



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
- а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
- б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1)

$$1) ab = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$2) bc = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$3) ac = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$

Пусть

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$$

$$b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$$

$$c = 2^{\varphi_1} \cdot 3^{\varphi_2} \cdot 5^{\varphi_3}$$

перемножим
все

тогда

$$1) \alpha_1 + \beta_1 \geq 7$$

$$\alpha_2 + \beta_2 \geq 11$$

$$\alpha_3 + \beta_3 \geq 14$$

$$2) \beta_1 + \varphi_1 \geq 13$$

$$\beta_2 + \varphi_2 \geq 15$$

$$\beta_3 + \varphi_3 \geq 18$$

$$3) \alpha_1 + \varphi_1 \geq 14$$

$$\alpha_2 + \varphi_2 \geq 17$$

$$\alpha_3 + \varphi_3 \geq 43$$

$$(abc)^2 : 2^{(2+13+14)} \cdot 3^{(11+15+17)} \cdot 5^{(14+18+43)}$$

тогда abc как минимум

$$2^{17} \cdot 3^{43/2} \cdot 5^{75/2}$$

$$\text{то есть } \alpha_1 + \beta_1 + \varphi_1 \geq 12$$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \varphi_2 \geq 21,5$$

$$\alpha_3 + \beta_3 + \varphi_3 \geq 37,5$$

Подберем $\alpha_1, \beta_1, \varphi_1$

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \varphi_1 \\ 4 & 3 & 10 \end{matrix}$$

удовлетв. неравн и сумма = 17, значит
меньше невозможно

Подберем $\alpha_2, \beta_2, \varphi_2$

$$\begin{matrix} \alpha_2 & \beta_2 & \varphi_2 \\ 7 & 4 & 11 \end{matrix}$$

сумма 22, тк это на 0,5 больше 21,5
и удовлетв. неравн, то
меньше взять не получится

Подберем $\alpha_3, \beta_3, \varphi_3$

$$\begin{matrix} \alpha_3 & \beta_3 & \varphi_3 \\ 21 & 0 & 22 \end{matrix}$$

они удовлетв. всем неравн

сумма 43 > 37,5, меньше
подобрать не получится, тк

из них не пер-ва $\alpha_3 + \varphi_3 \geq 43$

тогда сумма $\alpha_3 + \beta_3 + \varphi_3 \geq 43$

Т.к мы

$$\text{Тогда } abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \varphi_1} \cdot 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \varphi_2} \cdot 5^{\alpha_3 + \beta_3 + \varphi_3} = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

$$\text{Ответ: } 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



3

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x \quad \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(y), \text{ тогда } y = \frac{\pi}{2} - x$$

тогда урав примет вид

$$x = \frac{\pi}{2} - y$$

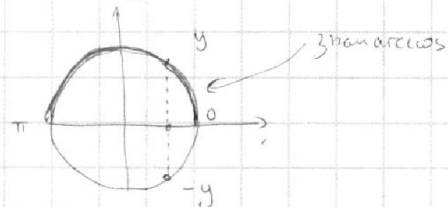
$$5 \arccos(\cos y) = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - y = 2\pi - y$$

$$1) \arccos(\cos y) = y - 2\pi k \text{ при } y \in [0 + 2\pi k; \pi + 2\pi k], k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \arccos(\cos y) = -(y - 2\pi k) = 2\pi k - y \text{ при } y \in [-\pi + 2\pi k; 0 + 2\pi k], k \in \mathbb{Z}$$

Т.к. $\arccos$ принимает значения от 0 до π ,

$$\text{а } \cos(y) = \cos(-y)$$



$$1) \text{ Тогда при } y \in [0 + 2\pi k; \pi + 2\pi k], k \in \mathbb{Z}$$

$$5 \arccos(\cos y) = 2\pi - y$$

$$5(y - 2\pi k) = 2\pi - y$$

$$5y - 10\pi k = 2\pi - y$$

$$6y = 10\pi k + 2\pi$$

$$y = \frac{10\pi k + 2\pi}{6}$$

$$\text{Заменим } y = \frac{\pi}{2} - x$$

$$6\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 10\pi k + 2\pi$$

$$3\pi - 6x = 10\pi k + 2\pi$$

$$6x = \pi - 10\pi k$$

$$x = \frac{\pi - 10\pi k}{6} \text{ при } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{При } 2\pi k \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2\pi k - \frac{\pi}{2} \leq -x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$-\frac{\pi}{2} - 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{2} - 2\pi k$$

