



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

$x/n \rightarrow x$ делится на n

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$$ab/2^{14} 7^{10}$$

если умножить $ab \cdot bc$, то оно будет делиться на

$$bc/2^{17} 7^{17}$$

$$2^{14} 7^{10} \cdot 2^{17} 7^{17} = 2^{31} 7^{27}$$

$$ac/2^{20} 7^{37}$$

после умножения ab^2c на ac оно будет делиться

$$abc \cdot \min^{-7}$$

$$\text{на } 2^{31} 7^{27} \cdot 2^{20} 7^{37} = 2^{51} 7^{64}$$

$a^2 b^2 c^2$ делится на $2^{51} 7^{64}$, но 7^{51} не делится

на 2, поэтому нельзя сразу взять корень $\sqrt[7]{}$

если $a^2 b^2 c^2$ делится на 2^{50} , то и 50-макс. степень

факты в делителе, то $a^2 b^2 c^2$ не делится на 2^{51}

если $a^2 b^2 c^2$ делится на 2^{52} , то все условия

выполняются $a^2 b^2 c^2 / 2^{52} 7^{64}$

$$abc/2^{26} 7^{32}$$

тогда abc мин. если оно равно $2^{26} 7^{32}$

Ответ: $abc = 2^{26} 7^{32}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

$a \in \mathbb{N}$

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} = \frac{ab}{a^2+2ab+b^2-8ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

$b \in \mathbb{N}$

$\frac{a}{b}$ несократима

если числитель сократим на m , то

$m_{\max}$

$ab = km$, где $k \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^2 - 8ab = k^2 m^2 - 8ab$$

$k^2 m^2 - 8ab$ должно делиться на m , тогда

$8ab$ должно делиться на m

~~если~~ ab если $\frac{a}{b}$ несократима, то они не имеют общих

простых множителей. тогда если ab делится на

m , то в m есть: только множителем a (1) ~~если~~
только множителем b (2)
множителем и a и b (3)

если (1), то $a+b$ не делится на m , аналогично (2) и (3)

~~так~~ следовательно если $8ab$ делится на m , а ab нет,

то $m_{\max} = 8$

Ответ: $m_{\max} = 8$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



14

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

$$2x^2-5x+3 = 2x^2+2x+1 + 2-7x$$

$$2-7x = t$$

$$2x^2+2x+1 = n$$

$$2x^2-5x+3 \geq 0$$

$$\sqrt{n+t} - \sqrt{n} = t$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$\sqrt{n+t} = t + \sqrt{n} \Rightarrow t \geq 0$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1,5 \\ 1 \end{cases}$$

$$n+t = t^2 + 2\sqrt{n}t + n$$

$$x \geq 1 \vee x \geq 1,5$$

$$t^2 + 2\sqrt{n}t - t = 0$$

$$t(t + 2\sqrt{n} - 1) = 0 \Rightarrow t = 0 \quad t + 2\sqrt{n} - 1 = 0$$

$$t = 0 \Rightarrow 2-7x \geq 0$$

$$2-7x + 2\sqrt{2x^2+2x+1} + 1 = 0$$

$$x = \frac{2}{7} \quad 6023$$

$$4(2x^2+2x+1) = (7x-1)^2$$

$$44x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$x_6 = \frac{11}{44}$$

$$D = 22^2 + 4 \cdot 3 \cdot 41 = 976$$

$$\sqrt{D} = 4\sqrt{61}$$

$$x = \frac{11}{44} \pm 4\sqrt{61} \quad 6009$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{61}}{44} \quad x = \frac{22 \pm 4\sqrt{61}}{82}$$

$$\text{ответ: } x = \frac{2}{7} \quad x = \frac{22 \pm 4\sqrt{61}}{82}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5

Дано

$P(-12; 24)$

точки P и O лежат на прямой $y_1 = -2x_1 + 12$

$O(0; 0)$

тогда если другая прямая будет $y_2 = -2x_2 + 12$,⁽²⁾

$Q(3; 24)$

то $y_2 - y_1 = -2x_2 + 2x_1 + 12$

$R(15; 0)$

$$y_2 + 2x_2 - y_1 - 2x_1 = 12$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$n = ?$

зато это и есть наше условие.

