



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

и помирим $\min$ вышам на корень из 3^{17} , т.е.
а в данном случае не каноническое, т.е. $\deg_3(a) \geq 9$
Значит, $\deg_3(b) \quad \deg_3(abc) \geq 3^{30}$, т.е.
 $abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$ (иначе, иначе-то у чисел $a, b, c \notin \mathbb{N}$
~~Приведем пример, когда равенство достигается, это~~
~~и будет ответом на вопрос задачи:~~
 $a = 2^4 \cdot 3^9$. Рассмотрим теперь, если $\deg_5(abc) = 28$,
то у нас все неравенство, что мы хотим получить
получим, $\deg_5(a) = 13$ Это в т.ч. мы знаем, что $\deg_5(b) \geq 0$,
иначе число - неканоническое и $ac: 5^{28}$, то
 $\min \deg_5(abc) = 28 \Rightarrow abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$.
Приведем пример, когда достигнуто равенство,
это и будет ответом на вопрос задачи.
 $a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{13}$
 $b = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^0$
 $c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{15}$
 $abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$
 $ab: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$ - верно $bc: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$ - верно
 $ac: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$ - верно
Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^6 3^{13} 5^{11}$$

$$bc: 2^{14} 3^{21} 5^{13}$$

$$ac: 2^{16} 3^{25} 5^{18}$$

Обозначим за $\deg_2(x)$ - ^{степень} высшую степень двойки в числе x . Ил.н. $ab: 2^6$, то $\deg_2(a) + \deg_2(b) \geq 6$

(т.н. при умножении мы степени складывали)

$$\text{аналогично } \deg_2(b) + \deg_2(c) \geq 14 \quad (bc: 2^{14})$$

$$\deg_2(a) + \deg_2(c) \geq 16 \quad (ac: 2^{16})$$

Сложив три неравенства получим:

$$2(\deg_2(a) + \deg_2(b) + \deg_2(c)) \geq 36$$

$$\deg_2(a) + \deg_2(b) + \deg_2(c) \geq 18$$

$$\text{Ил.н. } abc: 2^{18} \Rightarrow \min \deg_2(abc) = 18 \Rightarrow abc \geq 2^{18}$$

Аналогичные действия проводим с третьей

и пятеркой, откуда получаем $\min \deg_3(abc) =$

$$= 29,5; \quad \min \deg_5(abc) = 26$$

$$\text{Значит, } abc \geq 2^{18} \cdot 3^{29,5} \cdot 5^{26}$$

Ил.н. у тройки нецелая степень, посмотрим внимательнее

$$\text{на то, что выходит. } \deg_3(a) + \deg_3(b) \geq 13$$

$$\deg_3(b) + \deg_3(c) \geq 21$$

$$\deg_3(c) + \deg_3(a) \geq 25$$

Пусть $\deg_3(a) = x$, если мы в неравенствах перемещаем равенство, то $\deg_3(c) = x + 8 \Rightarrow$ у тройки получаем $\deg_3(a) = 8,5$, т.е. $\frac{17}{2} \Rightarrow$ но $a \in \mathbb{N}$, а степени двойки

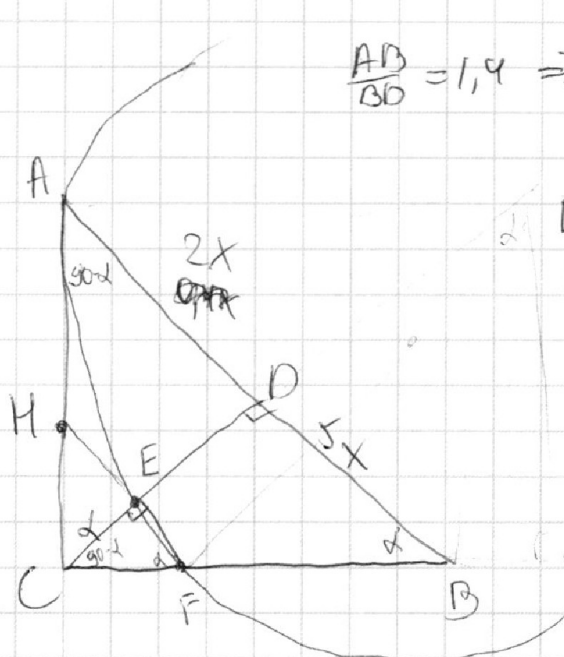
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AB}{BD} = 1,4 \Rightarrow BD = \frac{1}{1,4} AB = \frac{5}{7} AB \Rightarrow AB = \frac{7}{5} BD \Rightarrow AB = 2x$$

$EF \parallel AB \Rightarrow \text{т.е. } \angle CDB = 90^\circ$
(CD - высота), то

$\angle CEF = 90^\circ \Rightarrow \triangle CEF$ - прямоугольный.