$$2) \text{ При } y \in [-\pi + 2\pi k; 0 + 2\pi k], k \in \mathbb{Z}$$

$$5 \arccos(\sin y) = 2\pi - y$$

$$5(2\pi k - y) = 2\pi - y$$

$$10\pi k - 5y = 2\pi - y$$

$$4y = 10\pi k - 2\pi$$

$$4\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 10\pi k - 2\pi$$

$$2\pi - 4x = 10\pi k - 2\pi$$

$$x = \frac{4\pi - 10\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{При } -\pi + 2\pi k \leq \frac{\pi}{2} - x \leq 2\pi k$$

$$-\frac{3}{2}\pi + 2\pi k \leq -x \leq -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\frac{\pi}{2} - 2\pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{2} - 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi - 10\pi k}{6}, x \in \left[-\frac{\pi}{2} - 2\pi k; \frac{\pi}{2} - 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{4\pi - 10\pi k}{4}, x \in \left[\frac{\pi}{2} - 2\pi k; \frac{3\pi}{2} - 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

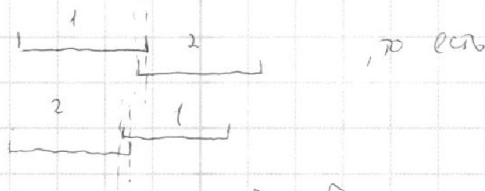
1) Прозвоним

$$\begin{cases} 7|b+1| < 2c \\ 7|b| < 3c \end{cases}, c \geq 1$$

$$\begin{cases} |b+1| < \frac{2c}{7} \\ |b| < \frac{3c}{7} \end{cases}$$

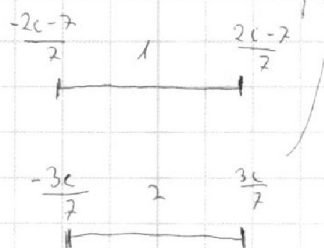
$$\begin{cases} -\frac{2c}{7} < b+1 < \frac{2c}{7} \\ -\frac{3c}{7} < b < \frac{3c}{7} \end{cases}$$

, чтобы существовало b удовлетворяющее первым двум условиям



$$\begin{cases} \frac{2c-7}{7} \geq -\frac{3c}{7} \\ \frac{3c}{7} \geq \frac{-2c-7}{7} \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} -\frac{2c-7}{7} < b < \frac{2c-7}{7} \\ -\frac{3c}{7} < b < \frac{3c}{7} \end{cases}$$



$$2) \begin{cases} -\frac{3c}{7} < b < \frac{3c}{7} \\ -\frac{2c-7}{7} < b < \frac{2c-7}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2c-7 \geq -3c \\ 3c \geq -2c-7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5c \geq 7 \\ 5c \geq -7 \end{cases}$$

$$c \geq \frac{7}{5}$$

$$\sqrt{9a^2+1} \geq \frac{7}{5}$$

$$9a^2+1 \geq \frac{49}{25}$$

$$9a^2 \geq \frac{24}{25}$$

$$a^2 \geq \frac{24}{9 \cdot 25}$$

$$a^2 \geq \frac{8}{75}$$

$$\begin{cases} a \geq \sqrt{\frac{8}{75}} \\ a \leq -\sqrt{\frac{8}{75}} \end{cases}$$

Ответ: $a \in (-\infty; -\sqrt{\frac{8}{75}}] \cup [\sqrt{\frac{8}{75}}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

④

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

(1) (2)

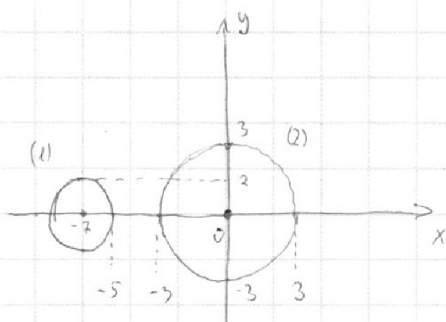
$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ \begin{cases} x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

(1) $x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0$

$$x^2 + 14x + 49 + y^2 - 4 = 0$$

$(x+7)^2 + y^2 = 4$ - окружность с центром в точке ~~(-7; 0)~~ $(-7; 0)$ и радиусом 2

(2) $x^2 + y^2 = 9$ - окр. с центром в $(0; 0)$ и радиусом 3



~~$x + 3ay - 7b = 0$~~ $x + 3ay - 7b = 0$ - прямая
чтобы прямая с двумя окружн. имела
4 пересечения (то есть системы было 4 реш.)
надо чтобы расстояние от этой прямой
до ~~ее~~ центров обеих окр. было
меньше их радиусов (*)

