



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 1. $a, b, c \in \mathbb{N}$ пусть $l, n, k \in \mathbb{N}$ такие, что

$$ab = 2^4 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot l \quad bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \cdot k \quad ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \cdot n$$

умножив эти три уравнения получаем $(abc)^2 = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \cdot l \cdot k \cdot n$

$$abc = 2^{18} \cdot 3^{29} \cdot 5^{26} \cdot \sqrt{3lkn} \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{3lkn} \in \mathbb{N}$$

$$\text{пусть } \sqrt{3lkn} = m \in \mathbb{N} \quad m \geq 1$$

$$3lkn = m^2 \quad lkn = \frac{m^2}{3} \in \mathbb{N} \Rightarrow m \div 3$$

$$m=1: \sqrt{\frac{1^2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \notin \mathbb{N} \quad m=2: \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \notin \mathbb{N} \quad m=3: \sqrt{\frac{9}{3}} = 3 \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ ~~наименьшее~~ $m=3$, тогда $abc \in \mathbb{N}$,

$$\text{получаем } abc = 2^{18} \cdot 3^{29} \cdot 5^{26} \cdot 3 = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$$

примечание: $a=$! при том ~~заметим~~ заметим, что lk должно ^{хотя бы} делиться на 5^4 ,
 $b=$
 $c=$ т.к. $ab \cdot bc = b^2 \cdot ac$

пусть x_a, x_b, x_c - степени, в которых число 5 входит в a, b и c соответственно. $x_k = v_5(k)$, ~~тогда~~ $x_l = v_5(l)$, $x_n = v_5(n)$

$$\text{должно выполняться: } \begin{cases} x_a + x_b = 11 + x_l \\ x_a + x_c = 28 \\ x_b + x_c = 28 + x_k \end{cases} \quad \begin{aligned} 2x_b + 28 + x_l &= 24 + x_l + x_k \\ \Rightarrow x_l + x_k &\geq 4 \end{aligned}$$

т.к. $x_b \geq 0$,

то есть lkn делится на $3 \cdot 5^4$, ~~наименьшее~~ $m \Rightarrow m$ не меньше $3 \cdot 5^4$

$$abc \geq 2^{18} \cdot 3^{29} \cdot 5^{26} \cdot \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 5^4} = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

пример:

$$\begin{aligned} b &= 2^2 \cdot 3^4 & ab &= 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \\ a &= 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{11} & bc &= 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \cdot 5^4 \\ c &= 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{17} & ac &= 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \cdot 3 \end{aligned}$$

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

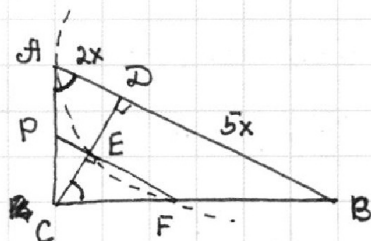
1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 2.



$$\frac{AB}{BD} = 1,4 = \frac{7}{5} \quad AB = 7x : BD = 5x, AD = 2x$$

$\angle BAC = \angle DCB$ т.к. CD - высота пр. Δ

$\angle CEF = \angle EDB = 90^\circ$ из $AB \parallel EF$

$\Rightarrow \Delta ACD \sim \Delta CFE$ по 2-м равным углам.

$k = \frac{AC}{CF} = \frac{EF}{CD}$ т.к. CA - касательная к окружности, а CF - секущая. Пусть $x=1$ (для отыскания не важно)

пусть $FE \cap AC = P$

т.к. AP - касательная, а PF - секущая

$$AP^2 = PE \cdot PF$$

$$\frac{PE}{AD} = \frac{CP}{AC}$$

$$\frac{PF}{AB} = \frac{CP}{AC}$$

из $PF \parallel AB$

$$AP^2 = \frac{AD \cdot CP}{AC} \cdot \frac{AB \cdot CP}{AC} = \frac{AD \cdot AB}{AC^2} \cdot CP^2 \Rightarrow \left(\frac{AP}{PC}\right)^2 = \frac{AD \cdot AB}{AC^2}$$