CD - высота из прямого угла $\Rightarrow CD = \sqrt{2x \cdot 5x} = \sqrt{10}x$

$\triangle CDB$ - прямоугольный $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{по теореме Пифагора: } CB = \sqrt{CD^2 + DB^2} = \sqrt{10}x$$

прямоуг. $\triangle CEF \sim \triangle CDB$ ($\angle C$ - общий) $\Rightarrow \frac{CE}{CF} = \frac{CD}{CB} =$

$$= \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{\sqrt{2}}{7}. \text{ Умножим } EF \text{ на пересечение } AC.$$

$EF \cap AC = H. \triangle HCF \sim \triangle ABC$ (оба прямоугольные и $HF \parallel AB \Rightarrow \angle CFH = \angle B$

$\triangle ABC$ - прямоугольный $\Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{14}x$

$$\text{Обозначим } HC = y \Rightarrow AH = \sqrt{14}x - y$$

т.е. $\triangle ABC \sim \triangle HCF$ то CE и CD - катеты, высоты

$$\text{у этих треугольников, то } \frac{HE}{EF} = \frac{AB}{DB} = \frac{2}{5}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ндр. $\frac{HF}{HC} = \frac{AB}{AC} = \frac{4x}{\sqrt{14}x} = \frac{4\sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{2}$

$$HF = \frac{\sqrt{14}}{2} HC = \frac{\sqrt{14}}{2} y$$

$$HE = \frac{2}{7} HF; EF = \frac{5}{7} HF \Rightarrow HE = \frac{\sqrt{14}}{7} y$$

Рассмотрим сечение точки H относительно
линии сечения, т.к. HA - перпендикуляр, то HF - сечение,
то $HA^2 = HE \cdot HF \Rightarrow (\sqrt{14}x - y)^2 = \frac{\sqrt{14}}{7} y \cdot \frac{\sqrt{14}}{2} y = y^2$

$$(\sqrt{14}x - y)^2 = y^2 \Rightarrow 14x^2 - 2\sqrt{14}xy + y^2 = y^2$$

$$\sqrt{14}x (\sqrt{14}x - 2y) = 0$$

$$x \neq 0 \Rightarrow \sqrt{14}x = 2y \Rightarrow y = \frac{\sqrt{14}x}{2}$$

$$\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{2}{7} S_{\Delta ABC} \quad (CD - \text{общая высота } \Delta; \text{ а } \frac{AD}{AB} = \frac{2}{7})$$

из того, что $y = \frac{\sqrt{14}x}{2}$ получаем $y = \frac{AC}{2}$. т.к. $HF \parallel AB$,

то HF - средняя линия $\Delta ABC \Rightarrow S_{\Delta HCF} = \frac{1}{4} S_{\Delta ABC}$

$$(k = \frac{1}{2}) \text{ а } \frac{S_{\Delta HCF}}{S_{\Delta ABC}} = k^2 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{EF}{HF} = \frac{5}{7} \Rightarrow \text{м.к. CE - общая высота } \Delta CEF \text{ и } \Delta HCF,$$

$$\text{то } S_{\Delta CEF} = \frac{5}{7} S_{\Delta HCF} = \frac{5}{28} S_{\Delta ABC}$$

$$\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta CEF}} = \frac{\frac{2}{7} S_{\Delta ABC}}{\frac{5}{28} S_{\Delta ABC}} = \frac{8}{5} = 1,6 \quad \text{Ответ: } 1,6.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(2) ; 1 случай : $-54a - b \geq 0 \Rightarrow -54a \geq 5\sqrt{25+36a^2}$