Расстояние от точки с коорд $(x_0; y_0)$
до прямой ~~ах~~ $hx + ty + c = 0$

равно: $\rho = \frac{|hx_0 + ty_0 + c|}{\sqrt{h^2 + t^2}}$

тогда расст. от прямой $x + 3ay - 7b = 0$ до
центра (1) окр. равно: $\frac{|-7 \cdot 1 + 3a \cdot 0 - 7b|}{\sqrt{9a^2 + 1}} = \frac{|7b + 7|}{\sqrt{9a^2 + 1}}$

Расст. от этой же прямой до центра (2) окр. равно: $\frac{|1 \cdot 0 + 3a \cdot 0 - 7b|}{\sqrt{9a^2 + 1}} = \frac{|7b|}{\sqrt{9a^2 + 1}}$

из утвержд. (*) $\Rightarrow$ $\begin{cases} \frac{|7b+7|}{\sqrt{9a^2+1}} < 2 \\ \frac{|7b|}{\sqrt{9a^2+1}} < 3 \end{cases}$, Пусть $\sqrt{9a^2+1} = c$, тогда $c \geq 1$

$$\begin{cases} |7b+7| < 2c \\ |7b| < 3c \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение

⑤ Получим, что корни^y (1) и (2) - сдвинуты, и $t_0 + \eta_0 = 0$

~~тогда обратн. замена~~

значит другое значение t_0 принимать не можем

тогда обр. замена

$$\log_2 6x + \log_2 y = 0$$

$$\log_2 6xy = 0$$

$$6xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{6}$$

Ответ: $\frac{1}{6}$

Также убедимся, что корни (1) и (2)

это то же $x = \frac{1}{6}$ и $y = 0$, значит
наши корни тогда ОДЗ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

⑤ $\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x} 345 - 4$

ОДЗ: $x > 0$
 $x \neq \frac{1}{6}$

(с учетом ОДЗ) ↓

$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_2 6x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\log_2 6x} - 4$, Пусть $\log_2 6x = t$, тогда

т.к. $x \neq \frac{1}{6}$, то $t \neq 0$

$t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t} - 4 \quad | \cdot t, \text{ т.к. } t \neq 0$

(1) $t^5 + 4t - 3,5 = 0 \quad g(t) = t^5 + 4t - 3,5$

$\log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4$

ОДЗ: $y > 0$
 $y \neq 1$

(с учетом ОДЗ) ↓

$\log_7^4 y + \frac{6 \cdot 1}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 y} - 4$ Пусть $\log_2 y = n$, тогда $n \neq 0$, т.к. $y \neq 1$

$n^4 + \frac{6}{n} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{n} - 4 \quad | \cdot n, \text{ т.к. } n \neq 0$

$n^5 + 6 - 2,5 + 4n = 0$

(2) $n^5 + 4n + 3,5 = 0$

Пусть $f(n) = n^5 + 4n + 3,5 \quad f'(n) = 5n^4 + 4 > 0$

т.к. $f'(n) \text{ всегда } > 0$, то $f(n)$ - монотонно возраст.

Значит $f(n) = 0$ - имеет один корень

Аналогично с $g(t)$, $g'(t) = 5t^4 + 4$, значит $g(t) = 0$ - монотонно и имеет один

корень. Заметим, что (1) $t^5 + 4t = 3,5$, т.к. функции имеют вид $x^5 + 4x$ и

(2) $n^5 + 4n = -3,5$ ~~и $x^5 + 4x$~~ $x^5 + 4x = -(-(t-x)^5 + 4(-(t-x)))$

Значит, если корни первого равен t_0 , то корни второго ~~$n_0 = -t_0$~~ $n_0 = -t_0$

(добавив (1) и (2), получим: $t^5 + n^5 + 4(t+n) = 0$ Таи

$(t+n)(t^4 - t^3n + t^2n^2 - tn^3 + n^4) + 4(t+n) = 0$

$(t+n)(t^4 - t^3n + t^2n^2 - tn^3 + n^4 + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t+n=0 \\ a=0 \end{cases} \begin{cases} t=-n \\ a \neq 0 \end{cases}$