получается, что если A и B лежат на этих
двух прямых и B на (2), а A на (1), то условие всегда
выполняется. на $y_1 = -2x_1$ в пределах фигуры:

$(0; 0) \rightarrow (-1; 2) (-2; 4) \dots (-12; 24)$ 13 точек.

столько же на второй. тогда количество пар

$$13 \cdot 13 = 169.$$

ур. прямой QR $y_3 = -2x_3 + 30$ (3)

тогда если $y_4 = -2x_4 + 18$ (4) то ситуация повторяет.

но B теперь на y_3 , а A на (4). $n = 169 + 169 = 338$

Ответ: $n = 338$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Если внутренним образом

$$\triangle ACO_1 \sim \triangle BCO_2$$

$$\frac{O_1C}{O_2C} = \frac{1}{2} \quad O_1C = x \quad O_2C = 2x$$

$$O_1O_2 = 3x = 8$$

$$x = \frac{8}{3} \Rightarrow CO_2 = \frac{16}{3}$$

$$\beta = \angle CBO_2 = \angle CO_2B \quad \cos \beta = \frac{2 \cdot 3}{16} = \frac{3}{8} \quad \text{из } \triangle CBO_2$$

$$\angle CBO_2 = \angle BDO_2 \quad \angle CO_2B = \angle BDO_2 = \beta$$

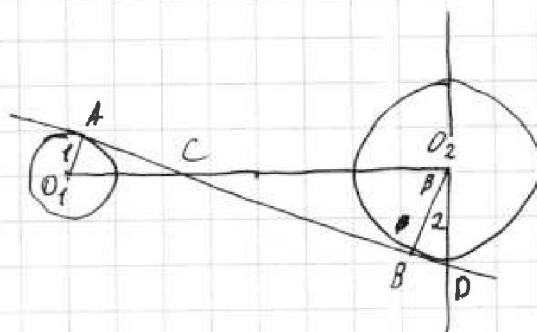
$$\sin \beta = \sqrt{1 - \frac{9}{64}} = \frac{\sqrt{55}}{8}$$

$$\text{из } \triangle DBO_2 \quad DO_2 = \frac{BO_2}{\sin \beta} = \frac{2 \cdot 8}{\sqrt{55}} \quad DO_2 = -10b$$

$$a = \frac{10}{16} \quad b = -\frac{1}{\sqrt{55}} \quad \text{и аналогично касательная "снизу вверх")}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{55}}$$

$$\text{Ответ: } a = \pm \frac{1}{\sqrt{55}} \quad a = \pm \frac{1}{\sqrt{63}}$$





1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 6

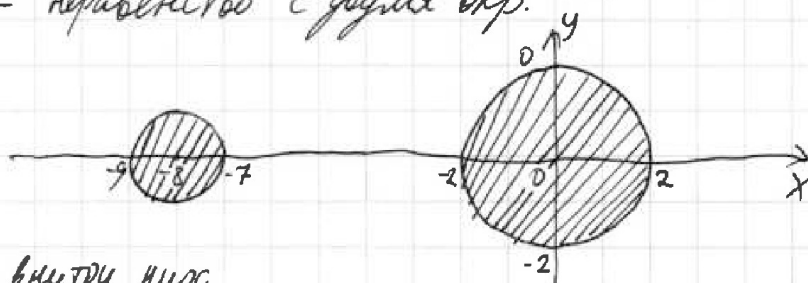
Дан
$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = ax + 10b & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

(1) - прямая (2) - неравенство с двумя окр.

