



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

51.

По условию: $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc: 2^{12} \cdot 7^{17}$$

$$ac: 2^{20} \cdot 7^{32}$$

По свойствам деления:

Если $a:m$ и $b:n$, то $ab:mn$

Значит:

$$a^2b^2c^2: 2^{51} \cdot 7^{64} \Rightarrow a^2b^2c^2 = k \cdot 2^{51} \cdot 7^{64}; k \in \mathbb{N}$$

Если $abc = \min$, то $a^2b^2c^2 = \min$, значит $k=1$, т.е. $a, b, c \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow a^2b^2c^2 = 2^{51} \cdot 7^{64} \Rightarrow abc = 2^{\frac{51}{2}} \cdot 7^{32}$

Итак: $abc = 2^{\frac{51}{2}} \cdot 7^{32}$

$$a^2b^2c^2 = k \cdot 2^{51} \cdot 7^{64}$$

$$abc = \sqrt{k} \cdot 2^{\frac{51}{2}} \cdot 7^{32}$$

т.е. $a, b, c \in \mathbb{N}$, то $abc \in \mathbb{N}$, $k = \min \Rightarrow \sqrt{k} \cdot 2^{\frac{51}{2}} \in \mathbb{N} \Rightarrow k=2$

Итак: $abc = 2^{\frac{51}{2}} \cdot 7^{32} = 2^{26} \cdot 7^{32}$

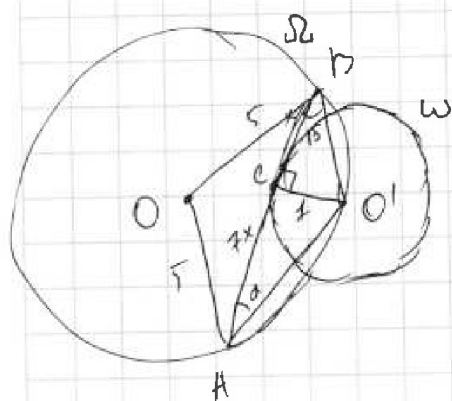
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Дано:

окр-ти ω, Ω . $R_\omega = 1$; $R_\Omega = 5$ -

радиусы соответствующих окр-тей

$AB \cap \omega = C$; $AC:CB = 7$. $A, B \in \Omega$.

AB-хорда Ω

Найти: AB-?

Решение:

1) Пусть O - центр Ω -окр-ти, а ω - O' , тогда $O'C = 1$, как радиус к касательной. Пусть $\angle BAO' = \alpha$, а $\angle ABO' = \beta$, тогда $\angle BO'A = 180 - \alpha - \beta$.

Пусть $AB = 8x$, тогда $AC = 7x$; $BC = x$.

2) По т. синусов.

$$\frac{AB}{2 \sin(180 - \alpha - \beta)} = 5 \Rightarrow AB = 10 \sin(\alpha + \beta) \Rightarrow 8x = 10 \sin(\alpha + \beta) \Rightarrow 4x = 5 \sin(\alpha + \beta)$$

$$3) S_{\triangle O'BC} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8x = 4x, \text{ по высоте и основанию, где } \triangle O'BC$$

$$4) O'B = \sqrt{x^2 + 1} - \text{по т. Пифагора, аналогично } O'A = \sqrt{49x^2 + 1} \triangle O'CA.$$

$$5) S_{\triangle O'AB} = \frac{1}{2} \cdot \sin(180 - \alpha - \beta) \cdot \sqrt{49x^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 1} - \text{по углу между сторонами и сторонами}$$

$$6) \text{ из (3) и (5) } \Rightarrow 4x = \frac{1}{2} \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot \sqrt{49x^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 1}, \text{ из пункта (2)}$$

$$5 \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot \sqrt{49x^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 = (x^2 + 1)(49x^2 + 1) \quad 7) AB = 8x = 8 \cdot 1 = 8.$$

$$100 = 49x^4 + 50x^2 + 1$$

Ответ: 8.