Из доказанного след (1) и (2) имеют по одному корню и $t_0 = -n_0$, значит

~~$t_0 + n_0 = 0$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$7b+7-2\sqrt{9a^2+1} < 0$$

$$7b-3\sqrt{9a^2+1} < 0$$

$$2|b+2| < c$$

$$|4b| < c$$

$$7b+2c < 0$$

$$2 < 3$$

$$1 < 2$$

$$b \geq 0$$

$$ab : 2^2 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$ac : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$

$$bc : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{19}$$

$$a = 2^{d_1} \cdot 3^{d_2} \cdot 5^{d_3}$$

$$b = 2^{p_1} \cdot 3^{p_2} \cdot 5^{p_3}$$

$$c = 2^{q_1} \cdot 3^{q_2} \cdot 5^{q_3}$$

$$\begin{cases} d_1 + p_1 \geq 7 \\ d_2 + p_2 \geq 11 \\ d_3 + p_3 \geq 44 \end{cases}$$

$$d_2 + p_2 \geq 11$$

$$d_3 + p_3 \geq 44$$

$$7|b+1| < 2 \cdot c \quad c \geq 1$$

$$7|b| < 3$$

$$|b+1| < \frac{2}{7}$$

$$|b| < \frac{3}{2}$$

$$-\frac{2}{7} \leq b+1 < \frac{2}{7}$$

$$-\frac{9}{7} < b < -\frac{5}{7}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 26+12 \\ 12 \\ \hline 106 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32+43 \\ 75 \end{array}$$

$$|b+1| < \frac{2c}{7}$$

$$-\frac{2c}{7} < b+1 < \frac{2c}{7}$$

$$|b| < \frac{3c}{7}$$

$$-\frac{3c}{7} < b < \frac{3c}{7}$$

$$-\frac{2c}{7} \leq 1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} -\frac{2c-7}{7} < b < \frac{2c-7}{7} \\ -\frac{3c}{7} < b < \frac{3c}{7} \end{array}}$$

$$-\frac{9}{2} \quad -\frac{5}{2} \quad -\frac{3}{2} \quad \frac{3}{2}$$

$$-\frac{3c}{7} \leq \frac{2c-7}{7}$$

$$\frac{2c-7}{7}$$

$$2 \quad p \geq 11 \quad 65$$

$$p \cdot q \geq 15 \quad 80$$

$$q \cdot 2 \geq 17 \quad 74 \quad 11$$

$$2 \quad p \geq 14 \quad 7 \quad 7$$

$$p \cdot q \geq 18 \quad 2 \quad 11 \quad p$$

$$2 \quad q \geq 45 \quad 22 \quad 21 \quad 0$$

$$d_1 + p_1 \geq 7$$

$$p_1 + q_1 \geq 13$$

$$d_1 + q_1 \geq 14$$

$$d_1 \quad p_1 \quad q_1$$

$$3 \quad 4$$

$$4 \quad 9$$

$$\left. \begin{array}{l} d_1 = 7 \\ p_1 = 0 \\ q_1 = 13 \end{array} \right\} 20$$