$(x+8)^2 + y^2 = 1^2$

$x^2 + y^2 = 2^2$



и это выполняется только внутри них

тогда 2 решения если эта прямая касается этих двух окр. : если внешним образом, то

$\cos \alpha = \frac{2-1}{8} = \frac{1}{8}$ тогда $EA = 8$

$E(-16; 0)$

$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{64}} = \frac{\sqrt{63}}{8}$

при $x=0$ $y=10b \Rightarrow MD=10b$

$10b = \frac{2}{\sin \alpha}$ из $\triangle MDC$

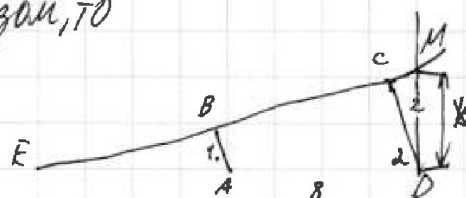
$10b = \frac{16}{\sqrt{63}}$

график через $E \Rightarrow y = ax + 10b$ $0 = -16a + 10b$

$a = \frac{10b}{16} = \frac{1}{\sqrt{63}}$

то $a = -\frac{1}{\sqrt{63}}$

и если снизу идёт касательная,



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7

Дано

$$\angle AM = \angle MB \Rightarrow$$

$$\angle AM = \angle MB$$

$$AE = EB$$

$$\angle AN = \angle NC$$

$$\angle AN = \angle NC \Rightarrow$$

$$ME = 4,5$$

$$\Rightarrow AH = HC$$

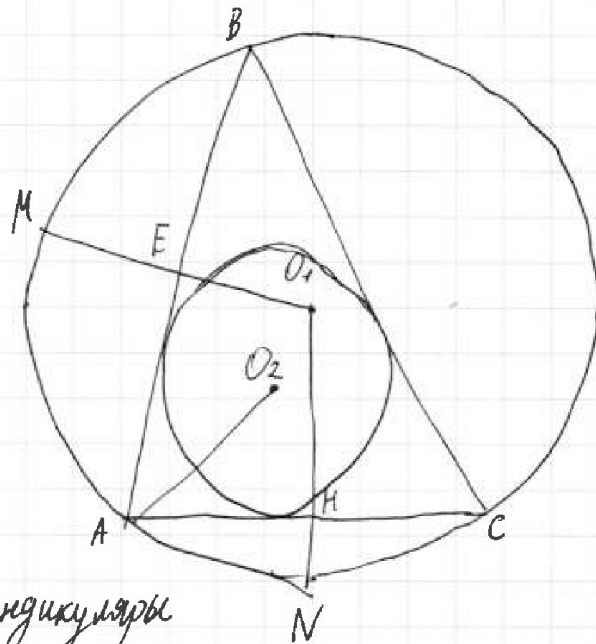
$$NH = 2$$

тогда ME и NH

$$AO_2 = ?$$

серединные перпендикуляры

и пересек. в центре описанной окр.



O_2 - центр ~~биссектрис~~ впис. окр $\Rightarrow O_2$ - пересечение биссектрис.

$\angle AM = \angle MB \Rightarrow M$ лежит на CO_2 . аналогично N на BO_2

по теореме $BO_2 = 2O_1H$ $CO_2 = 2O_1E$

$$BO_2 = 2(R - 4,5) = 2R - 9 \quad CO_2 = 2(R - 2) = 2R - 4$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

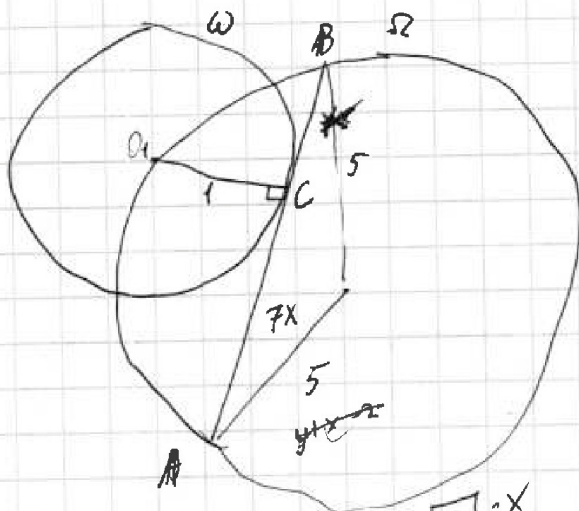
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Номера QR-кода недопустимы!

