



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

Если $a:b$ и $c:d$, то $ac:bd$, значит:

$$a \cdot b \cdot c : \cancel{2^{42}} \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot 2^{12} \cdot 3^{18} \cdot 5^{20} \\ = 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}, \text{ значит}$$

степень в каждой из цифр 2 в $a \cdot b \cdot c$ хотя бы 21, как и тройки хотя бы 21, иначе степени в $a^2 b^2 c^2$ были бы более 40, при этом $ac : 5^{30}$, значит $abc : 5^{30}$, итого:

$$abc : 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}, \text{ значит минимальное}$$

значение $a \cdot b \cdot c$ это и есть $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$,

пример:

$$a = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^{15}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^3$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{15}, \text{ несложно убедиться, что это подходит и}$$

$$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$\text{Ответ: } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}.$$



1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

А вторая точка пересечения:
 $(0; \sqrt{n^2-1} + n)$, пусть это точка
 H , тогда $CE \cdot CH = CB^2$, степень
точки B , вписанная двумя
способами.

Тогда, т.к. EF -параллельно
 AB , то имеет одинаковый угол
наклона: $AB = -2x + 2$. Пересечём
 AB и окружность в точке
 I ; $I E F B$ - вписанная трапеция,
значит трапеция вписанная и
 $IE = FB$, вернёмся к углу наклона;
 $EF = -2x + b$; и проходит через E
 $(0; n - \sqrt{n^2-1})$; $b = 2n - 2\sqrt{n^2-1}$
 $EF \Rightarrow y = -2x + 2n - 2\sqrt{n^2-1}$, пересекая
с CD , уравнение
 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, т.к. $\angle DCB = 30^\circ$;
 $\frac{\sqrt{3}}{3}x = -2x + 2n - 2\sqrt{n^2-1}$; пусть

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

уравнение окружности имеет
вид $(x-1)^2 + (y-r)^2 = r^2$, найдем
пересечение с AC; $x=0$ тогда
есть прямая $x=0$:

$$1 + (y-r)^2 = r^2 \Rightarrow (y-r)^2 = (r^2 - 1)$$

$y = \pm \sqrt{r^2 - 1} + r$, но по картинке,
только точка E и не другая
точки пересечения $\Rightarrow E(0; r - \sqrt{r^2 - 1})$.

$\angle ABC = 60^\circ \Rightarrow \angle DCB = 30^\circ$, прямая
CD проходит через $(0,0)$ и
имеет вид $y = kx$, где k -
тангенс угла наклона; $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$
 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, найдем пересечение с
уравнением окружности:

$$(x-1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x - r\right)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}xr + r^2 = r^2$$

$$\frac{4}{3}x^2 + x(-2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}r) + 1 = 0 \quad | \cdot 3$$

$$4x^2 + x(-6 - 2\sqrt{3}r) + 3 = 0$$



1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$r - \sqrt{r^2 - 1} = t; \quad \frac{\sqrt{3}}{3} x = -2x + 2t$$

$$x = \frac{2t}{(2 + \frac{\sqrt{3}}{3})}; \quad y = \frac{2\sqrt{3}t}{(6 + \sqrt{3})}; \quad x = \frac{2\sqrt{3}t}{2\sqrt{3} + 1}, \text{ под-}$$

ставим в уравнение окружности,

т.к. это координаты точки E:

$$\left(\frac{2\sqrt{3}t}{2\sqrt{3} + 1} - 1 \right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}t}{6 + \sqrt{3}} - r \right)^2 = r^2$$

$$\frac{12t^2}{(2\sqrt{3} + 1)^2} + \frac{12t^2}{(6 + \sqrt{3})^2} \quad \frac{2\sqrt{3}t}{2\sqrt{3} + 1} = a; \quad y = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

$$(a - 1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a - r \right)^2 = r^2$$

$$a^2 - 2a + 1 + \frac{1}{3}a^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}ar + r^2 + r^2 = 0$$

$$D = 12r^2 + 24\sqrt{3}r + 36 - 48$$

$$a = \frac{6 + 2\sqrt{3} - \sqrt{12(r^2 + 2\sqrt{3}r - 1)}}{8}$$

$$\frac{16\sqrt{3}t}{2\sqrt{3} + 1} = 6 + 2\sqrt{3} - \sqrt{12(r^2 + 2\sqrt{3}r - 1)},$$