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB} = x\sqrt{10} \Rightarrow AC = x\sqrt{14} \text{ по т. Пифагора}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AP}{PC}\right)^2 = \frac{2x \cdot 7x}{(x\sqrt{14})^2} = \frac{14x^2}{14x^2} = 1 \quad \text{т.к. } AP = PC$$

$$EF = \frac{1}{2} DB = \frac{5x}{2} \quad k = \frac{EF}{CD} = \frac{\frac{5x}{2}}{x\sqrt{10}} = \frac{5}{2\sqrt{10}}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{1}{k^2} = \left(\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)^2 = \frac{40}{25} = 1,6$$

Ответ: $\boxed{1,6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



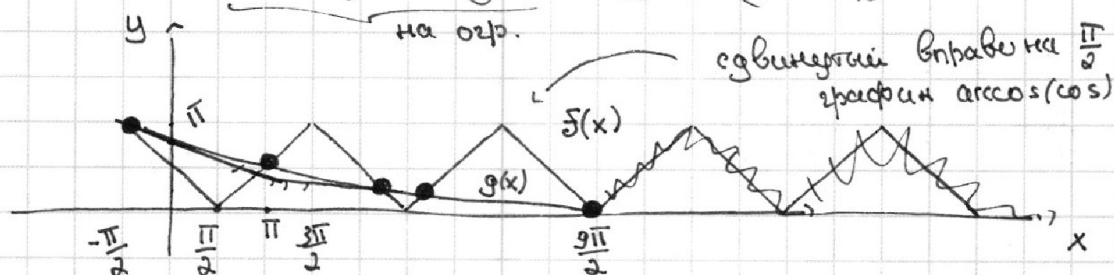
Задача 3.

$$f(x) = \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$0 \leq \arccos t \leq \pi \Rightarrow 0 \leq \frac{9\pi - 2x}{10} \leq \pi \quad \frac{9\pi}{2} \geq x \geq -\frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = \arccos(\cos(x - \frac{\pi}{2})) \quad g(x) = \frac{9\pi - 2x}{10} \quad g(0) = \frac{9\pi}{10}$$



графически видим все решения:

$$-\frac{\pi}{2} + x = \frac{9\pi - 2x}{10} \quad -5\pi + 10x = 9\pi - 2x \quad 12x = 14\pi \quad x = \frac{7\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{2} - x = \frac{9\pi - 2x}{10} \quad 25\pi - 10x = 9\pi - 2x \quad 8x = 16\pi \quad x = 2\pi$$

$$-\frac{5\pi}{2} + x = \frac{9\pi - 2x}{10} \quad 12x = 34\pi \quad x = \frac{17\pi}{6} \quad + \quad x = -\frac{\pi}{2} \quad x = \frac{9\pi}{2}$$

Ответ: $\frac{7\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, 2\pi, \frac{17\pi}{6}, \frac{9\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