МФТИ



$$D = 484 + 4 \cdot 3 \cdot 41 = 484 + 492 = 976$$



$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \sin \alpha \quad \alpha = \angle O_1 B A$$

$$10 = \frac{O_1 A}{\sin \alpha}$$

$$10 = \frac{O_1 A \sqrt{x^2+1}}{1} = O_1 A \sqrt{x^2+1}$$

$$10 = \sqrt{49x^2+1} \sqrt{x^2+1}$$

$$100 = 49x^4 + x^2 + 49x^2 + 1 = 49x^4 + 50x^2 + 1$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$976 = 488 \cdot 2$$

$$244 \cdot 4$$

$$122 \cdot 8$$

$$61 \cdot 16$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \sqrt{4x^2} = x + \sqrt{y}$$

$$B = 4 - 8$$

$$x + x = x^2 + 2x\sqrt{y} + x \quad \epsilon = 1$$

$$x_8 = -\frac{50}{98}$$

$$x + 2\sqrt{y} = 0$$

$$2x^2 - 5x + 9 = 0$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{4} = 1$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 9} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 9} = 2 - 7x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$x = 0 \Rightarrow 2 - 7x = 2$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$2 - 7x + 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 1 = 0$$

$$1 - 7x + 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 7x - 1$$

$$4(2x^2 + 2x + 1) = 49x^2 - 84x + 1$$

$$8x^2 + 8x + 4 = 49x^2 - 84x + 1$$

$$41x^2 - 92x - 3 = 0$$

$$2x^2 - 5x + 9 =$$

$$= 2x^2 + 2x + 1 + (2 - 7x)$$

$$2 - 7x + 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 0$$

$$1 - 7x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 0$$

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + 2 = (7x - 8)^2 = 49x^2 - 42x + 9$$

$$2x^2 - 22x = 22$$

$$47x^2 - 44x + 8 = 0$$

$$45x^2 - 46x + 7$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} ab &= 2^{14} 7^{20} \\ bc &= 2^{17} 7^{17} \\ ac &= 2^{20} 7^{37} \end{aligned}$$

$$b^2 = 2^{14+17-20} 7^{10+17-37} = 2^7 7^{-10}$$

7 не может быть

$$\frac{ab - ac}{bc} = a^2 = 2^{14+20-17} 7^{37+10-17} = 2^7 7^{30}$$

$$\frac{ab}{bc} = \frac{2^{14} 7^{20}}{2^{17} 7^{17}} = 2^{-3} 7^3$$

$$\begin{aligned} b \in \mathbb{N} \Rightarrow ab &= 2^{14} 7^{20} \\ bc &= 2^{17} 7^{17} \\ ac &= 2^{20} 7^{37} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^2 &= 2^{20+17-14} 7^{37+17-10} = 2^{23} 7^{44} \\ a^2 b^2 c^2 &= 2^{14+17+20} 7^{20+17+37} = 2^{51} 7^{64} \end{aligned}$$