Потому задачу можно интер-
претировать по-другому,

мы проводим параллельные

прямые EF, и они касаются

окружности около $\triangle EFB$, причём

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

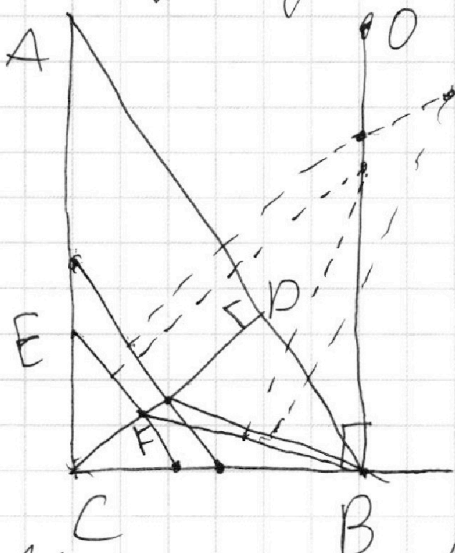
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Как мы помним треугольник у нас с углом 30° , то есть рассмотрим треугольник



мотори прищучо
ВО, перпендикуляр-
но СВ, на ней
должны лежать
центры окружностей
и заметим,

Что если будем двигать точку F , по CP , то пересечение сфер будет сдвигаться дальше, а значит у нас только одна точка F подходит и несомненно указать радиус окружности:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \arcsin(\cos x) = \pi + \frac{\pi}{2}$$

~~Запишем $\arcsin(\cos x)$~~

$$\cos = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$$

$$\arcsin \in [0; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$$

$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \sin^{-1} \frac{\pi}{2} - x \text{ при}$$

$$x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], \text{ тогда } (\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5\pi - 5x = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2\pi, \text{ что не}$$

входит в интервал ~~и не подходит~~

$$2) x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}] \Rightarrow \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) =$$

$$= 2\pi - \frac{\pi}{2} + x - \frac{\pi}{2} + x$$

$$(\frac{\pi}{2} + x) \cdot 5 = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 4x = 3\pi; x = \frac{3\pi}{4},$$

что подходит

$$3) x \in [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}] \Rightarrow \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) =$$

$$= 2\pi + \frac{\pi}{2} - x$$

$$(\frac{5\pi}{2} - x) \cdot 5 = x + \frac{\pi}{2}$$

$$12\pi = 6x; x = 2\pi, \text{ не подходит}$$

$$4) x \in [\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}], \text{ тогда}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$\sin(\arcsin(\dots$~~

$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = 2\pi + \frac{3\pi}{2} - x$$

$$5(2\pi + \frac{3\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{35\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 6x = 17\pi; x = 3,5\pi,$$

что вводим

$$5) x \in [\frac{4\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) =$$
$$= 4\pi - x + \frac{\pi}{2}$$

$$4,5\pi - x(\frac{9\pi}{2} - x) \cdot 5 = \frac{\pi}{2} + x$$

$$22\pi = 6x; x = \frac{22\pi}{6}, \text{ что вводим}$$

в интервал; т.к. $x \in [-\frac{\pi}{2}; 4,5\pi]$,
то мы рассмотрим все

лучше

$$\text{ответ: } \frac{3\pi}{4}; x = 2\pi; x = 3,5\pi;$$

$$x = \frac{22\pi}{6}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐

2 ☐

3 ☐

4 ☒

5 ☐

6 ☐

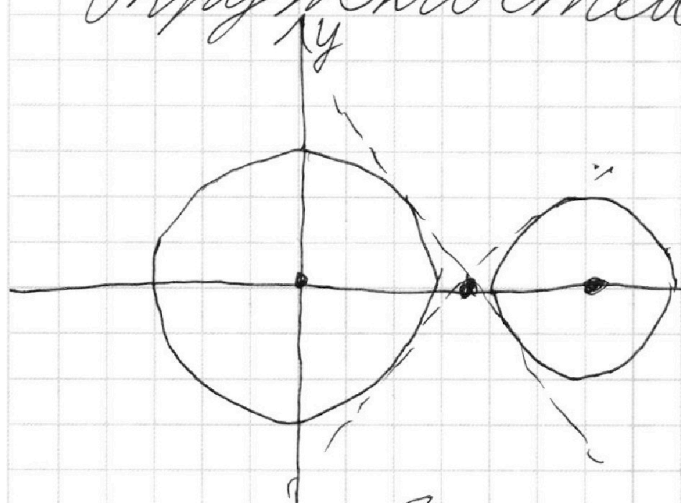
7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4
Из второго уравнения
либо $x^2 + y^2 = 9$; либо $(x-6)^2 + y^2 = 4$;
это являются уравнениями
окружностей: проведем