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0 \Rightarrow x^2 = \left[\frac{-1}{-49} \pm \sqrt{\frac{1}{49} - \frac{99}{49}} \right] \Rightarrow x = 1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x \quad \text{W4.}$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} = 2-7x + \sqrt{2x^2+2x+1} \quad \uparrow^2$$

$$2-7x + \sqrt{2x^2+2x+1} \geq 0$$

$$\sqrt{2x^2+2x+1} \geq 7x-2$$

$$\begin{cases} 7x-2 < 0 \\ 2x^2+2x+1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{2}{7} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow x < \frac{2}{7}$$

$$\begin{cases} 7x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$2x^2+2x+1 \geq 49x^2-28x+4 = 47x^2-30x+3 \leq 0$$

$$D = 900 - 4 \cdot 47 \cdot 3$$

$$3(300 - 4 \cdot 47) = 3 \cdot 112 = 3 \cdot 4^2 \cdot 7$$

$$\frac{30-4\sqrt{21}}{94} \quad \frac{30+4\sqrt{21}}{94}$$

$$2x^2-5x+3 = (2-7x)^2 + 2(2-7x)\sqrt{2x^2+2x+1} + 2x^2+2x+1$$

$$(2-7x)^2 + 2(2-7x)\sqrt{2x^2+2x+1} + (2-7x) = 0$$

$$\Rightarrow 2-7x = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{7}$$

$$2-7x + 2\sqrt{2x^2+2x+1} + 1 \neq 0$$

$$2\sqrt{2x^2+2x+1} = 7x-3 \Rightarrow x \geq -\frac{3}{7}$$

$$4(2x^2+2x+1) = 49x^2-42x+9$$

$$8x^2+8x+4 = 49x^2-42x+9$$

$$41x^2-50x+5=0$$

ООЗ:

$$2x^2+2x+1 \geq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}, p < 0$$

$$2x^2-5x+3 \geq 0$$

$$x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$D = 2500 - 4 \cdot 41.5 \approx 5(500 - 4 \cdot 41) = 5 \cdot 324 = 5 \cdot 18^2$$

$$X = \begin{cases} \frac{25 + 9\sqrt{5}}{41} & \text{по ОДЗ. не подходит. т.к.} \\ \frac{25 - 9\sqrt{5}}{41} & \text{не подходит. т.к. } < \frac{3}{7}. \end{cases} \quad X = \frac{50 \pm 18\sqrt{5}}{82}$$

Ответ: $x = 7$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

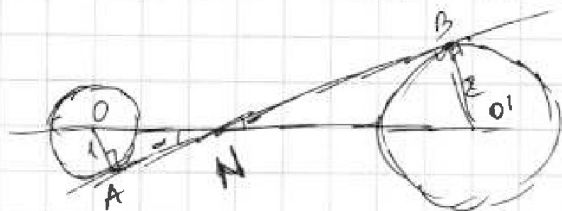
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим 2-ой случай касания. Пусть α - угол наклона прямой



Пусть

$$ON = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$N O' = \frac{2}{\sin \alpha}$$

$OO' = 8$ - из условия, тогда

$$\frac{1}{\sin \alpha} ON \cdot NO' = OO' \Rightarrow \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{2}{\sin \alpha} = 8 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{8}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{3}{8}}{\sqrt{1 - \frac{9}{64}}} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{55}}{8}} = \frac{3}{\sqrt{55}}; \text{ аналогично } \alpha = \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{\sqrt{55}}$$

Из соображений симметрии относительно оси абсцисс следует, что существуют параметры α "зеркальные" и для оставшихся случаев, $\Rightarrow \alpha = -\frac{3}{\sqrt{55}}$ для симметричного второго и $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{63}}$

симметричного первого $\Rightarrow$

$$\text{Ответ: } \alpha \pm \frac{1}{\sqrt{63}}; \pm \frac{3}{\sqrt{55}} = \pm \frac{1}{3\sqrt{2}}; \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

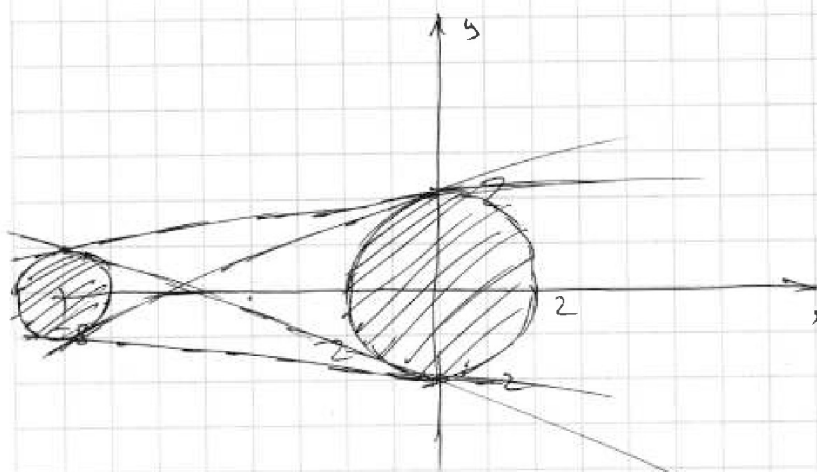
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6.