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{51} 7^{64}$$

$$abc = 2^{26} 7^{32}$$

$$\frac{a^2 - 6ab + b^2}{b} = \frac{a^2 - 6ab + b^2}{b}$$

$$(a+b)/m \Rightarrow a+b = km$$

$$a^2 - 6ab + b^2 / m$$

$$(a-b)^2 - 4ab$$

$$(a+b)^2 - 8ab \quad | m$$

$$k^2 m^2 - 8ab \quad | m$$

$$8ab \quad | m$$

$$8(6b^2)/b$$

$$8(6b^2 + 8bb)$$

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b} = \frac{200}{10000} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50} \\ & \frac{a}{b} = \frac{144}{136} = \frac{36}{34} = \frac{18}{17} \end{aligned}$$

$$\frac{144}{136}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{608}{504} = \frac{38}{31.5}$$

$$\frac{16}{256-504}$$

$$\frac{16}{256-504}$$

$$256 + 248 = 504$$

$$\frac{16}{248}$$

$$\frac{8}{124}$$

$$\frac{4}{62}$$

$$\frac{2}{31}$$



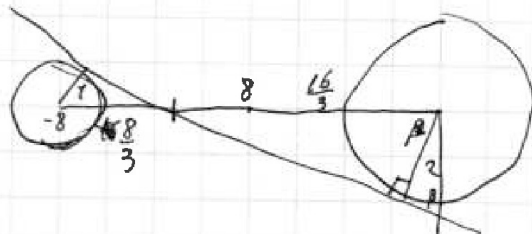
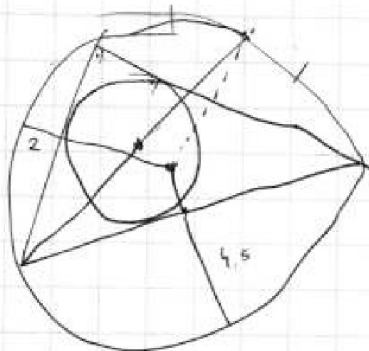
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



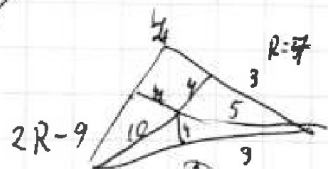
$$2x = 8$$

$$x = \frac{8}{3}$$

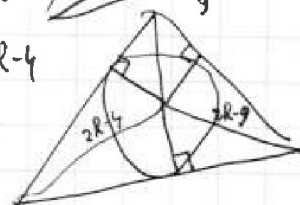
$$\cos \beta = \frac{2 \cdot 3}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \frac{9}{64}} = \frac{\sqrt{55}}{8}$$

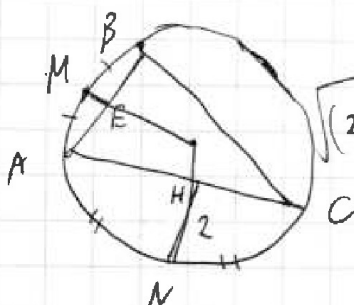
$$\frac{2 \cdot 8}{\sqrt{55}} = \frac{16}{\sqrt{55}}$$



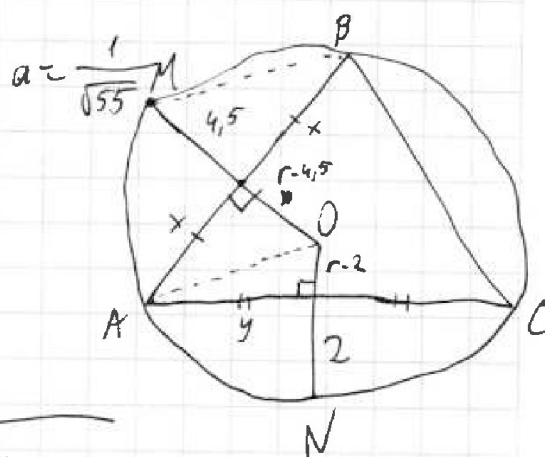
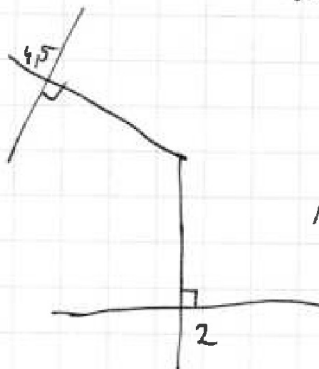
$$2R - 4$$