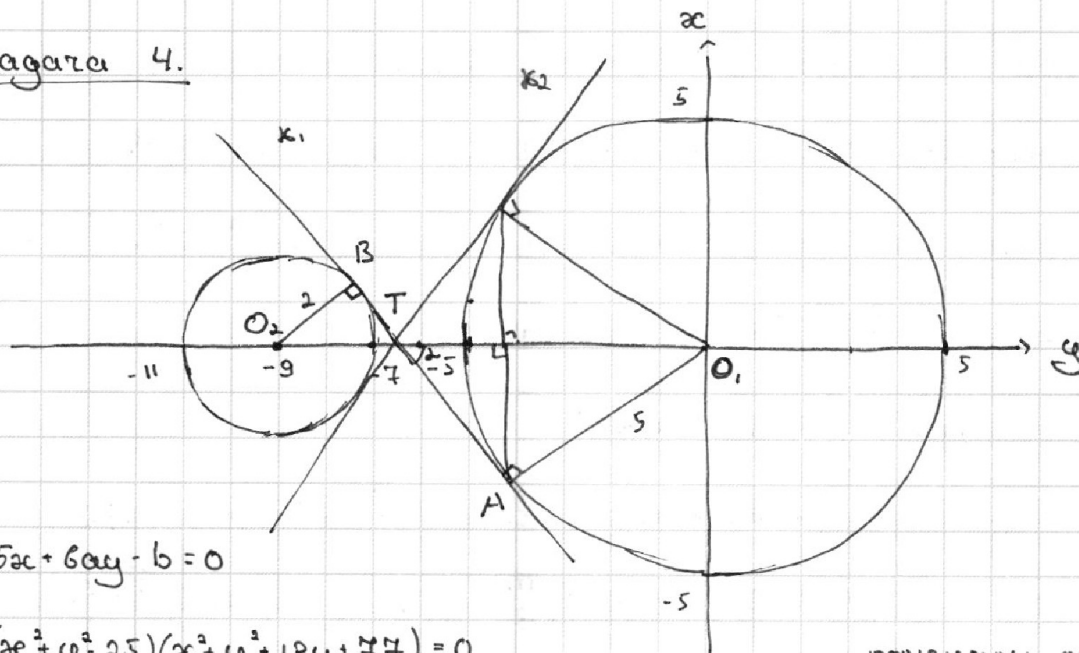
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4.



$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

поменяли оси местами!

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 & \text{уравнение окружности с } R=5 \text{ и центром в } (0;0) \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 & \text{уравнение окружности с } R=2 \text{ и центром в } (-9;0) \\ x = \frac{b}{5} - \frac{6a}{5}y & \text{параметрическое уравнение прямой} \\ l = \frac{b}{5} k & \end{cases}$$

$x = b - ky$ нужно найти такие наклоны k , при которых есть b такое, что прямая пересекает обе окружности (не касается)

Графически: подходит все k , кроме тех, что находятся между наклонами двух отмеченных прямых (на графике - общие внутр. касательные)

$$k_1 = -\tan \alpha$$

$$\frac{O_2T}{TO_1} = \frac{O_2B}{O_1A} = \frac{2}{5} \Rightarrow O_1T = \frac{9 \cdot 5}{7} \quad \sin \alpha = \frac{O_1A}{O_1T} = \frac{5}{\frac{9 \cdot 5}{7}} = \frac{7}{9}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{1 - \sin^2 \alpha} \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{1 - (\frac{7}{9})^2} = \frac{1}{1 - \frac{49}{81}} = \frac{81}{32}$$

находим $k_2 = \frac{7\sqrt{2}}{8}$ и $k_1 = -\frac{7\sqrt{2}}{8}$

$\Rightarrow$ подходят $-\frac{7\sqrt{2}}{8} \leq \frac{6a}{5} \leq \frac{7\sqrt{2}}{8}$ $\Rightarrow -\frac{35\sqrt{2}}{48} \leq a \leq \frac{35\sqrt{2}}{48}$

Ответ: $[-\frac{35\sqrt{2}}{48}; \frac{35\sqrt{2}}{48}]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

задача 5.

нужно $\log_{11} x = \frac{1}{3}$, тогда $\log_{x^{11}} = \frac{1}{\frac{1}{3}}$, $\log_{x^3} \frac{1}{121} = -\frac{2}{3} \log_{x^{11}} = -\frac{2}{3 \cdot \frac{1}{3}}$

a $\log_{11} 0,5y = s$, wegen $\log_{0,5y} 11 = \frac{1}{s}$, $\log_{0,125y^3}(11^{-13}) = -\frac{13}{3s}$

$$t^4 + \frac{6}{t} = -\frac{2}{3t} - 5 \quad t^4 + 5 = \frac{16}{3t} \quad (1) \quad \text{Sub } t=2$$

$$s^4 + \frac{p}{s} = -\frac{13}{3s} - 5 \quad s^4 + 5 = -\frac{16}{3s} \quad (2) \text{ заметим, что } s = -t \text{ - корни (2)}$$