общие касатель-
ные, симмет-
ричные отно-
сительно
линии центров,
и выедем урав-



нения видов $y = kx + b$ и $y = -kx + b$,
т.к. углы наклона симметричны
и их пересечение лежит
на $x=0$; подставим $kx + b$,
в уравнения, тогда у уравнений
только одно решение:

$$x^2 + (kx + b)^2 = x^2 + k^2 x^2 + 2kbx + b^2 = 4$$

$$x^2(k^2 + 1) + 2kb \cdot x + b^2 - 4 = 0$$

$$D = 4k^2 b^2 - 4(k^2 + 1)(b^2 - 4) = 0$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Известное, что эта точка лежит
на радикальной оси этих окружностей
то есть: $b+2(b-3)(b+3) = b+4(4-b)(b-b)$

$$b^2 - 9 = b^2 - 10b + 24$$

$$b = 3,4 \quad b^2 - 3b = b^2 - 10b + 24$$

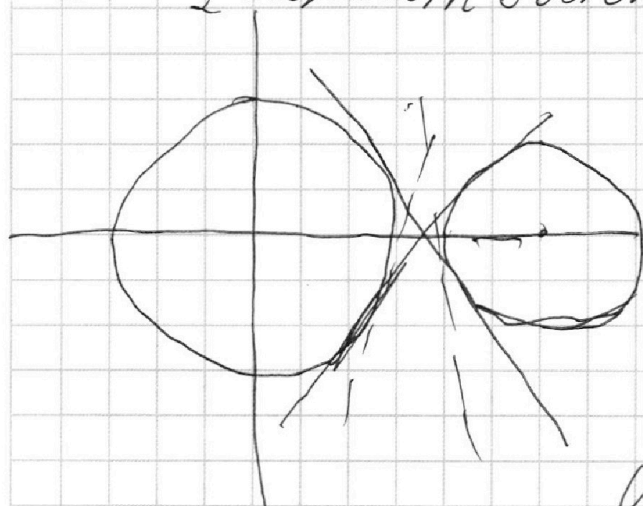
$$7b = 24; b = \frac{24}{7}; \quad 9k^2 - b^2 = 9;$$

$$9k^2 - 9 = b^2 = \frac{576}{49} \quad \left(\frac{24}{7}\right)^2 : 9$$

$$k^2 = \frac{24^2}{49} + 1$$

$$k = \sqrt{\frac{576}{49} + 1}, \text{ а теперь заметим,}$$

что $0 < x + 2y - 3b \Rightarrow y = -\frac{a}{2} + 1,5b$,
и $\frac{a}{2}$ лежит в интервале $[-k; k]$, т.к.



если угол наклона
больше k , то
даже проводя
касательную с
таким наклоном,

она не будет пересекать

вторую окружность:

Ответ: $[-2k; 2k]$, где $k = \sqrt{\frac{576}{49} + 1}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$D = 4k^2b^2 - 4k^2b^2 + 16k^2 - 4b^2 + 16 = 0$$

$$16k^2 - 4b^2 + 16 = 0; 4k^2 - b^2 + 4 = 0$$

$$(x-6)^2 + kx + b$$

$$D = 4k^2b^2 - 4k^2b^2 + 36k^2 - 4b^2 + 36 = 0$$

$$9k^2 - b^2 + 9 = 0$$

$$(x-6)^2 + (kx+b)^2 = 4$$

$$x^2 - 12x + 36 + k^2x^2 + 2kbx + b^2 = 4$$

$$x^2(k^2+1) + x(2kb-12) + b^2+32 = 0$$

$$D = (2kb-12)^2 - 4(k^2+1)(b^2+32) =$$

$$= 4k^2b^2 - 48kb + 144 - 4k^2b - 128k^2 -$$

$$- 4b^2 - 128 = 0$$

$$128k^2 + 4b^2 + 48kb - 16 = 0$$

$$9k^2 - b^2 + 9 = 0$$

$$32k^2 + b^2 + 12kb - 4 = 0$$

$$(b+6) \quad b^2 = 9k^2 + 9, \text{ причём}$$

в можно найти, на графике

эти координаты пересечения

этих крестовых:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 5

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log x^2 \cdot 243 - 8$$

$$\log_3 x = a \Rightarrow \log_x 3 = \frac{1}{a}; \log x^2 \cdot 243 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{a}.$$

$$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{2,5}{a} - 8 \quad | \cdot a$$

$$a^5 + 8a + 3,5 = 0.$$

$$5y = t \Rightarrow \log_3^4 t + 2 \log_t 3 = \log_t 2(3^{11}) - 8$$

$$\log_3 t = b \Rightarrow b^5 - 3,5 + 8b = 0$$

$$\begin{cases} a^5 + 8a + 3,5 = 0 \\ b^5 + 8b - 3,5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^5 + 8a = -3,5 \\ b^5 + 8b = 3,5. \end{cases}$$