$$q \quad 3$$

$$3 \quad 10$$



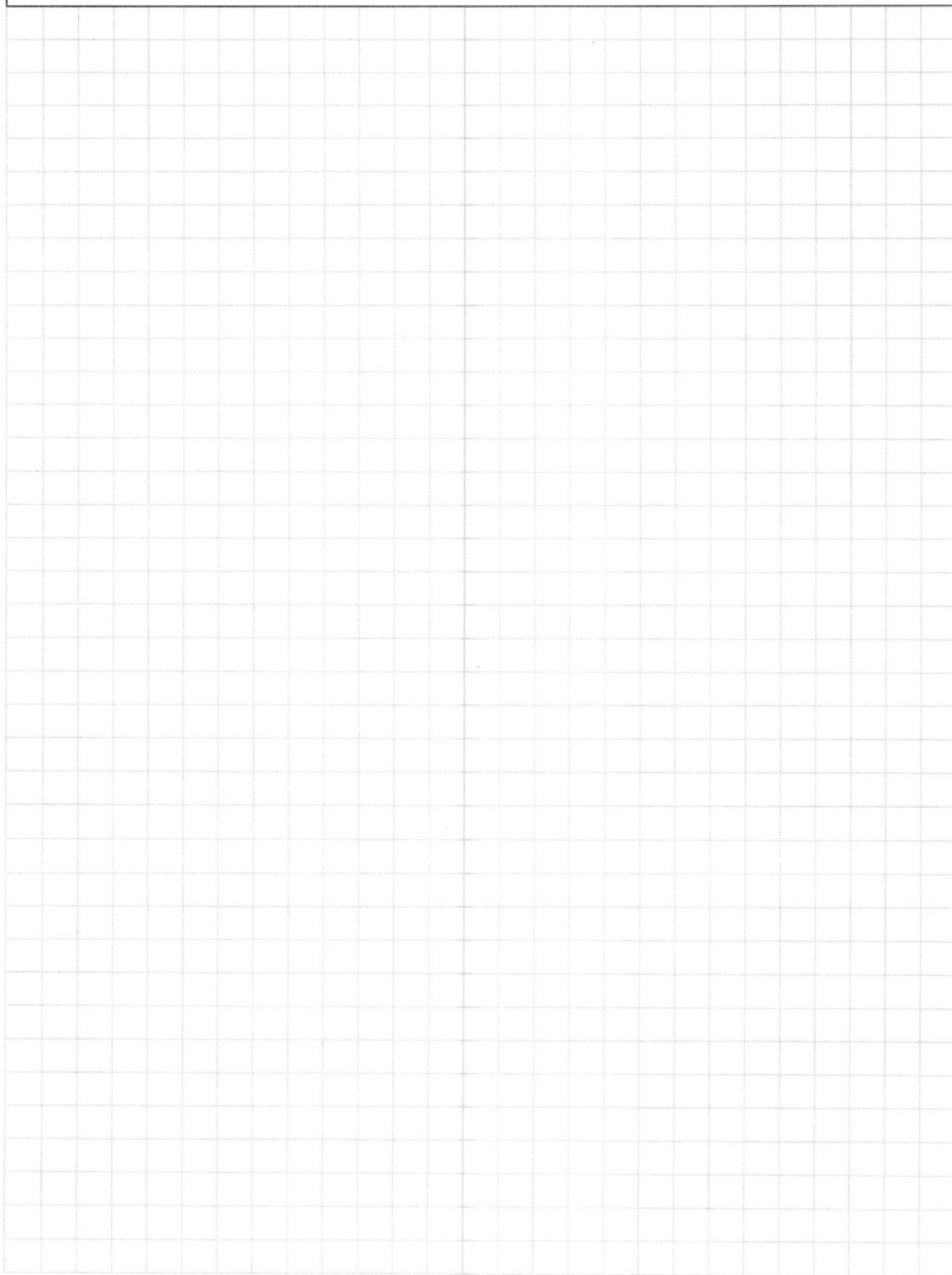
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \quad \log_{36x^2} 343 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\log_2 6x} = \frac{3}{2\log_2 6x}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \neq 1 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$-2 \frac{1}{\log_2 6x} = \frac{3}{2\log_2 6x}$$

$$\log_2 6x = t, \text{ тогда } t \neq 0$$

$$t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4$$

$$t^5 + 4t - 2 - \frac{3}{2} = 0$$

$$t^5 + 4t - 3,5 = 0$$

$$\log_7^4 y + \frac{6}{\log_2 y} = \frac{5}{2\log_2 y} - 4$$

$$\log_2 y = n$$

$$t^4 + n^4 - \ln(t^2 + n^2) + t^2 n^2 + 4$$

$$\log_2 6x = t$$

$$(t^2 + n^2)^2 - \ln(t^2 + n^2) - t^2 n^2 + 4$$

$$t^2 + n^2 = (t + n)^2 - 2tn$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right) - 1 + \frac{4}{b^2} = 0$$

$$t + 4$$

$$n^4 - \frac{6}{n} = \frac{5}{2n} - 4$$

$$n^5 + 6 - 2,5 + 4n = 0$$

$$n^5 + 4n + 3,5 = 0$$

$$t^5 + 4t - 3,5 = 0$$

$$t^5 + t^5 + 4(n + t) = 0$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$(t + n)(t^4 - t^3n + t^2n^2 - tn^3 + n^4 + 4) = 0$$