~~Algebra 7427 210~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



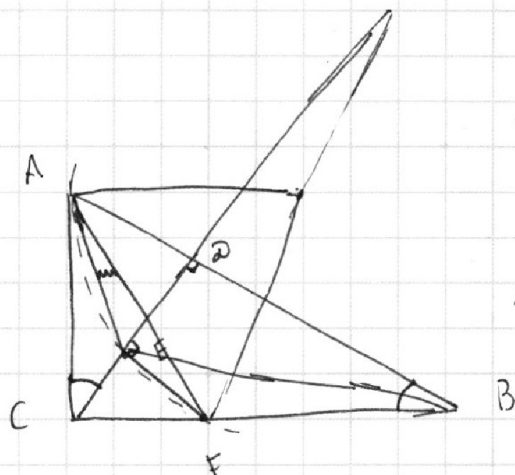
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{10}$$

$$2 \cdot 6$$

$$\frac{CF}{AC} = \frac{CE}{AD} = \frac{EF}{CD}$$

$$\frac{CF}{AC} = ?$$

$$\frac{PF}{AB} = \frac{CP}{AC}$$

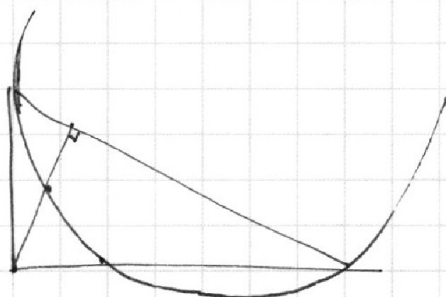
$$\frac{PE}{AD} =$$

$$PF = \frac{AB \cdot CP}{AC}$$

$$PE = \frac{AD \cdot PC}{AC}$$

$$\frac{AB \cdot AD \cdot PC^2}{AC^2} = AP^2$$

$$\frac{AP}{PC}$$



$$\sqrt{10}$$

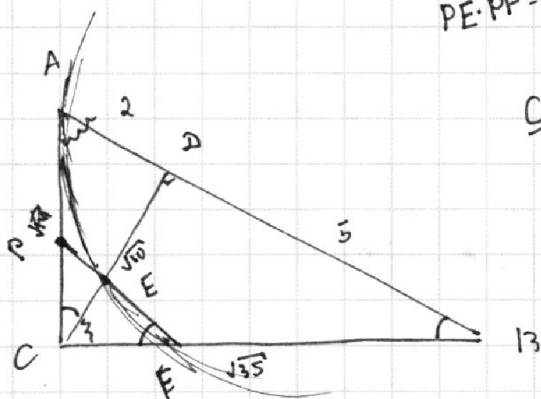
$$PE \cdot PF = AP^2$$

$$\frac{4 \cdot 10}{25} = \frac{40}{25}$$

$$\frac{CF}{AC}$$

$$\frac{8}{5}$$

$$\sqrt{6}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☒ ☒ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