Пусть

$$\frac{-54a + 5\sqrt{25+36a^2}}{\sqrt{25+36a^2}} = 2$$

$$-54a = 7\sqrt{25+36a^2} \quad | \text{ } 18a$$

$$18a = \sqrt{25+36a^2} \quad a > 0 \rightarrow \text{возв. в } \text{выражение}$$

$$324a^2 = 25 + 36a^2$$

$$288a^2 = 25$$

$$a^2 = \frac{25}{288}$$

$$a = \frac{5}{12\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow b = -5\sqrt{25 + \frac{25}{72}} =$$

Очевидно, что

при втором случае

$$-54a - b < 0$$

$$\frac{54a + b}{\sqrt{25+36a^2}} = 2$$

$$54a = 7\sqrt{25+36a^2}$$

$$= -5\sqrt{5.3} =$$

$$= -\frac{75}{2\sqrt{2}}$$

Неравенство выполняется.

При втором случае a не существует.

Значит, прямая имеет вид:

$$y = -2\sqrt{2}x + 12$$

$$\frac{b}{6a} = \frac{-75 \cdot 12\sqrt{2}}{2\sqrt{2} \cdot 6 \cdot 5} = -15$$

Очевидно что функции, a не получится

$$\text{т.е. } a \in \left(\frac{5}{12\sqrt{2}}; +\infty\right)$$

$$\text{Выводим } a \in \left(-\frac{5}{12\sqrt{2}}; -\infty; -\frac{5}{12\sqrt{2}}\right) \text{ и } a=0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

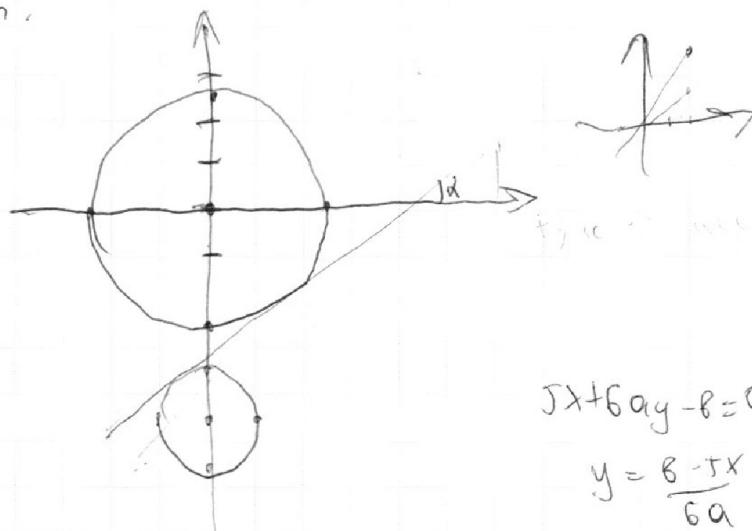
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Путем построения, что видно окружности касаются,
линию нет.



$$5x + 6ay - b = 0$$

$$y = \frac{b - 5x}{6a} = \frac{b}{6a} - \frac{5}{6a}x$$

$$\frac{b}{6a} = c$$

$$\text{т.е. } \frac{1-b}{\sqrt{5^2 + 36a^2}} \geq 5$$

$$\frac{1 - (54a - b)}{\sqrt{5^2 + 36a^2}} \leq 2$$

Рассмотрим случай касания обеих окружностей
(англ. кас.)
Понятно естественно, что параллельно переводя
прямую ниже не получится. Увеличив уменьшив
так угол α , у нас можно только не получится
пересечения обеих окружностей
Посмотрим на вид внутри, как.

$$\frac{1-b}{\sqrt{5^2 + 36a^2}} = 5$$

$$\frac{1 - (54a - b)}{\sqrt{5^2 + 36a^2}} = 2$$

$$b < 0 \Rightarrow (1) = 5\sqrt{5^2 + 36a^2} = b$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Прямая вида $y = kx + c$. Рассмотрим $k > 0$,

$$\text{т.е. } -\frac{5}{6a} > 0 \Rightarrow a < 0 \quad (a \neq 0)$$

Для того, чтобы рассмотреть это,

нужно проверить $a = 0$, т.е. $5x - 6 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{6}{5}. \text{ Очевидно, что } b = 0 \text{ пересекает,}$$

потому что прямая $x = 0$ пересекает через
диагонали обеих окружностей.