$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 4) \cdot (x^2 + y^2 - 1) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

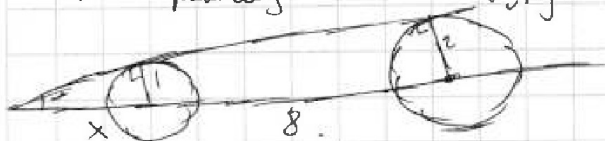
(1) - прямая с центром
в $(0; 0)$ и радиусом 1, а другая
с центром $(-8, 0)$ и радиусом 2

Нарисуем на графике второе неравенство (2) - два круга.

Во втором уравнении (1) задаёт прямую.

По условию надо найти такие a , чтобы существовало такое a , что
система имеет решение, такое возможно в случае касания
прямой двух кругов.

Расс-решим систему (1) - б.т. Пусть α - угол наклона прямой, а x -
расстояние от центра меньшего круга



до пересечения прямой с осью абсцисс, тогда $\sin \alpha = \frac{1}{x}$ и по другой
стороне $\sin \alpha = \frac{2}{x+8} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{x+8} \Rightarrow x+8=2x \Rightarrow x=8 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{8} \rightarrow \tan \alpha = \frac{\frac{1}{8}}{\sqrt{1 - \frac{1}{64}}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{63}}{8}} = \frac{1}{\sqrt{63}}$$

из (1) - оо следует, что $a = \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{63}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

$$\frac{mk}{m^2k^2-mn} = \frac{k}{mk-n}$$

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &\equiv 0 \\ 2b^2 &\equiv 0 \end{aligned}$$

$$a+b \equiv 0$$

$$(a+b)^2 \equiv 8ab$$

$$(a+b)^2 \equiv 0$$

$$a+b = mk$$

$$(a+b)^2 = mn$$

$$m^2k^2 = mn$$

$$m = \frac{n}{k^2}$$

$$\begin{aligned} a &\equiv -b \quad a^2 \equiv b^2 \\ a^2-6ab+b^2 &\equiv \end{aligned} \begin{cases} a^2+2ab+b^2 \equiv 0 \\ a^2-6ab+b^2 \equiv 0 \end{cases}$$

$$8ab \equiv 0 \quad -8ab \equiv 0$$

$$8ab = mn$$

$$a+b = mk$$

$$m = \frac{8ab}{n}$$

$$mn = 8ab$$

$$b = \frac{mn}{8a}$$

$$2b^2 = mk$$

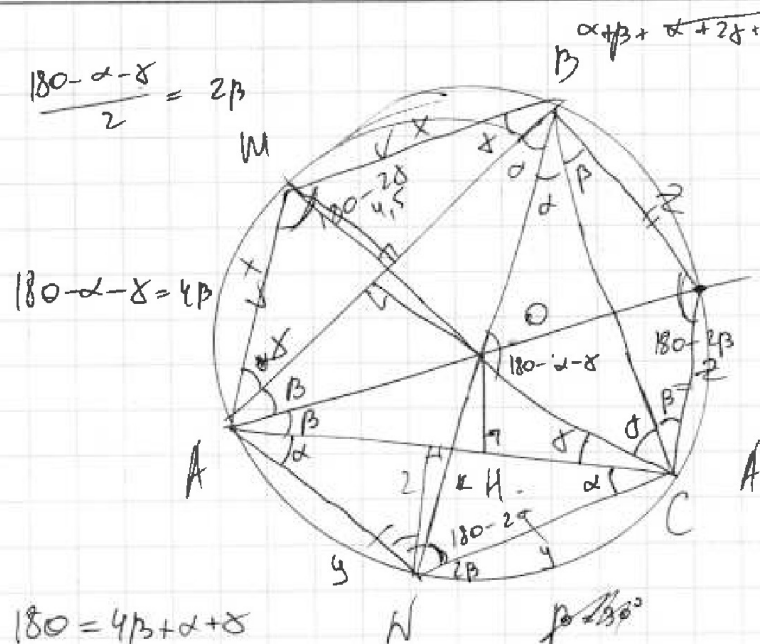
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\frac{OH}{AH} = \tan p$$

$$\frac{OH}{HC} = \tan \delta$$

$$\frac{abc}{4s} = R$$

$$r = \frac{S}{P}$$

$$\frac{abc}{4pr} = R$$

$$\frac{abc}{4pr} = \frac{R}{r}$$

$$\alpha + p + \delta = 60^\circ 90^\circ 4p$$

$$p = 90^\circ - \alpha - \delta$$

$$AO \cdot \sin p =$$

$$S_{NAC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot AC \cdot \sin p$$