$f(x) = x^5 + 8x$ — нечётная

функция, $f'(x) = 5x^4 + 8 > 0$ и

возрастающая, значит:

$a^5 + 8a = -3,5$, то при $b = -a$; $b^5 + 8b = 3,5$,

причём из возрастания такое
в точности, значит $a = -b$.

$$a = \log_3 x; b = \log_3 t$$

$$\log_3 x = -\log_3 t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3 x + \log_3 t = 0 \Rightarrow \log(xt) = 0 \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow xt=1 \Rightarrow 5xy=1; xy=0,2$, что
достигается независимо
на ОДЗ, например так $x=3;$
 $t=\frac{1}{3}; y=\frac{1}{15}$.
Ответ: $0,2$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

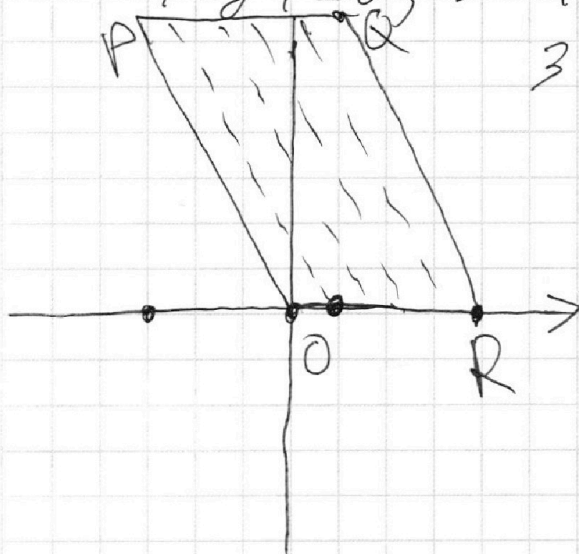
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 6

Попробуем найти сколько клеток
в параллелограмме удовлетворяет

$$3x_1 + y_1 = 0; \quad 3x_1 + y_1 = 1 \dots$$



$$3x_1 + y_1 = a; \quad y_1 = 3x_1 + a,$$

это прямые

PO имеет вид

$$y = -3x_1, \text{ значит}$$

внутри есть прямые

$$y = -3x_1; \quad y = -3x_1 + 1;$$

$$; \quad y = -3x_1 + 2 \dots \quad y = -3x_1 + 20; \quad \text{где } +60$$

$$PO \rightarrow y = -3x_1; \quad a \quad QR = -3x_1 + 20.$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33;$$

$$3x_2 + y_2 = 33 + 3x_1 + y_1, \text{ то есть}$$

значения $3x_2 + y_2$ принимаются

значения от 0 до 60; так же

как $x_1 + y_1$, применим: $y = -3x_1 + a$,

если $a = 0$, то значения y нас будет

4 значений

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Значит, из этого следует, что
решения у 6 $[0; 42]$, что очевидно
из графика: $y = -3x_1 + a$; если
 $a \equiv 0$, то решений 15, т.к. $a = 3k$ и
 $x_1 = k \Rightarrow y = 0$ и так x_1 на 3
повышаем как с нуля раз до 42
и будет 15 решений, а аналогич-
ным методом; если $a \equiv 1$, то
у это 1, 4... 40 - их 14 и если
 $a \equiv 2$, то их 14, значит
 $a = 0 \Rightarrow 15$; $a = 1 \Rightarrow 14$; $a = 2 \Rightarrow 14$...
 $a = 60 \Rightarrow 15$ и у нас образуются
пары $(a = 0; a = 33)$; $(a = 1; 34)$... $(27; 60)$
это пары при которых
 $3x_2 + y_2 = 3 + 3x_1 + y_1$, всего пар
28; 10, при которых a кратно
3 и 18 при которых не кратно,
тогда если $a = 0$ и $a = 33$, то

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Это $15 \cdot 15 = 225$ пар, если $a=1$ и
 $a=34$, то это $14 \cdot 14 = 196$ пар и всего
пар $10 \cdot 225 + 18 \cdot 196$, всего
пар с обоими на кратных
трём, и по 10 и в каждой по 225
решений, а в не кратных 3
и будет 18 пар a и $a+33$, и в каж-
дой 196 способов выбрать
Ответ: $10 \cdot 225 + 18 \cdot 196$.