Также т.е. центры окружностей лежат
на прямой $x = 0$, но в одну сторону, если
 $a > 0$ пересекает, то $a < 0$ пересекает.

Если пересекает пересечение с окружностью, то
расстояние от центра до прямой меньше
радиуса. Напишем уравнение для каждой окружности.

Формула: $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} < r$

Для первой окружности получаем: $\frac{|1 - b|}{\sqrt{5^2 + 36a^2}} < 5 \quad (1)$

Для второй окружности: $\frac{|1 - 54a - b|}{\sqrt{5^2 + 36a^2}} < 2$

если $b > 0$, то $(1) \Rightarrow \sqrt{5^2 + 36a^2} > b \quad b > 0 \Rightarrow 6a^2 + b^2 > 0$
 $25 + 25 + 25 \cdot 36a^2 - b^2 > 0$
 $25 \cdot 36a^2 + 625 - b^2 > 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

В0 (2) пусть $-54a - b < 0$ ($b > 0; a > 0$) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow | -54a - b | = 54a + b$

$$\frac{54a+b}{254+\sqrt{25+36a^2}} < 2 \quad | \cdot \sqrt{25+36a^2} > 0$$

$$54a+b < 2\sqrt{25+36a^2} \quad 54a+b > 0 \Rightarrow \text{возв. в квадр.}$$

$$54^2 a^2 + 108ab + b^2 < 100 + 72a^2$$

$$2916a^2 - 2844a^2 - 108ab + 100 - b^2 > 0$$

Запишем систему:

$$\begin{cases} 900a^2 + 625 - b^2 > 0 \\ -2844a^2 - 108ab + 100 - b^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Phi_1 = -4 \cdot 900 \cdot (625 - b^2) = -3600 \cdot 625 + 3600b^2$$

$\Phi_2 \geq 0$, иначе т.е. $-2844 < 0$ не будем рассуждать

а, т.е. $\Phi_2 = 108b^2 + 4 \cdot 2844 \cdot (100 - b^2) = 1137600 - 11376b^2$

$+1137600 > 0$ при любом $b > 0$ верно

$$1137600 > 11376b^2 \quad a = \frac{108b \pm \sqrt{288b^4 + 1137600}}{-5688}$$

$$b^2 < 100 \Rightarrow b < 10 \quad a \in \left(\frac{108 + \sqrt{288b^4 + 1137600}}{-5688}; \frac{108 - \sqrt{288b^4 + 1137600}}{-5688} \right)$$

Заметим, что подставив во Φ_1 значение

b , получим, что $\Phi_1 < 0 \Rightarrow$ не все рассуждения
 а для второго, для первого тоже будем получать

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

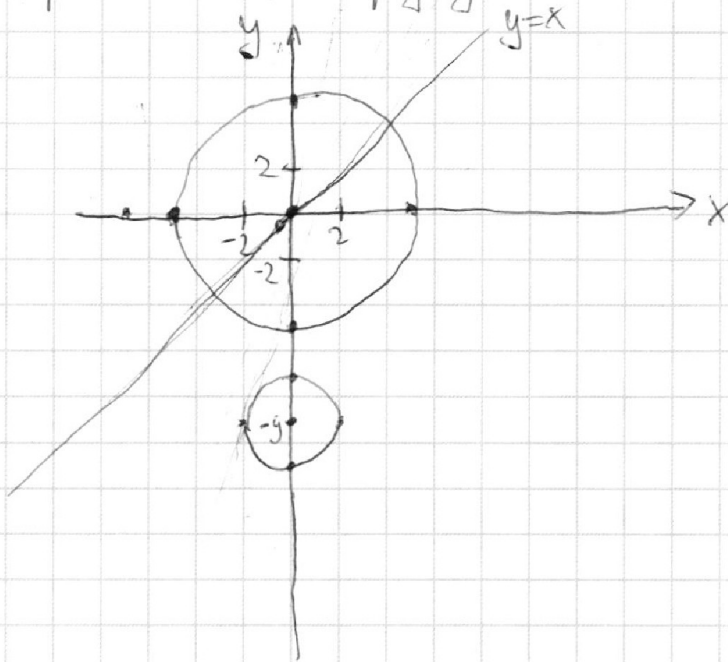
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 5x + 6ay - 6 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим (2): ~~мысли~~ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 + 18y + 77 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases}$

Графиком первого уравнения является окружность с центром $(0;0)$ и радиусом 5. Графиком второго уравнения является окружность с центром $(-9;0)$ и радиусом 2.



