



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} & \delta = \frac{7b - x}{3a}, \quad \frac{7b - x}{3a} = \frac{x}{3a} \\ & (x^2 + 7)^2 + \delta^2 - 4) (x^2 + \delta^2 - 9) = 0 \end{aligned}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{1}$

$$ab : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{24} \quad (1)$$

$$bc : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \quad (2)$$

$$ac : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \quad (3)$$

$$(1) \cdot (2); (2) \cdot (3); (3) \cdot (1):$$

$$abc \cdot b : 2^{20} \cdot 3^{28} \cdot 5^{32}$$

$$abc \cdot c : 2^{27} \cdot 3^{32} \cdot 5^{61} \quad (X)$$

$$abc \cdot a : 2^{21} \cdot 3^{28} \cdot 5^{57}$$

$$(abc)^4 : 2^{68} \cdot 3^{86} \cdot 5^{150}$$

$$abc : 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$$

т.к. abc - наименьшее, то

$$abc : 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$$

$$\text{но } abac : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \Rightarrow abc : 5^{43} \Rightarrow$$

$$abc : 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43} \Rightarrow abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

пример:

$$(a = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{29})$$

$$a = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{14}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^5$$

$$\text{Ответ: } 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

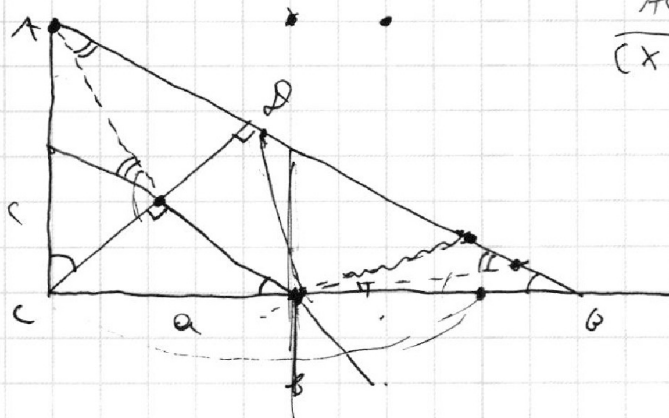
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AC}{CX} = \frac{\sqrt{10}a}{\sqrt{10}a}$$

$$\frac{(10n^2 + a^2)}{10n^2 + b^2} = \frac{10n^2}{a^2} = \frac{b^2}{10n^2}$$

$$10n^2 \cdot a^2 + a^4 = 100n^4 + 10nb^2$$

$$(10n^2 + b^2)b^2 = 100n^4 + 10nb^2$$

$$\frac{10n + a}{10n + b} = \frac{10n}{b} =$$

$$10bn + ab = 10^2 n^2 + 10nb$$

$$ab = 10^2 n^2$$

$$a^4 + 10n^2 \cdot a^2 + 10n^2 a^2 =$$

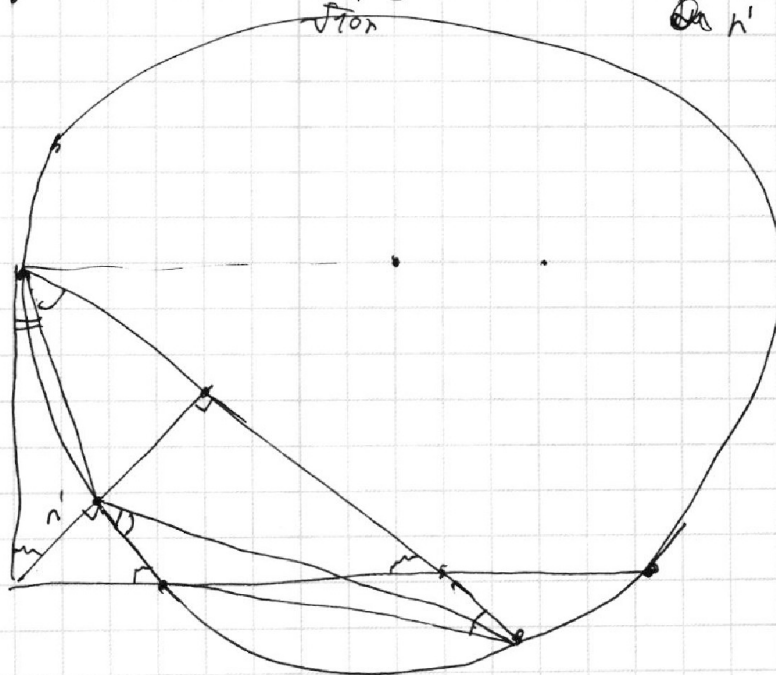
$$3^2 + 10^2 = 10 + 100$$

$$\frac{c}{\sqrt{10}n} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{\sqrt{30}n}{a} = \frac{\sqrt{130}n}{b} = \frac{13n}{a}$$

$$\frac{2 \cdot 7}{9 \cdot 3}$$

$$\frac{76}{3a}$$



$$\begin{array}{r} 24 \\ + 24 \\ \hline 48 \\ + 576 \\ \hline 624 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 576 \\ 25 \\ \hline 2880 \\ 1752 \\ \hline 14400 \\ \hline 48 \end{array}$$

$$\frac{10n}{EF} = \frac{\sqrt{130}n}{a}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{S \triangle ACD}{S \triangle CEF} = k^2 = \left(\frac{AD}{CE} \right)^2 = \frac{3x^2 \cdot (\sqrt{10} + \sqrt{13})^2}{380 \cdot x^2} =$$

$$= \frac{3(10 + 13 + 2\sqrt{130})}{130} = \frac{69}{130} + \frac{6\sqrt{130}}{130}$$