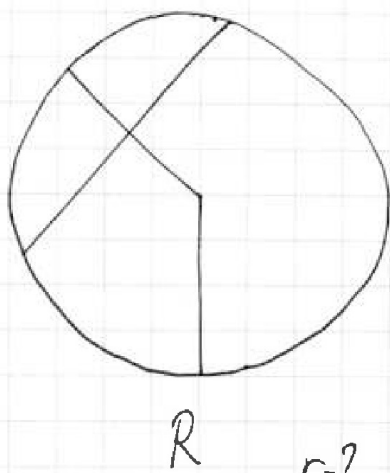
$$ME = 4,5$$



$$\sqrt{(2R-4)^2 + r^2}$$

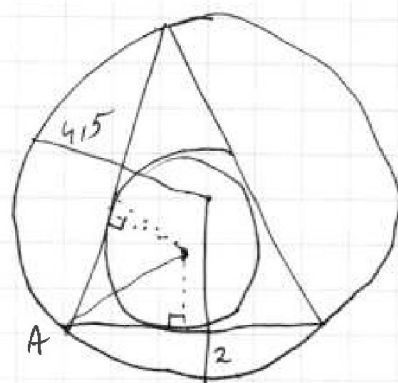


$$x^2 + (r-4,5)^2 = y^2 + (r-2)^2$$



$$R$$

$$r = ?$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

☐

2

☐

3

☐

4

☐

5

☐

6

☐

7

☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6

$$ax - y + 10b = 0$$

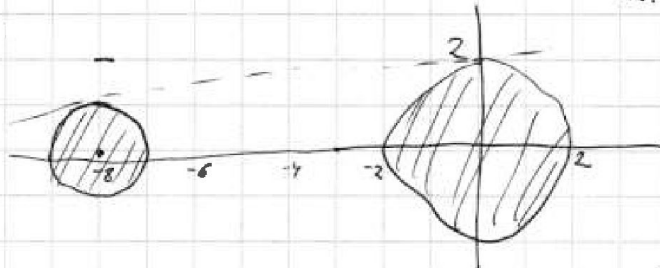
$$y = \sqrt{4 - a^2} + \frac{1}{2\sqrt{4 - a^2}} |x - a|$$

$$(x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

$$0 = \sqrt{4 - a^2} + \frac{-16}{2\sqrt{4 - a^2}} + \frac{a}{2\sqrt{4 - a^2}}$$

$$(x+8)^2 + y^2 = 1$$

$$x = -8 \quad y = 0$$



$$y = ax + 10b$$

касание сверху и снизу

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{63}}{8}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{63}}{8}$$

$$\sqrt{63}$$

$$\cos \alpha =$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{63}{64}}$$

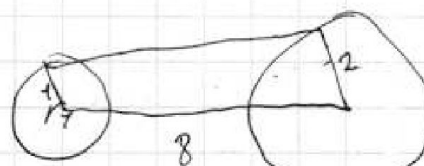
$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{64}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{8}$$

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{4 - x^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{8}$$

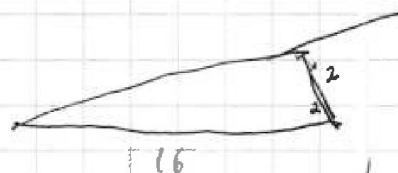


$$x = -16 \quad y = 0$$

$$0 = -16a + 10b$$

$$a = \frac{10}{16} b$$

$$a = \frac{10}{16} b$$



$$2 \cdot \frac{\sqrt{63}}{8} = \frac{\sqrt{63}}{4}$$

$$2 \cdot \frac{8}{\sqrt{63}} = \frac{16}{\sqrt{63}}$$