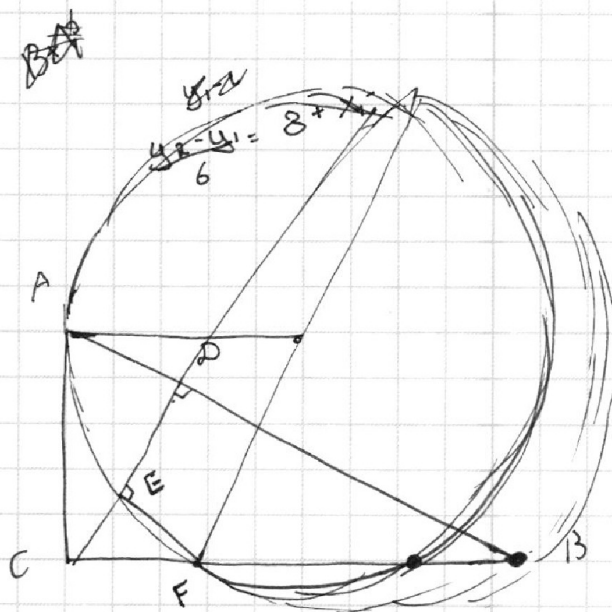
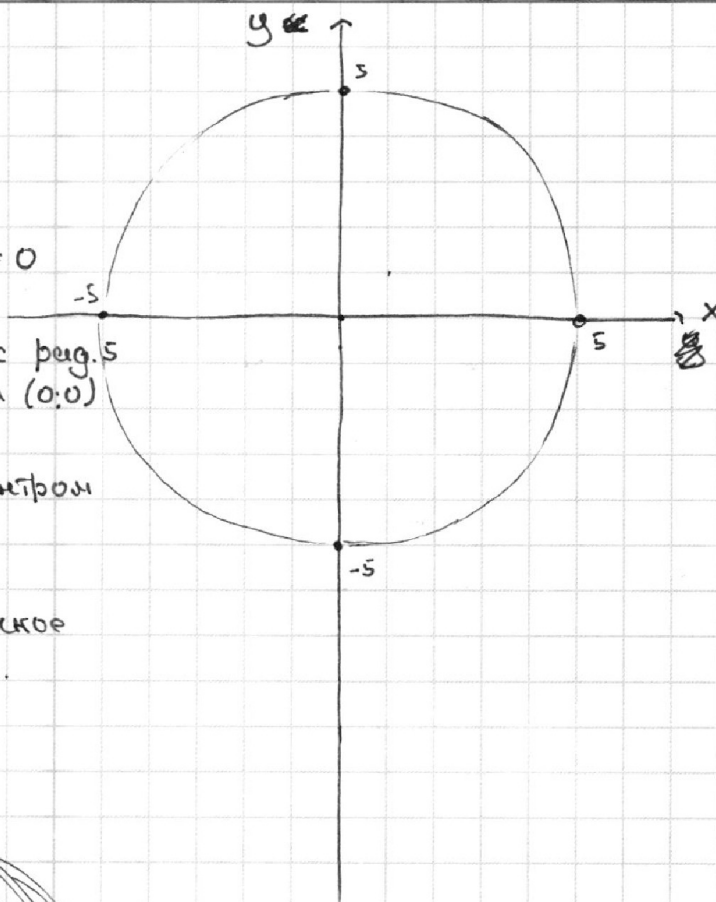
МФТИ

Задача 4.

$$\begin{cases} 5x + 6y - 6 = 0 \\ (x^2 - y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 25 \text{ - укр-е окръг-ти с рад. 5} \\ \text{и център } (0; 0) \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \text{ - укр-е окръг-ти} \\ \text{с рад. 2 и център} \\ (0; -9) \end{array} \right.$