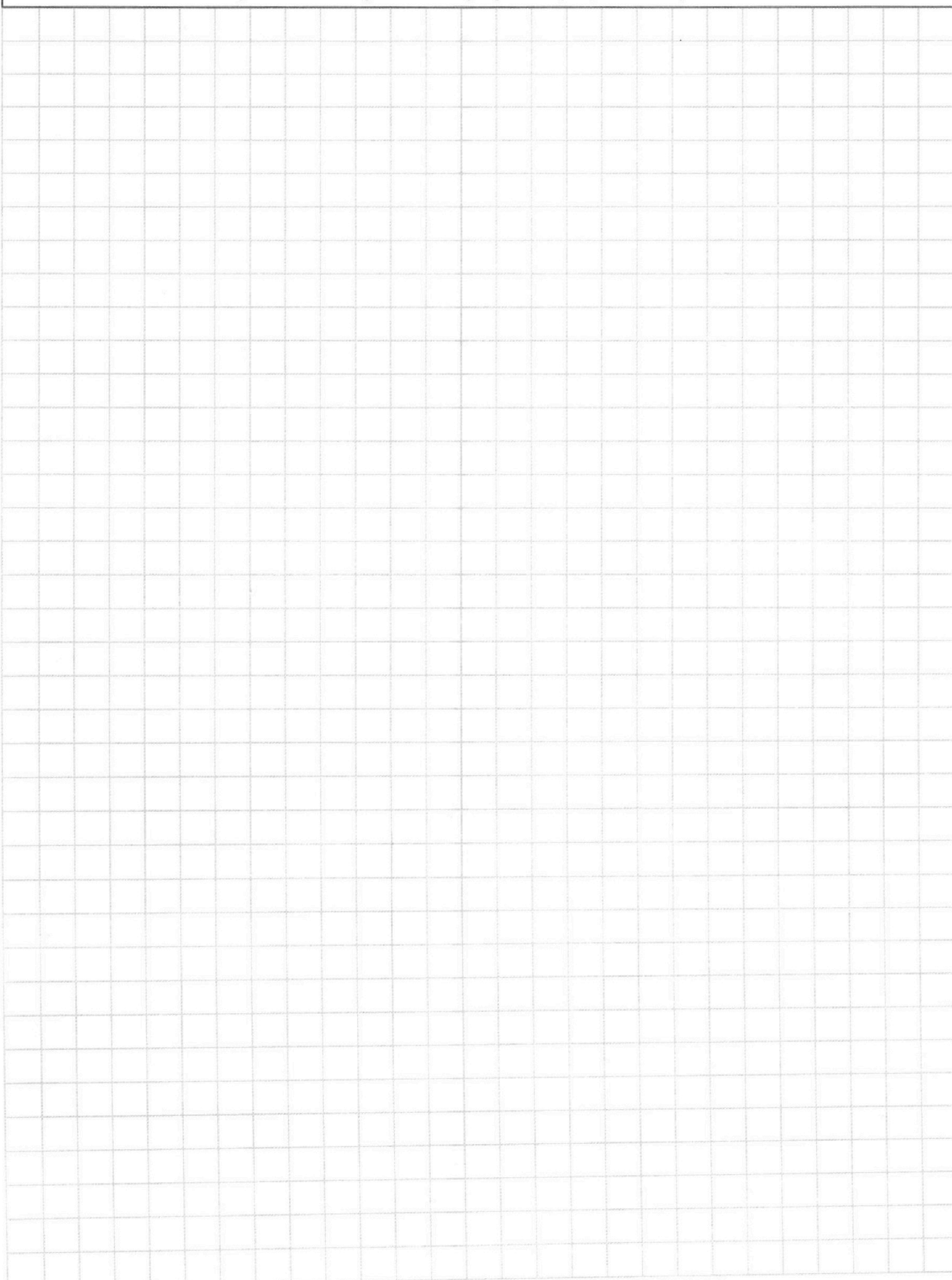


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

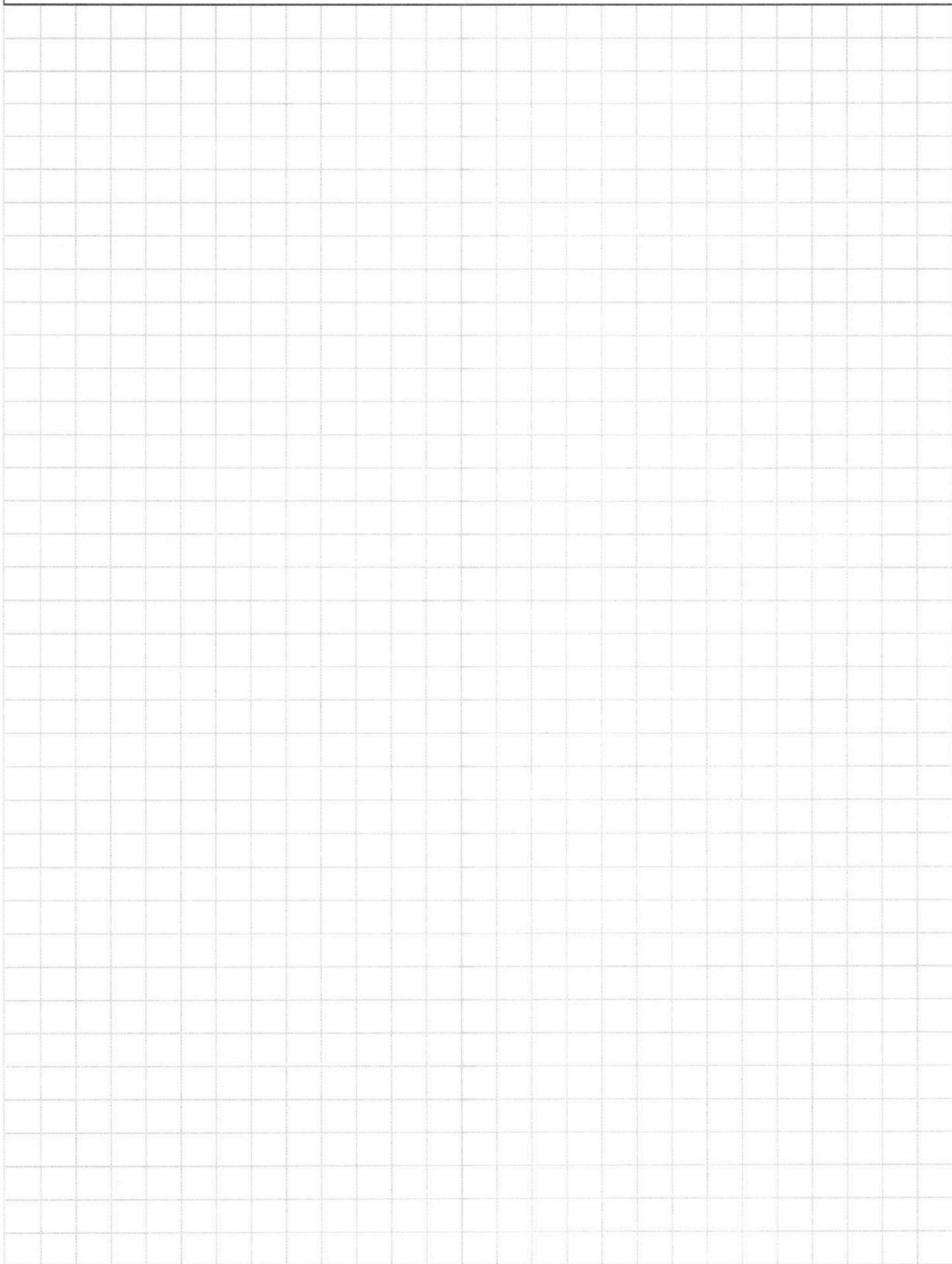
5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