Рассмотрим лев (1): $5x + 6ay - 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{6-5x}{6a} = \frac{-5x}{6a} + \frac{6}{6a}$, $(a \neq 0)$

Т.е. графиком первого является прямая.

Прямая имеет с окружностью не более 2 точек пересечения.

Значит, для того, чтобы система имела 4 решения,
нужно, чтобы прямая пересекала обе окружности.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0. \text{ Если } t < 0, \text{ то } t^5 < 0; 5t < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^5 + 5t - \frac{16}{3} < 0. \text{ Противоречие.}$$

$t \neq 0 \Rightarrow t > 0$, Значит, t^5 - монотонно возр. функция

При $t > 0$; $5t$ - монотонно возраст. $\Rightarrow$

$\Rightarrow t^5 + 5t$ - монотонно возрастающая.

Значит, у нас будет ровно одно значение, когда

$$t^5 + 5t = \frac{16}{3}. \text{ Обозначим такое } t \text{ за } b.$$

Аналогично заметим, что $a^5 + \frac{16}{3} + 5a = 0$

Если $a > 0$, то $a^5 + 5a > 0 \Rightarrow$ такое б.в. не может, (знач. 0 при прибавл. $\frac{16}{3}$).

$a < 0$ ($a \neq 0$) $\Rightarrow a^5$ при $a < 0$ мон. убав.

$$\text{Заметим, что нам требуется } -b. \text{ Действительно, } -b^5 - 5b + \frac{16}{3} = b^5 + 5b - \frac{16}{3} = 0 \text{ (из первого).}$$

Больше значений нет. Т.е. $a^5 + 5a$ - мон. возр.

$$\text{Значит, } \text{кор}_{11} x = b \Rightarrow x = 1/b$$

$$\text{кор}_{11} 0,5y = -b \Rightarrow 0,5y = \frac{1}{11b}$$

$$0,5xy = 1/b \cdot \frac{1}{11b} = 1 \Rightarrow xy = 2$$

Ответ: 2



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{x11} = \log_{x3} \frac{1}{121} - 5 \quad \begin{matrix} x > 0 \\ x \neq 1 \end{matrix}$$

$$\log_{11} x = \frac{1}{\log_{x11}} \Rightarrow \frac{1}{\log_{x11}^4} - 6 \log_{x11} = \log_{x3} \frac{1}{121} - 5$$

$$\log_{11} x = t \quad \log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = \frac{-2}{3 \log_{11} x} - 5$$

$t \neq 0$ иначе не определено логарифм $\log_{11} x$ м.в. $x \neq 1$

$$\frac{1}{t^4} - 6t = -\frac{2}{3t} - 5 \quad t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3t} - 5$$

$$\frac{1}{t^4} + \frac{16}{3}t + 5 = 0 \quad t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$$

$$-\frac{16}{3}t^4 + 5t^5 - 1 = 0$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y11} = \log_{0,125y3} (11^{-13}) - 5 \quad \begin{matrix} y > 0 \\ y \neq 2 \end{matrix}$$

$$\frac{1}{\log_{0,5y11}^4} + \frac{1}{\log_{11,0,5y}} = -\frac{13}{3} \log_{0,5y11} - 5$$

$$\log_{11,0,5y} = a \quad a \neq 0 \text{ иначе не определено логарифм } \log_{11,0,5y} \text{ м.в. } y \neq 2$$

$$a^4 + \frac{1}{a} = -\frac{13}{3a} - 5$$

$$a^5 + \frac{16}{3} + 5a = 0$$

$$\text{Получаем, что } a^5 + 5 + 5(a+t) = 0$$

1) $a > 0; t > 0$ то тогда $a^5 + t^5 > 0; 5(a+t) > 0$
не можем быть

2) $a < 0; t < 0$ то тогда $a^5 + t^5 < 0; 5(a+t) < 0$
не можем быть



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

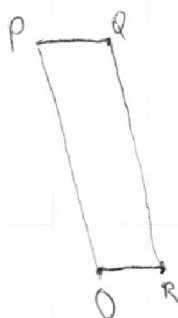
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пр. $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ и $48 \div 6$ и $6x_2 - 6x_1 \div 6$,
то $y_2 - y_1 \div 6$.