параметрическое
уравнение прямой.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 & \log_{11} x \quad -\frac{3}{2} \log_{11} x \quad -5 \quad t^4 - 64t = \frac{1}{-\frac{3}{2}t} -5 \quad 121 \\
 & t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3t} -5 \quad \cancel{18} = \cancel{18} \quad t^4 + 5 = \frac{18}{3t} - \frac{2}{3t} = \frac{16}{3t} \quad -1-5 \\
 & (t^4 + 5) 3t = 16 \quad 8 \cdot 2 \\
 & 4 \quad s^4 + \frac{1}{s} = \log_{(0.5y)^3} (11^{-13}) = -\frac{13}{3} \log_{0.5y} 11 = -\frac{13}{3} \cdot 4 \cdot 5 \\
 & \quad -\frac{2}{3} \\
 & \frac{4^4 \cdot 5^4}{t^4} \cdot \frac{3}{t} = 16 \quad s^4 + \frac{3}{3s} = -\frac{13}{3s} -5 \quad (s^4 + 5) = -\frac{16}{3s} \\
 & \frac{3 \cdot (4^4 \cdot 5^4)}{t^5} = 16 \quad t = 26 \quad t^4 + 5 = \frac{16}{3t} \\
 & (t^4 + 5) 3t = 16 \\
 & (s^4 + 5) 3s = -16 \\
 & t^4 = \frac{16}{3t} -5 = \frac{16-15t}{3t} \\
 & s^4 = \frac{16}{-3s} -5 = \frac{-16-15s}{3s} \quad -\frac{16}{3s} -5 \\
 & (s \cdot t)^4 = -\frac{(16-15t)(16+15s)}{9st} \\
 & \frac{1}{3} \quad (-2) \quad (t^4 + 5)t = \frac{16}{3} \\
 & 3^4 = 81 \\
 & \frac{1}{3} + 5 \quad \frac{1}{3^4} + 5 \quad \frac{86}{3} = \frac{16}{3} \\
 & \frac{86}{3^4} = 16
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = \cdot 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot k$$

$$bc = \dots \cdot l$$

$$ac = \dots \cdot m$$

$$\frac{bc}{ab} =$$

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ b &= 2 \\ c &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y &= 6 \\ x+z &= 14 \\ z+y &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y &= 13 \\ x+z &= 21 \\ z+y &= 26 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y &= 11 \\ x+z &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB \cdot EF &= \frac{1}{2} \cdot (x+y+z) = 28 \\ \frac{AB}{BC} &= \frac{14}{10} = \frac{7}{5} \end{aligned}$$

$$34+26=$$

$$B = 58$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = ?$$

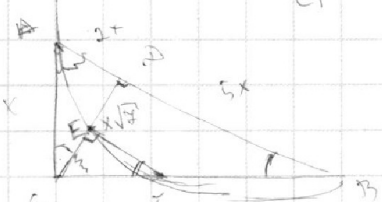
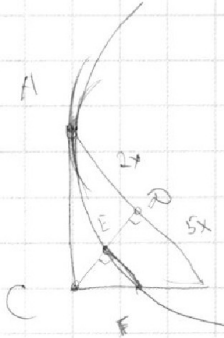
$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 11 \\ z &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= 2^2 \cdot 3^4 \\ a &= 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{11} \\ c &= 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{4+13} \end{aligned}$$

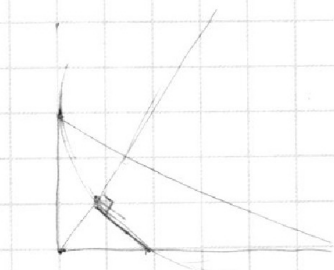
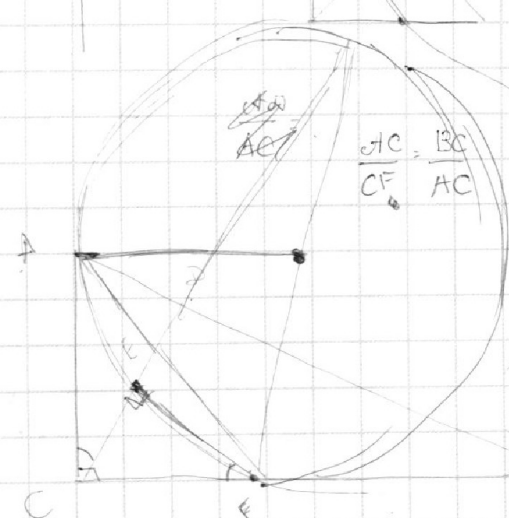
$$\begin{aligned} AC^2 &= CB \cdot CF = AB^2 - BC^2 \\ CB(CF+BC) &= AB^2 \end{aligned}$$

$$\frac{AC}{CF} = \frac{BC}{AB}$$

$$\frac{11+14+28}{2} = 28$$



$$\frac{CE}{AD} = \frac{CF}{AC} = \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$$