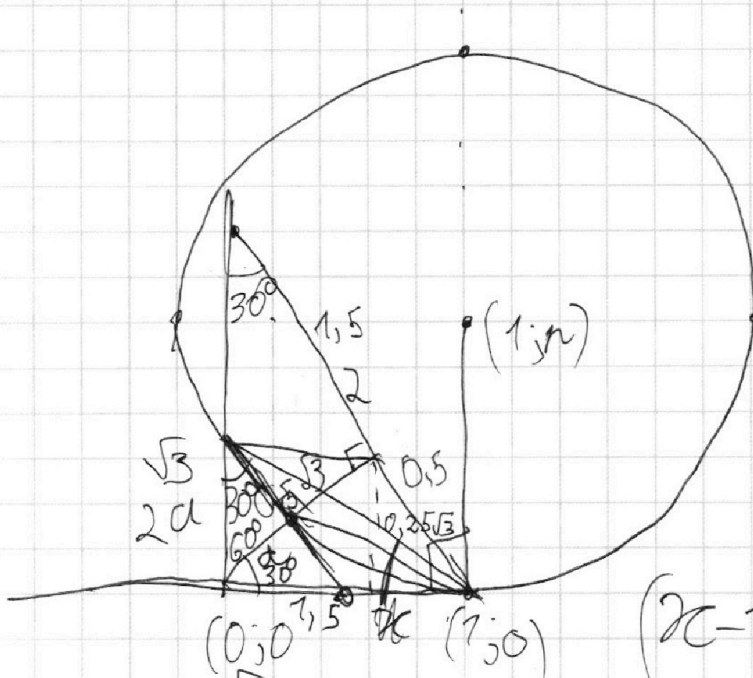
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{1}{2}a : \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \quad x = 0$$