$$S_{NAC} = \frac{1}{2} \cdot y^2 \sin 2\alpha$$

$$2p = 180^\circ - \alpha - \delta$$

$$AC = y^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$AC = 2 \cdot y \cos$$

$$180 = 4p + \alpha + \delta$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin p \cos p \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \delta = 4,5$$

$$S_{ABC} = AB \cdot AC \cdot \cos p \sin p$$

$$y \cdot \sin \alpha = 2$$

$$\frac{AH}{AB} = \frac{OK}{OB}$$

$$AB = 2x \cos \delta$$

$$AB = 2R \sin 2\delta$$

$$180 \cdot 4 =$$

$$AC = 2y \cos \alpha$$

$$2x \cos \delta = R \cdot 2 \sin \delta \cos \delta = 720^\circ$$

$$BC = 2z \cos p$$

$$x = 2R \sin \delta$$

$$y = 2R \sin \alpha$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$$

$$z = 2R \sin p$$

$$x = \frac{3}{2}y$$

$$\sin p = \cos(\alpha + \delta)$$

$$\frac{\sin \delta}{\sin \alpha} = \frac{3}{2}$$

$$\alpha + p + 2\delta + 180 - 2\delta + \delta +$$

$$\sin p = \cos \alpha \cos \delta - \sin \alpha \sin \delta$$

$$\frac{180 - \alpha - \delta}{2} + 180 - 2p = 180$$

$$180 - \delta - 2 = a \equiv b$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a^2 \equiv_m b^2$$

$$a+b \equiv_m 0$$

$$(a-3b)^2 \equiv_m 8b^2$$

$$a \equiv_m -b$$

$$a-3b \equiv_m 2\sqrt{2}b$$

$$a \equiv_m 2\sqrt{2}b+3b$$

$$(a-3b)^2 \equiv_m 8b^2 \equiv_m a+b$$

$$(a-(3+2\sqrt{2})b)(a-(3-2\sqrt{2})b) \equiv_m a+b$$

$$a^2-6ab+b^2 \equiv_m 0$$

$$a^2+b^2 \equiv_m 6ab$$

$$a+b \equiv_m 0$$

$$(a+b)^2 \equiv_m 8ab$$

$$a+b \equiv_m 0$$

$$a^2 \equiv_m m \cdot b^2$$

$$a = \sqrt{m} \cdot b$$

$$\Rightarrow a \equiv_m b$$

$$\sqrt{a+b} \equiv_m 0$$

$$a+b \equiv_m$$

$$a+b = mn$$

$$\sqrt{a+b}$$

$$a+b = mn$$

$$a^2-6ab+b^2 = m \cdot k$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{mn} \cdot \sqrt{m}$$

$$\sqrt{a+b} \equiv_m 0$$

$$(a+b)^2 - 8ab = mk$$

$$45 \equiv_3 0 \quad m^2 n^2 - 8ab = mk$$

$$10 = 3 \cdot 5$$

$$m^2 n^2 - mk - 8ab = 0$$

$$D = k^2 + 4m^2 n^2 ab, D = \frac{k^2}{n^2}$$

$$(a+b)^2 = mn, m \cdot n + 8ab$$

$$\begin{cases} a+b = m \cdot k \end{cases}$$

$$m^2 k^2 = m \cdot n + 8ab$$

$$m^2 k^2 - mn - 8ab = 0$$

$$n^2 + 4k^2 - 8ab$$

$$n^2 + 32k^2 ab$$

$$m = \frac{n + \sqrt{n^2 + 32k^2 ab}}{2k^2}$$

$$m = \frac{n}{2k^2} + \sqrt{\dots}$$

$$ab =$$

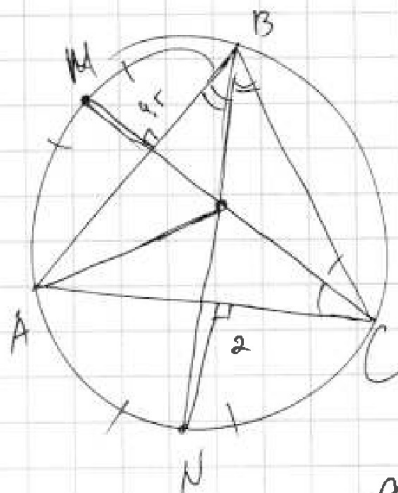
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a = kb$$

