$I = CM \cap BN$, т.к. BN и MC - биссектрисы
 (дуги AN и NC , AM и MB равны).

Пусть $\angle ABC = 2\beta$, $\angle ACB = 2\gamma$
 $\Rightarrow \angle AMI = \angle AMC = \frac{\angle AC}{2} = \angle ABC = 2\beta$,

$\Rightarrow \triangle AMI$ по т. синусов ($AM=MI=c \cdot \frac{1}{2}$).

$$AI^2 = c^2 + c^2 - 2c \cdot c \cdot \cos 2\beta = 2c^2(1 - \cos 2\beta) = 2c^2 \cdot 2\sin^2 \beta$$

$$\Rightarrow AI = 2c \cdot \sin \beta. (1)$$

$$\angle AIN = \frac{\angle AN}{2} = \angle ABN = \frac{\angle ABC}{2} = \beta \Rightarrow \text{в прямоугол. } \triangle B_1IN \sin \beta = \frac{B_1N}{NI} = \frac{2}{c}, \text{ где}$$

$$B_1N = AN = NI = NC.$$

$$\text{Аналогично } \angle MBA = \angle MCA = \gamma, \triangle MBN, \sin \gamma = \frac{4,5}{c}$$

$$\text{Пусть } R - \text{радиус опис. окр. } \triangle ABC \Rightarrow \triangle AMB \text{ по т. синусов } \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

$$\text{в } \triangle AIN \text{ по т. синусов } \frac{c}{\sin \beta} = 2R$$

$$\Rightarrow \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{c}{4,5/c} = \frac{c^2}{4,5} = 2R = \frac{c}{\sin \beta} = \frac{c}{2/8} = \frac{c^2}{2} \Rightarrow \frac{c^2}{9} \cdot 2 = \frac{c^2}{2} \Rightarrow \frac{c}{8} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Пусть } c = 3y, b = 2y. \Rightarrow \sin \beta = \frac{2}{8} = \frac{2y}{2y} = \frac{1}{y}.$$

$$\text{Подставим } c \text{ и } \sin \beta \text{ в (1): } AI = 2 \cdot 3y \cdot \frac{1}{y} = 6.$$

Ответ: 6.



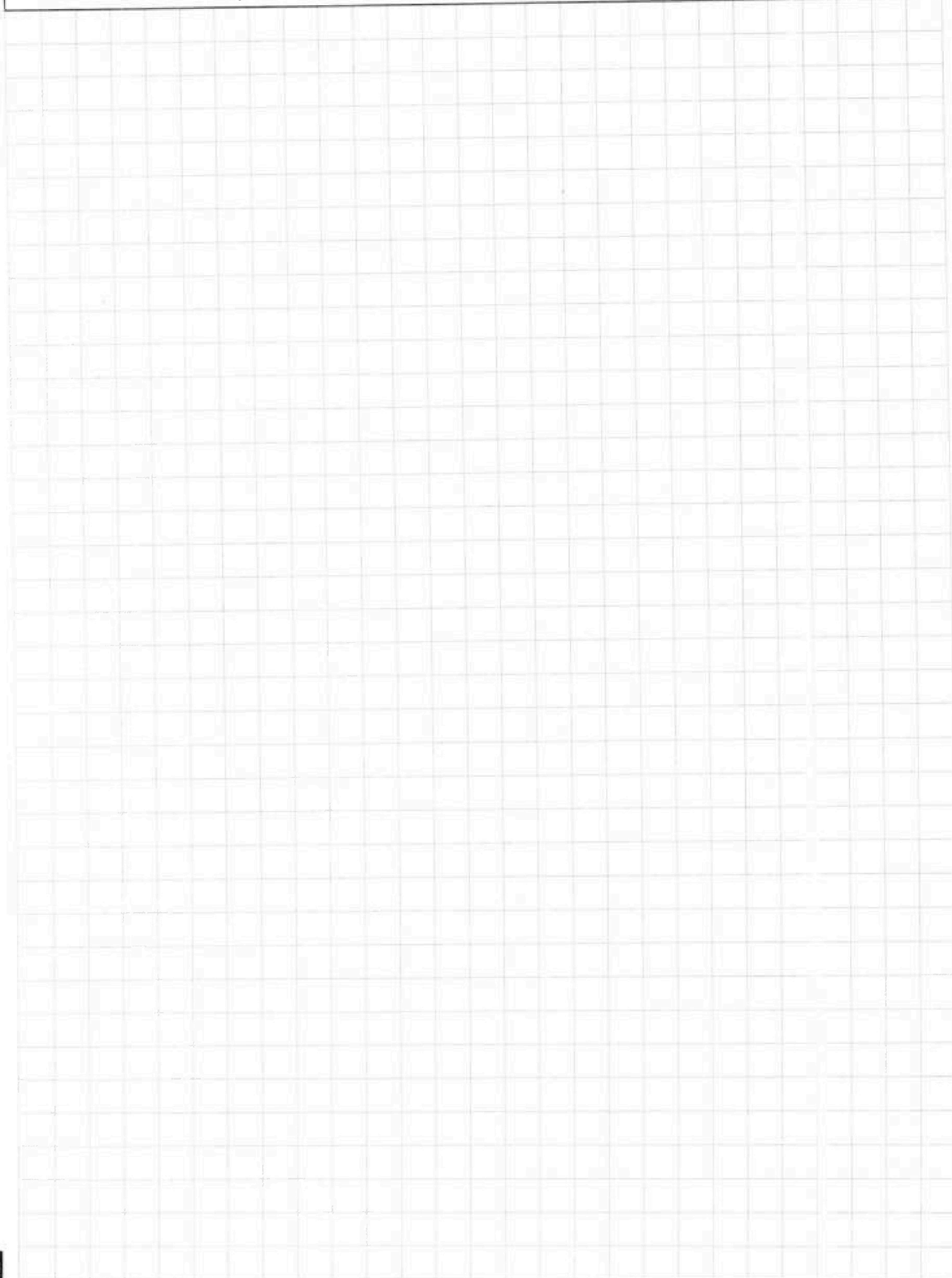
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{1}{2} \cdot (5\sqrt{2} - 5\sqrt{2}) \left((5\sqrt{2} + 5\sqrt{2})(4+6-4) + 4\sqrt{2} \right) = 10$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☐ ☒ ☒ ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновики

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴ 2¹⁴

bc 2¹⁴ 2¹⁴

ac 2¹⁴ 2¹⁴

ab 2¹⁴