$$(t^4 + n^4 - \ln(t^2 + n^2) + t^2n^2 + 4) = 0$$

$$- \ln(t^2 + n^2)$$

$$\frac{a^2 + a + 1}{2}$$

$$\frac{t^4 + n^4 + 4}{2} > \frac{\ln(t^2 + n^2)}{2}$$

$$t^4 + n^4 + t^2n^2 > \ln(t^2 + n^2) - 4$$

$$\left(\frac{t}{n}\right)^4 + \left(\frac{t}{n}\right)^2 + 1 \geq 1$$

$$t^2 + n^2 + t^2n^2 \geq n^4$$

$$t^3n + tn^3 - 4$$

$$t^4 > t^3 + t - 4$$

$$3t^3 - t^3 - t + 4$$

$$3t^3 - 2t - 1$$

$$t^4 + n^4 = (t^2 + n^2)^2 - 2t^2n^2$$

$$t^4$$

$$2|b+1| \geq 0$$

$$2|b| \geq 0$$

$$\sqrt{9a^2 + 1} \geq 1$$

$$7|b+1| - 2\sqrt{9a^2 + 1} < 0$$

$$7|b| - 3\sqrt{9a^2 + 1} < 0$$

$$\text{значит } 1) (-7; 0)$$

$$2) (0; 0)$$

перейдем

$$x + 3ay - 7b = 0$$

$$ax - by + c = 0$$

$$|ax_0 + by_0 + c| = \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 3a \\ c &= -7b \end{aligned}$$

$$\frac{|-7 - 7b|}{\sqrt{9a^2 + 1}} < 2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



10.23.107

b 4 5 4 5 5 5 6

12

12 47 12 47 42 45

$$ab: 2^2 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$bc: 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$ac: 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{23}$$

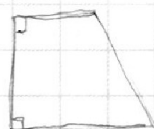
$$(abc)^2: 2^{24} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$$

$$2^{12} \cdot 3^{21.5} \cdot 5^{32.5}$$

$$abc-? = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^4$$

$$11+15+12=43$$

$$14+15+43=32-75$$



$$\frac{4B}{BD} = 1.3$$

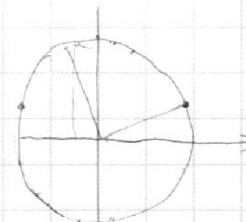
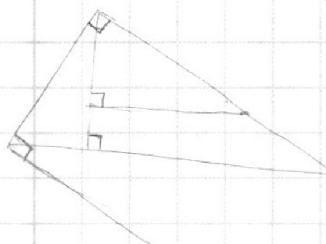
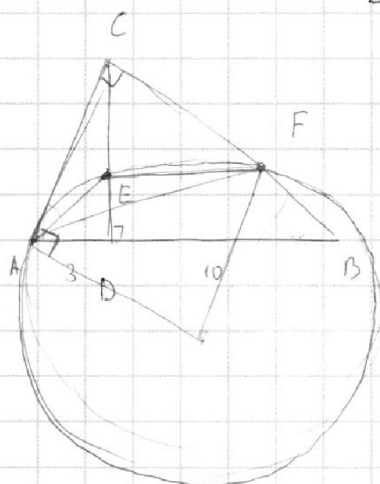
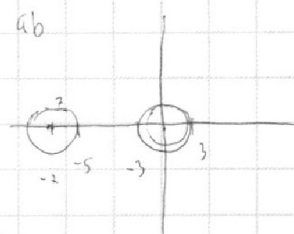
$$y+3ay-7b$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot h$$

$$x^2 + 14x + 49 + y^2 - 4$$

$$(x+7)^2 + y^2 = 4$$



a

$$ab = 2^2 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$a = 2^2 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$b = 3^1 \cdot 5^4$$

$$c = 2^{13} \cdot 3^{14} \cdot 5^{14}$$

$$abc = 2^{20}$$

$$\arccos(\cos(4\pi x)) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x \quad \text{при } \frac{\pi}{2} - x \in (0; \pi)$$

$$5(x - 2\pi k) \text{ при}$$

$$\frac{\pi}{2} - 2\pi k \geq x \geq -\frac{\pi}{2} - 2\pi k$$

$$5x - 10\pi k = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$-\frac{\pi}{2} - 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{2} - 2\pi k$$

$$4x = \frac{3\pi}{2} + 10\pi k$$

$$x = \frac{3\pi}{8} + \frac{5}{2}\pi k$$

$$y \in [\frac{3\pi}{8} + \frac{5}{2}\pi k; \frac{3\pi}{8} + \frac{5}{2}\pi k + \pi]$$

$$y = \frac{\pi}{2} - x \quad 0 \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \pi - 2\pi k$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq -x \leq \frac{\pi}{2} - 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \text{или} \quad \frac{\pi}{2} - x \in (-\pi; 0)$$

$$\arccos(\cos(x)) = x \quad \text{при } x \in [0; \pi]$$

$$= -x \quad \text{при } x \in [-\pi; 0]$$

$$= x - 2\pi \quad \text{при } x \in [\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$$

$$= \arccos(\cos(x)) = x - 2\pi$$

$$[-\pi; 0] \quad \frac{3\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + 2\pi$$

$$= (x - 2\pi)$$