$$\frac{a}{0.5\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

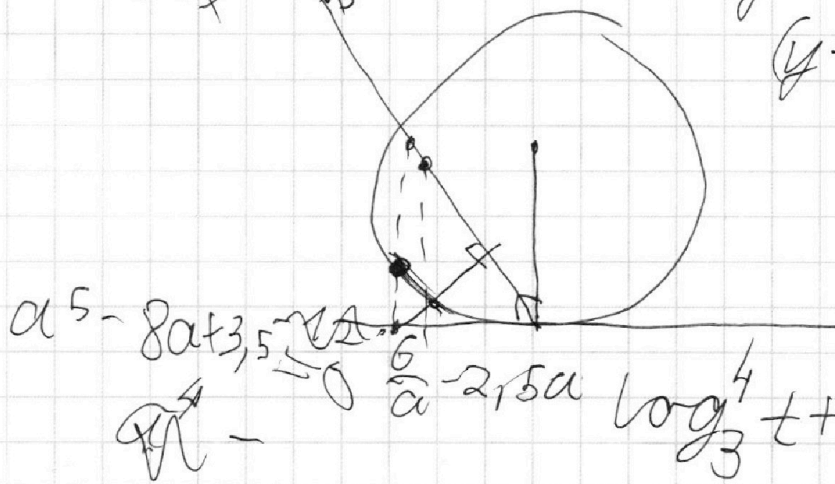
$$(x-1)^2 + (y-r)^2 = r^2$$

$$1 + y^2 - 2ry + r^2 = r^2$$

$$y^2 - 2ry + 1 = 0$$

$$(y-r)^2$$

$$5y = t$$



$$a^5 - 8a + 3.5 = 0 \quad \frac{6}{a} - 2.5a \quad \log_3^4 t + 2 \log t 3 = \log_t^{3.3}$$

$$\log_{\frac{a}{3}} 3 = a$$

$$a^4 + \frac{6}{a} \leq \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{a} - 8$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

☐☐☐☐☐☐☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 18$$

$$28 + 14$$

W

$$a^2 b^2 c^2 : 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^3$$

$$2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{24}$$

$$a + b = 9$$

$$a + b + c = 24$$

$$a + c =$$

$$a + b + c = 48 - 24 = 24$$

$$b + c = 14$$

$$c = 15 \quad b = -1$$

$$a + c = 19$$

$$a = 10$$

$$b - a \quad a - b = 5$$

$$a + b \geq 9$$

$$b = 2$$

$$a = 2^7 \cdot 3^7$$

$$a + b = 10$$

$$a = 4 \quad c = 12$$

$$b = 2^2 \cdot 3^3$$

$$b + c = 14$$

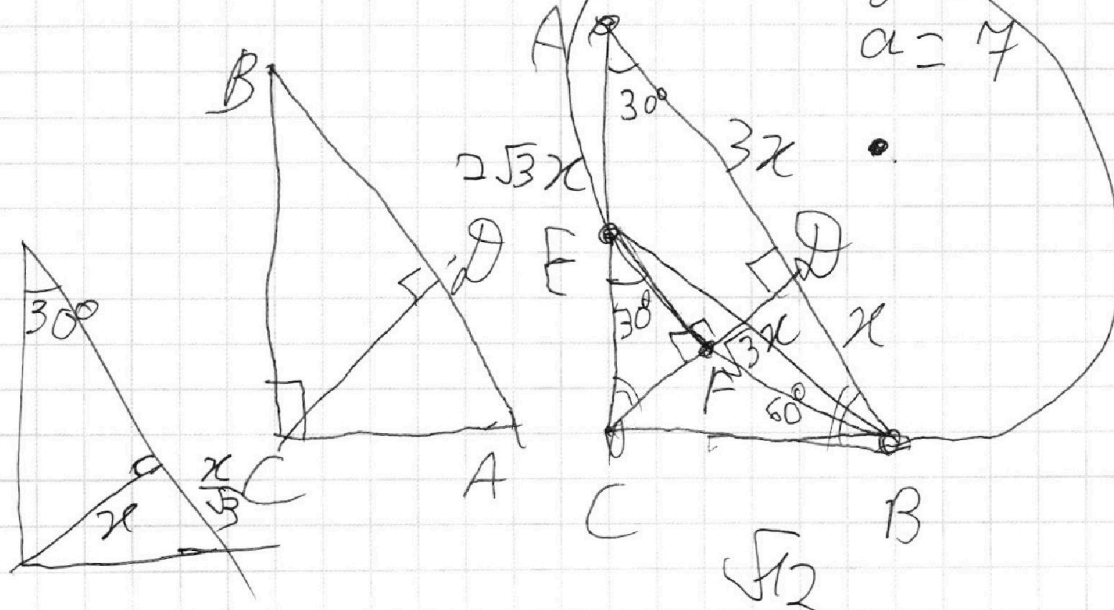
$$24$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{11}$$