3,5

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

$$\frac{8}{9-6 \cdot 3 \cdot 5+25} =$$

$$= \frac{8}{9-30+25} = \frac{8}{-56} = -\frac{1}{7}$$

$$\text{НОД}(a, b) = 1$$

$$ab = \text{НОК}(a, b)$$

$$a+b \equiv 0$$

$$a^2-6ab+b^2 \equiv 0$$

$$\begin{cases} a+b=mk \\ a^2-6ab+b^2=nm \end{cases} \quad a = mk-b$$

$$m^2k^2 - 2mkb + b^2 - 6(mk-b)b + b^2 = nm$$

$$m^2k^2 - 2mkb + b^2 - 6mkb + 6b^2 + b^2 = nm$$

$$m^2k^2 - 8mkb$$

$$m^2k^2 - 8mkb + 8b^2 = nm$$

$$m^2k^2 - (8kb+n)m + 8b^2 = 0$$

$$\frac{a^2-6ab+b^2}{a^2-6ab+b^2-8b^2}$$

$$a^2-6ab+9b^2 \equiv 8b^2$$

$$(a-3b)^2 \equiv 8b^2$$

$$\frac{a+b}{a+b}$$

$$(a-3b-2\sqrt{2}b)(a-3b+2\sqrt{2}b)$$

$$9 \equiv 0$$

$$a \equiv mn$$

$$b^2 \equiv m \cdot n$$

$$b \equiv m \cdot \sqrt{n}$$

$$b^2 \equiv 0$$

$$b^2 + 6b^2 + b^2 \equiv 0$$

$$8b^2 \equiv 0$$

$$8b^2 \equiv 0$$

$$a \equiv mn$$

$$b \equiv mk$$

$$a \equiv 0$$

$$(a-3b)^2 - 8b^2$$

$$D = 64k^2b^2 - 46kbn + n^2 - 32b^2 = 0$$

$$6b^2 \equiv 8b^2$$

$$a+b \equiv 0$$

$$a \equiv -b$$

$$\begin{cases} a^2-6ab+b^2 \equiv 0 \end{cases}$$

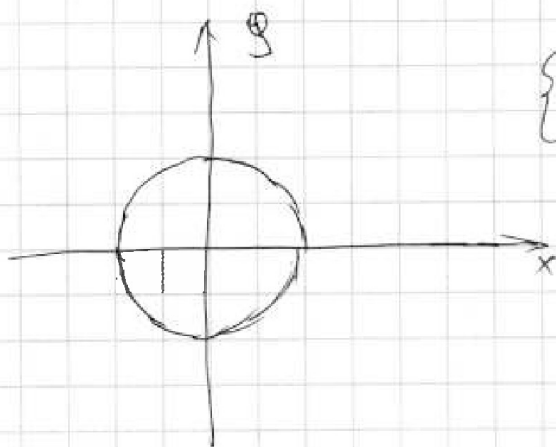
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} a \cdot b = km \\ a^2 + 6ab + b^2 = nm \end{cases}$$

$$a=b \quad a=kb, k \neq \frac{1}{N}$$

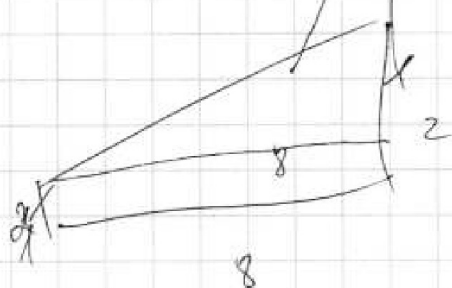
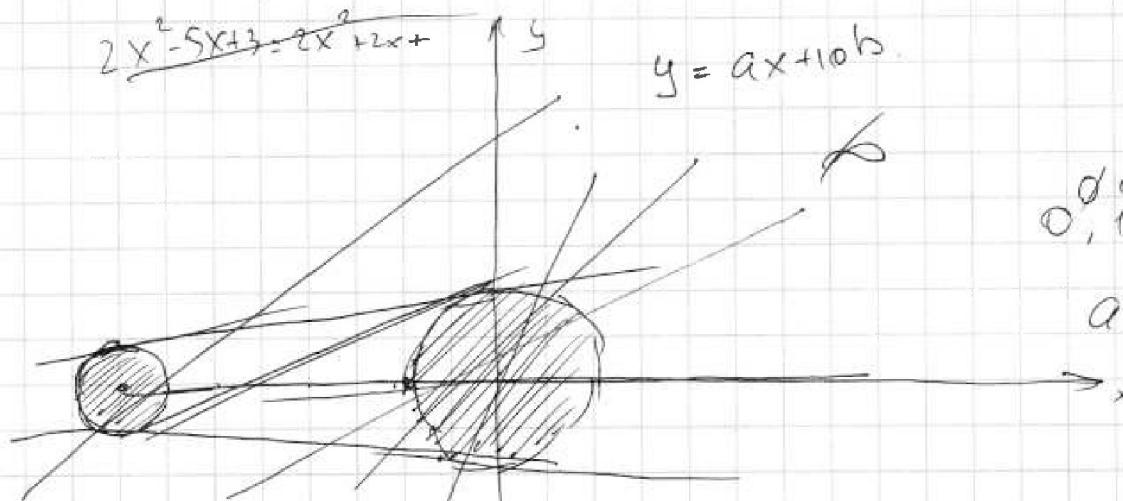
$$\frac{kb+b}{k^2b^2-6kb+b^2}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x +$$