PO - прямая, содержащая вершину;

$y = kx$, подставив координаты точки P, получим

$$90 = -15k \Rightarrow k = -6$$

$$y = -6x$$

для QR - прямая, содержащая вершину $y = -6x + 102$

Значит, точки внутри или на границе параллелограмма - точки, удовлетворяющие:

$$y \geq 0; y \leq 90; y \geq -6x; y \leq -6x + 102$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

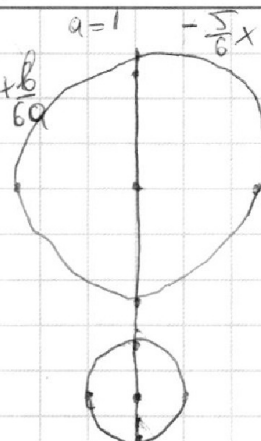
$$y = \frac{5x - b}{6a} \quad \frac{b - 5x}{6a} = \frac{-5x + b}{6a}$$

$$a=1 \quad -\frac{5}{6}x + \frac{b}{6a} = y$$

$$\begin{cases} 5x \cdot (x^2 + y^2 - 25) (x^2 + y^2 + 18y + 47) = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

$$(y+9)^2 + x^2 = 4$$

$$(y+9)^2 + x^2 = 4$$



$$CE \cdot CA = CF \cdot CY = AC^2 = 14x^2$$

$$Cx = \frac{14x^2}{y}$$

$$Cy = \frac{14x^2}{\sqrt{2}y}$$

$$\frac{196x^4}{2y^2} - \frac{196x^4}{2y^2}$$

$$\frac{196 \cdot 2.5x^4}{y^2}$$

$$= \frac{14 \cdot 0.5 \sqrt{10} x^2}{y}$$

$$= \frac{7 \sqrt{10} x^2}{y}$$

$$y = x - 4$$

$$x - 4 - y = 0$$

$$\frac{1-4}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$-\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a} = y$$