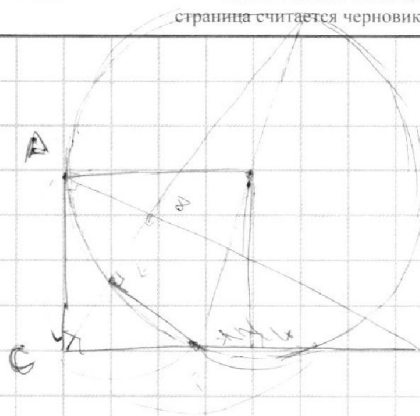
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

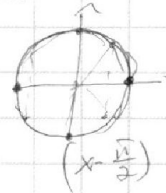


$$AC^2 = (AC-x)(AC+x)$$

$$0 \leq \frac{9\pi-2x}{10} \leq \frac{4\pi}{11}$$

$$x \leq \frac{9\pi}{2} \quad 9\pi-2x \leq 10\pi$$

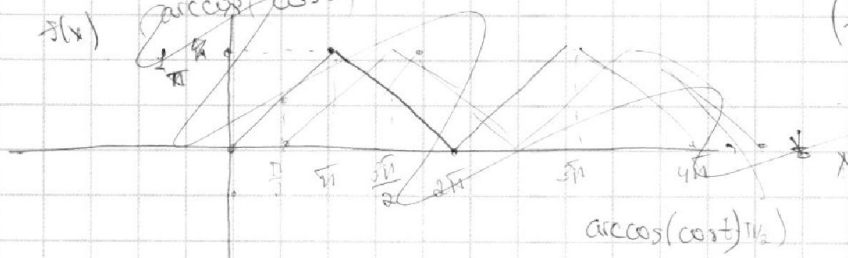
$$2x \geq -\pi \quad \frac{9\pi}{2} \geq x \geq -\frac{\pi}{2}$$



$$\arccos(\sin x)$$

$$\arccos(\cos(\frac{\pi}{2}-x))$$

$$f(x) = \arccos(\cos x)$$



$$\arccos(\cos(\frac{\pi}{2}))$$

$$x \leq -\pi$$

$$f(x)$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{9\pi-2x}{10}$$

$$5\pi-10x=9\pi-2x$$

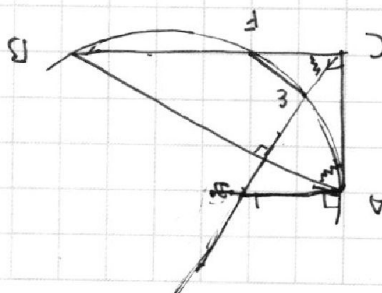
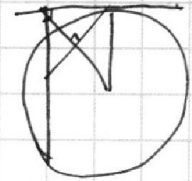
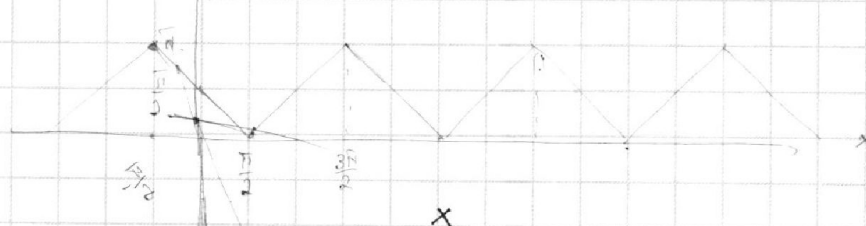
$$-4\pi = 8x$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}$$

$$g(x) = 0$$

$$x =$$



$$\frac{CF}{AC} = \frac{CD}{CF} = \frac{CE}{CF} = \frac{CE}{AC}$$

A