$$y = ax + 10b$$

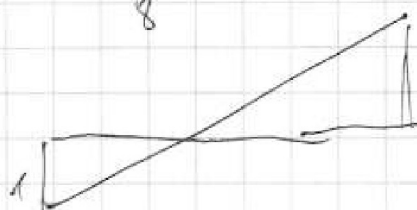
$$0, 1, 3, 4$$

$$a, b$$



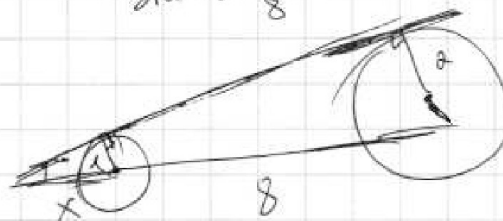
$$\begin{aligned} \lg x &= \frac{1}{8} \\ a &= \sqrt{\frac{1}{8}} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{x+8} \\ \sin \alpha &= \frac{2}{8} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x+8}$$



$$x+8=2x \quad x=8$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

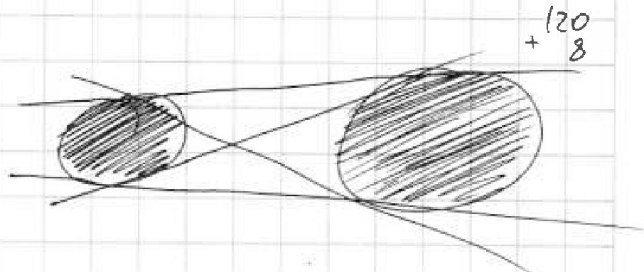
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порядк QR-кода недопустим!

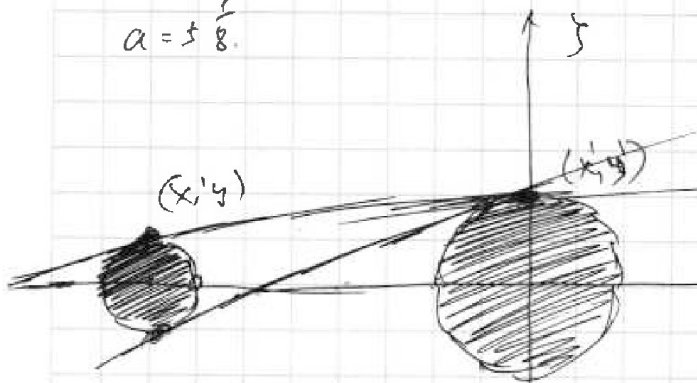


$$y = \cancel{10x} \quad y = ax + 10b,$$

$$x^2 + y^2$$



$$a = \pm \frac{1}{8}$$



$$y = \cancel{10x} \quad \text{tg}^2 \alpha = \frac{119}{64}$$

$$y = ax + 10b$$

$$\text{tg}^2 \alpha = \frac{2 - \frac{9}{64}}{1 - \frac{9}{64}}$$

$$\frac{dF(x,y)}{dx} = - \frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}$$

$$y' = ax' + 10b$$

$$1 + \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$\text{tg}^2 \alpha = \frac{2 - \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$\text{tg} \alpha = - \frac{y'}{x'}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \text{tg}^2 \alpha &= \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} \end{aligned} \right.$$