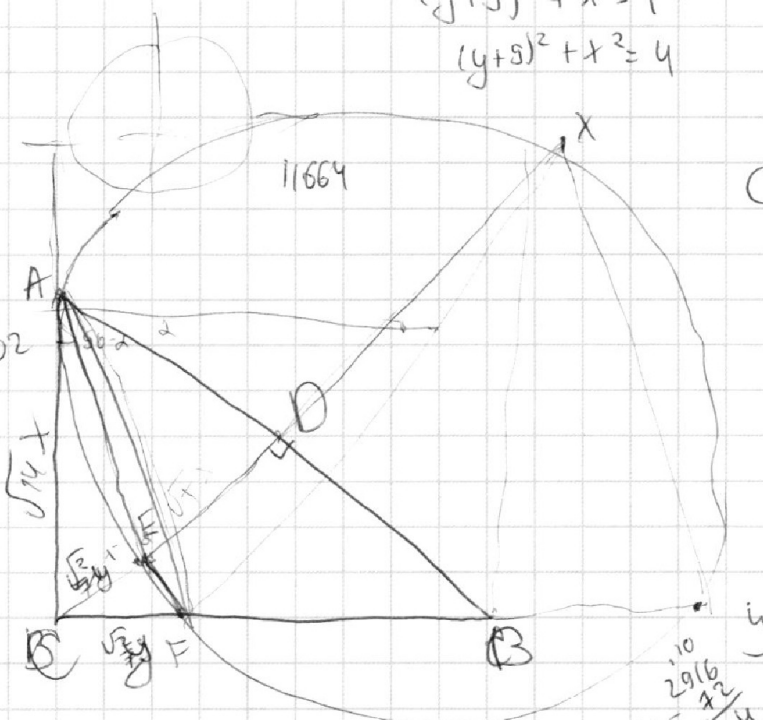
$$|ax_0 + by_0 + c|$$

$$\frac{|-b|}{\sqrt{5^2 + 6a^2}} = \frac{|-b|}{\sqrt{25 + 36a^2}} < 5$$

$$|+54a| = \frac{149}{\sqrt{25 + 36a^2}} < 2$$

$$\begin{array}{r} \times 108 \\ 108 \\ \hline 11664 \end{array}$$

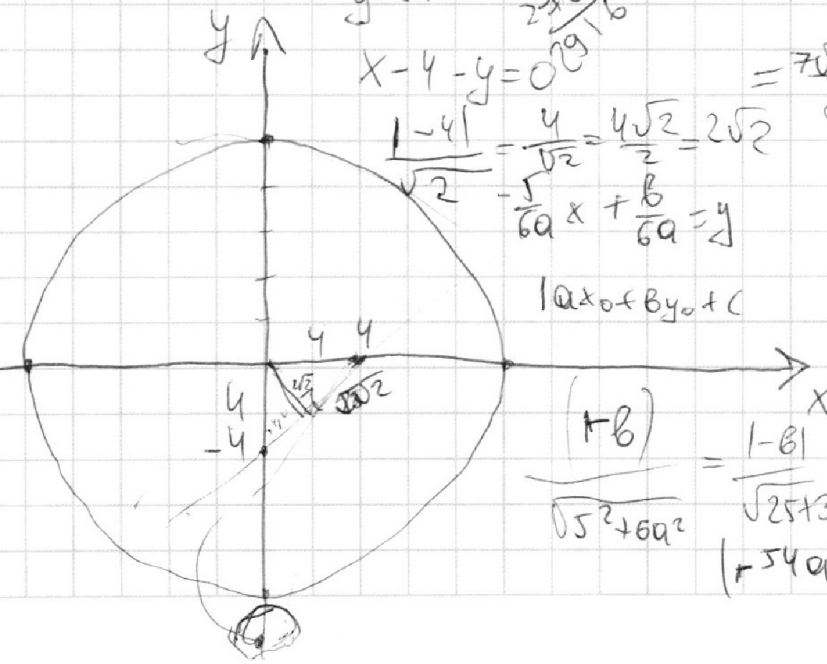
$$\begin{aligned} 0 &= 17x + b \\ 90 &= 2x + b \\ x &= -6 \\ y &= \end{aligned}$$



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ (y+9)^2 \end{cases}$$

$$\frac{5x - b}{6a} = y$$

$$\frac{5}{6a}x - \frac{b}{6a} = y$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^6 3^{13} 5^{11}$$

$$bc: 2^{14} 3^{21} 5^{13}$$

$$ac: 2^{16} 3^{25} 5^{28}$$

X

$$\deg_5(a) + \deg_5(b) \geq 11$$

$$\deg_5(b) + \deg_5(c) \geq 13$$

$$\deg_5(c) + \deg_5(a) \geq 28$$

$$2x + 2 = 28$$

$$x = 13 \quad b = -2$$

$$\frac{AC}{CF} = \frac{AD}{EC}$$

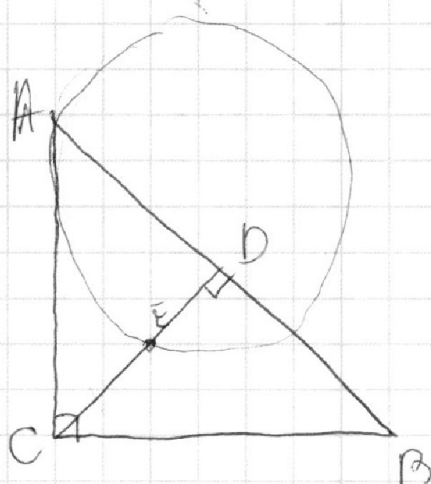
$$a = 2^{14} 3^{17} 5^{13}$$

$$b = 2^2 3^0$$

$$\frac{AC}{CF} = \frac{AD}{EC}$$

$$\begin{array}{r} 311 \\ 2844 \\ \times 4 \\ \hline 11376 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11376911268 \\ - 11268 \quad 100 \\ \hline 10800 \end{array}$$