$$a + c = 18$$

$$b = 3 \quad c = 11$$

$$a = 7$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} D &= 12n^2 + 24\sqrt{3}n + 36 - 48 = \\ &= 12(n^2 + 2\sqrt{3}n - 1) \end{aligned}$$

$$x = \frac{6 + 2\sqrt{3} \pm \sqrt{12(n^2 + 2\sqrt{3}n - 1)}}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= \frac{\sqrt{3}}{3}x = -6 \sqrt{n^2 + 2\sqrt{3}n - 1} + 6\sqrt{3} + 6 = \\ &= \sqrt{n^2 + 2\sqrt{3}n} + \sqrt{3} + 1 \end{aligned}$$

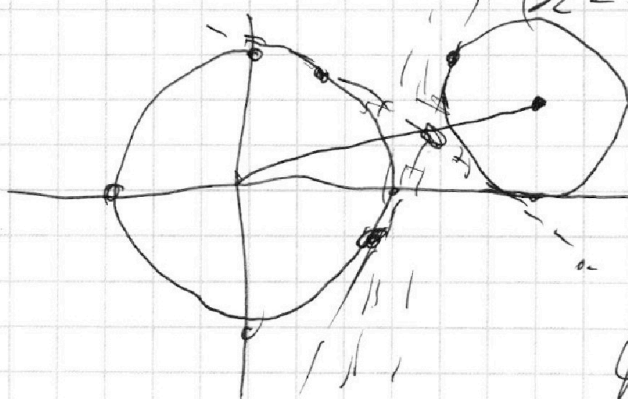
$$\sin x = \sqrt{\cos}$$

$$ax + 2y - 36 = 0$$

$$\sqrt{3} \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$\cos 3x$$

$$(x - 6)^2 + y^2 = 4$$



$$5 \arcsin(\cos x) = x \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin x) = x$$

$$y = \frac{a}{2}x + \frac{36}{2}$$

$$(-4, 12) \quad (6, 42)$$

$$x_1 y_1$$

$$3x_1 - y_1 = 33 + 3x_2 - y_2$$

$$1 -$$

$$\sin x = t$$

$$t = \arcsin x$$

$$\arcsin t = x$$

$$(0, 0) \quad (20, 0)$$

$$(2)$$



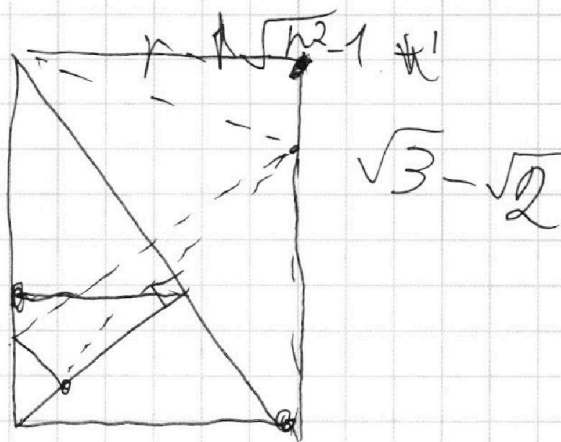
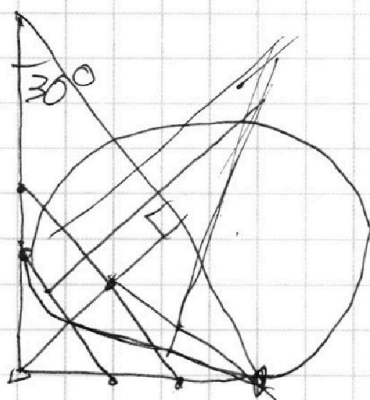
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

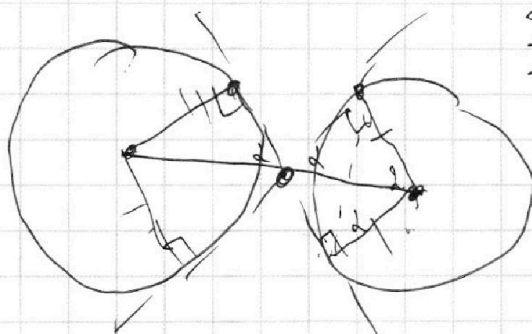
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x_1 - y_1 = 0$$

$$x + \frac{\pi}{2} = 5(x - \frac{\pi}{2})$$



$$3\pi = 4\pi$$

$$424$$

$$14$$

$$\frac{3\pi}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$