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} \frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}$$

$$\frac{3}{\sin \alpha} = 8$$

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{(y')^2}{(x')^2}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{8}$$

$$\frac{y}{x+8} = \frac{y'}{x'}$$

$$\frac{1 - (x+8)^2}{x^2} = \frac{64}{55}$$

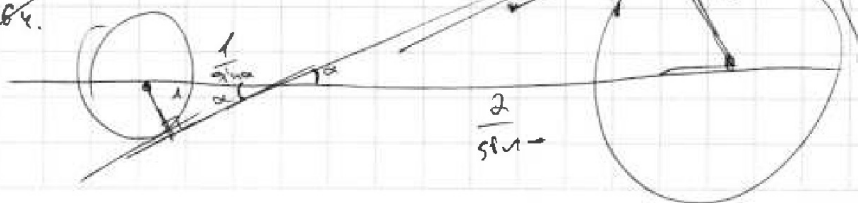
$$\text{tg} \alpha = \frac{\frac{3}{8}}{\sqrt{1 - \frac{9}{64}}}$$

$$\text{tg}^2 \alpha = \frac{\frac{9}{64}}{\frac{55}{64}}$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{3}{\sqrt{55}}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{64}} = \frac{\sqrt{55}}{8}$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{55}}{8}} = \frac{3}{\sqrt{55}}$$



$$100 = 49x^4 + 50x^2 + 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$32x^2 = 25 \left(1 - \sqrt{\frac{7x^2-1}{(49x^2+1)(x^2+1)}} \right) \cdot \sqrt{\dots}$$

$$32x^2 = 25 \sqrt{\dots}$$
$$32x^2 \sqrt{\dots} = 25 \left(\sqrt{\dots} - 7x^2 + 1 \right)$$

$$32x^2 \sqrt{\dots} = 25 \sqrt{\dots} - 175x^2 + 25$$

$$(32x^2 - 25) \sqrt{\dots} = 25(1 - 7x^2)$$

$$(32x^2 - 25)$$

$$(32x^2 - 25)^2 \cdot (49x^2 + 1)(x^2 + 1) = 625(1 - 7x^2)^2$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}} \cdot 4x - 5 - \frac{1}{2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}} \cdot 4x + 2 \geq 0$$

$$(4x - 5) \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} - (4x + 2) \cdot \sqrt{2x^2 - 5x + 3} \geq 0$$

$$(4x - 5) \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq (4x + 2) \sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$



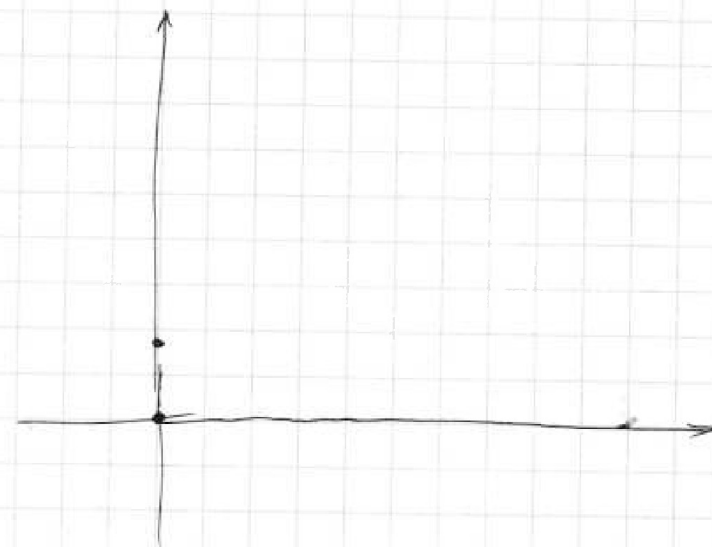
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3:

$$2x^2 + 5x + 3 \geq 0$$

$25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$
 $\frac{5 \pm 1}{4} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 0$$



$$2 - 2x \geq 0$$

$$2 \geq 2x$$

$$x \leq \frac{2}{2}$$

$$\sqrt{2x^2 + 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 2x$$

$$2a + b = 12$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Q23:

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = (2 - 7x) + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = (2 - 7x)^2 + 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 2x^2 + 2x + 1$$

$$(2 - 7x)^2 + 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = -7x + 2$$

$$(2 - 7x)^2 + 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + (7x - 2) = 0$$