$$\frac{\sqrt{1,4} x}{\sqrt{0,4} x} = \sqrt{3,5}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}$$

$$BC^2 = AB \cdot BD$$

$$1,4x^2$$

$$BC = \sqrt{1,4} x$$

$$\deg_2(a) + \deg_2(b) \geq 6$$

$$\deg_2(b) + \deg_2(c) \geq 14$$

$$\deg_2(a) + \deg_2(c) \geq 16$$

$$\deg_2(a+b+c) \geq 18$$

$$\deg_3(a+b+c) \geq 29,5$$

$$\deg_5(a+b+c) \geq 26$$

$$\min 218,3 \quad 29,5, 26$$

$$\deg_3(a) + \deg_3(b) \geq 13$$

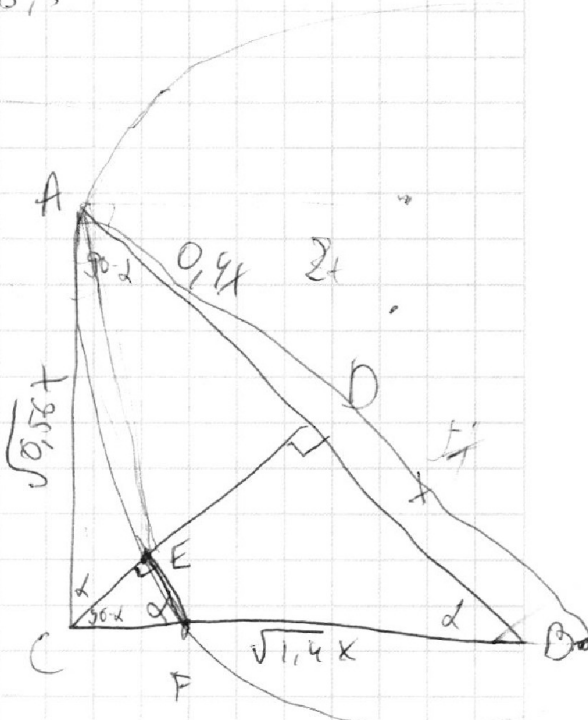
$$\deg_3(b) + \deg_3(c) \geq 21$$

$$\deg_3(a) + \deg_3(c) \geq 25$$

$$2x + 8 = 25$$

$$x = 8,5$$

$$1 \frac{2}{3} \frac{32}{243} + \frac{810}{243} = \frac{842}{243}$$



$$0,4x^2 = CD^2$$

$$CD = x \cdot \sqrt{0,4}$$

$$S_{\triangle ACD} = 0,4x^2 \sqrt{0,4}$$

$$\frac{CE}{CB} = \frac{CF}{CB}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



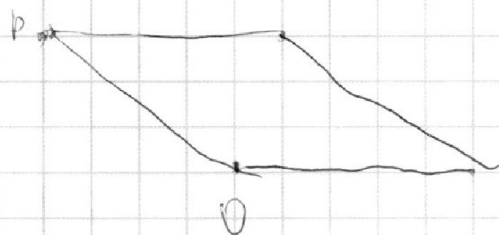
$$10\sqrt{1-x^2} = 9\sqrt{1-2x}$$

$$a^5 + t^5 + 5(a+t) = 0$$

$$\text{или } a > 0 \quad t < 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0 \\ t^5 - 5t - \frac{16}{3} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} t \leq 0 \quad t < 0 \\ t > 0 \end{array}$$

функция не монотонна



$$t(t+5) = \frac{16}{3}$$

$$\frac{2}{\sqrt{14}y} \cdot \frac{7}{\sqrt{14}y} = y^2$$

$$\frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$t = -6$$

$$\log_{11} x = 6$$

$$\log_{10} y = -6$$

$$(\sqrt{14}x - y)^2 = y^2$$

$$0,5xy = 1 \Rightarrow xy = 2$$

$$\sqrt{14}x = 2y$$

$$\frac{7}{\sqrt{14}}Ay$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{14}x}{7x} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

$$AC = \frac{\sqrt{14}}{7} AB$$

$$XF = \frac{7}{\sqrt{14}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