$$2 - 7x + 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 1 = 0$$

$$2\sqrt{} = 7x - 3 \quad x \geq \frac{3}{7}$$

$x \in (-\infty; 0] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$

$2 - 7x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0$

$2 = 7x$
 $x = \frac{2}{7}$

$$4(2x^2 + 2x + 1) = 49x^2 - 42x + 9$$

$$8x^2 + 8x + 4 = 49x^2 - 42x + 9$$

$$41x^2 - 50x + 5 = 0$$

$$2500 - 4 \cdot 41 \cdot 5$$

$$5(500 - 4 \cdot 41)$$

$$5 \cdot 324 = 5 \cdot 18^2$$

$$4 \cdot \frac{42}{9} = 188$$

$$\frac{50 \pm 18\sqrt{5}}{82} = \frac{25 \pm 9\sqrt{5}}{41}$$

$$\frac{41}{1.5}$$

$$\frac{3}{7} \leq \frac{25 + 9\sqrt{5}}{41}$$

$$\frac{117 \pm 4}{128} = 4.2$$

$$1 < \frac{25 + 9\sqrt{5}}{41} < \frac{3}{2}$$

$$123 - 50 =$$

$$123 \wedge 175 \rightarrow 6355$$

$$6355 \rightarrow 52$$

$$41 < 25 + 9\sqrt{5} < \frac{123}{2}$$

$$16 < 9\sqrt{5} < \frac{73}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

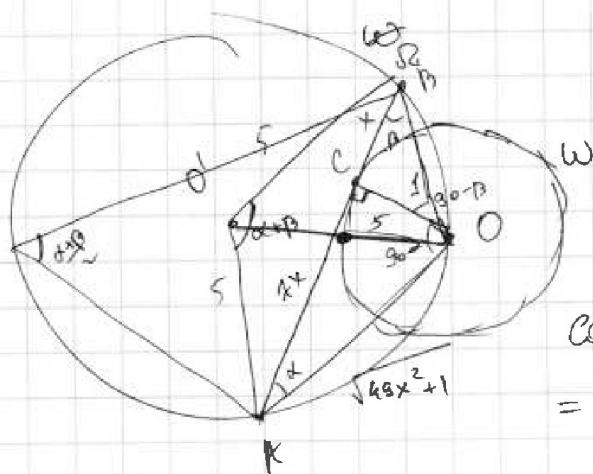
Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



AB?

$$S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2} \cdot 8x \cdot 1 = 4x$$

$$(49x^2 + 1)(x^2 + 1) =$$

$$= 49x^4$$

$$\cos(\alpha + \beta) =$$

$$= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\frac{7x}{\sqrt{49x^2 + 1}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{49x^2 + 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} =$$



$$a = 2R \sin \alpha$$

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$$

$$AB^2 = 25 + 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cos(\alpha + \beta)$$

$$AB^2 = 25 + 50(1 - \cos(\alpha + \beta))$$

$$= \frac{7x^2 - 1}{\sqrt{49x^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$64x^2 = 50 \left(1 - \frac{7x^2 - 1}{\sqrt{49x^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 1}} \right)$$

$$32x^2 = 25 \left(1 - \frac{7x^2 - 1}{\sqrt{(49x^2 + 1)(x^2 + 1)}} \right) \cdot \sqrt{(49x^2 + 1)(x^2 + 1)}$$

$$32x^2 \sqrt{\quad} = 25 \sqrt{\quad} - 7x^2 + 1$$

$$\sqrt{32x^2 - 25} = \sqrt{32x^2 - 25} =$$

$$\frac{AB}{2 \sin(\frac{\alpha + \beta}{2})} = 5$$

$$AB = 10 \sin(\frac{\alpha + \beta}{2})$$

$$8x = 10 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha + \beta)}{2}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$\begin{array}{r} 14 \\ + 17 \\ + 20 \\ \hline 51 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ + 17 \\ + 37 \\ \hline 64 \end{array}$$

a, b, c

$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{51} \cdot 7^{64}$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$a = km$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{32}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{32}$$

$$15:3 \quad b = gn$$

$$6:2 \quad ab = (kg)mn$$

$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$a: m$$

$$b: n \Rightarrow$$

$$ab: mn$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{32}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ + 17 \\ + 20 \\ \hline 51 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ + 17 \\ + 10 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ + 20 \\ + 34 \\ + 17 \\ \hline 85 \end{array}$$

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{51} \cdot 7^{64}$$

$$abc = 2^{\frac{51}{2}} \cdot 7^{32}$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

$$36-4=32$$

W1

a, b не сопр

$$\frac{a+b}{b^2 \left(\frac{a^2}{b^2} - 6 \frac{a}{b} + 1 \right)}$$

$$\text{Hog}(a, b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} =$$

$$\begin{cases} a+b = km & b = km - a \\ a^2 - 6ab + b^2 = nm \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{N}$$

$$a^2 - 6a(km - a) + (km - a)^2 = nm$$

$$a^2 - 6akm + 6a^2 + k^2 m^2 - 2akm + a^2 = nm$$