расч точек.
в остальных случаях раздм-
няется аналогично

ответ. $\frac{69}{130} + \frac{6\sqrt{130}}{130}$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5) \frac{AO}{BO} = \frac{13}{10} \Rightarrow \frac{AO}{BO} = \frac{3}{10}, \text{ пусть } AO = 3x, \text{ тогда } BO = 10x$$

$$6) \Delta AOC - \text{прямоугольный, } CO - \text{гипотенуза} \Rightarrow CO = \sqrt{AO^2 + AC^2} = \sqrt{30}x$$

$$7) \Delta COA: \angle COA = 90^\circ, \text{ значит } AC = \sqrt{CO^2 + OA^2} = \sqrt{30x^2 + 9x^2} = \sqrt{39}x$$

$$8) \Delta COB: \angle COB = 90^\circ, \text{ значит } BC = \sqrt{CO^2 + BO^2} = \sqrt{30 + 100}x = \sqrt{130}x$$

$$9) \frac{EC}{FO} = \frac{AC}{AO} = \frac{\sqrt{39}}{\sqrt{130}} = \sqrt{\frac{3}{10}}, \text{ и}$$

$$EC = \sqrt{\frac{3}{10}} FO, FO = \sqrt{\frac{10}{3}} EC.$$

$$10) KF = BC - FO = \sqrt{130}x - \sqrt{\frac{10}{3}} EC$$

$$11) \Delta FEC \sim \Delta OBC \text{ (} EF \parallel AO \text{): значит}$$

$$\frac{FC}{EC} = \frac{OC}{OB} = \frac{\sqrt{30}x}{\sqrt{130}x} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$$

$$FC \cdot \sqrt{3} = EC \cdot \sqrt{13}$$

$$\sqrt{390}x - \sqrt{10}EC = \sqrt{13}EC.$$

$$EC = \frac{\sqrt{390}x}{\sqrt{10} + \sqrt{13}}$$

$$12) \Delta ACO \text{ и } \Delta CFE: \angle E = \angle O = 90^\circ; \angle A = \angle FCE$$

значит $\Delta ACO \sim \Delta CFE$ (по 2 углам)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐

2 ☒

3 ☐

4 ☐

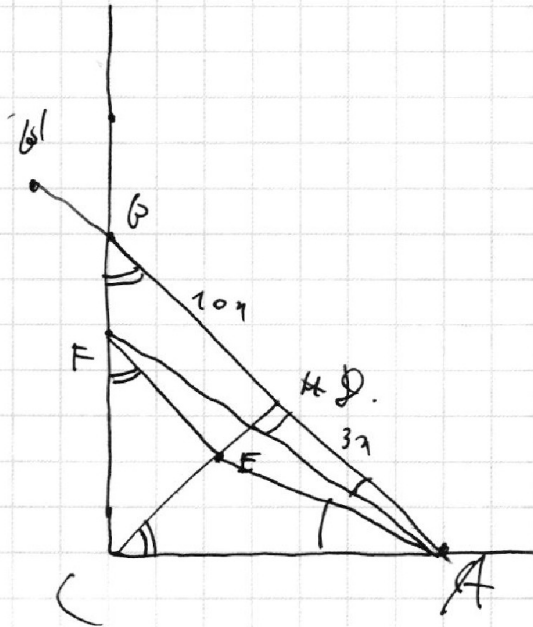
5 ☐

6 ☐

7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



решение:

- 1) пусть $AB \cap \omega = B'$, тогда $B'AEF$ — вписанная трапеция, тогда она $PIB \Rightarrow \angle AB'E = \angle B'AF$ (вписанная трапеция)
- 2) ω : ω касалась BA , $\angle AB'E$ отражается в ω $AB \Rightarrow \angle AB'E = \angle EAE = \angle B'AF = \alpha$.
- 3) пусть $\angle CBA = \beta$, тогда $\angle ECA = \beta$ тоже.
- 4) $\triangle AEC$ и $\triangle AFB$: $\angle BAF = \angle EAC = \alpha$, $\angle B = \angle ECA = \beta$
 $\Rightarrow \triangle AEC \sim \triangle AFB$ (по 2 углам) $\frac{EC}{FB} = \frac{AC}{AB}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$5 \arccos \sinh n = \frac{3\pi}{2} + n.$$

$$I \arccos \sinh n \in [0; \pi]$$

$$5 \arccos \sinh n \in [0; 5\pi]$$

$$0 \leq \frac{3\pi}{2} + n \leq 5\pi$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq n \leq \frac{7\pi}{2}$$

$$I \arccos \sinh n = \frac{\pi}{2} - n, \text{ если } \frac{\pi}{2} - n \leq \pi$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5n = \frac{3\pi}{2} + n.$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq n \leq \frac{\pi}{2}$$

$$6n = \pi$$

$n = \frac{\pi}{6}$ — не периодич. при

$$\arccos \sinh n = \frac{\pi}{2} - n + 2\pi; \text{ если } \frac{\pi}{2} - n + 2\pi \leq \pi$$

$$II \arccos \sinh n = n - \frac{\pi}{2} \text{ при } n \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$$

$$III \arccos \sinh n = \frac{\pi}{2} - n + 2\pi \text{ при } n \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\frac{25\pi}{2} - 5n = \frac{3\pi}{2} + n.$$

$$6n = 11\pi$$

$$n = \frac{11\pi}{6} \text{ — не периодич. при } n \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$$

$$IV \arccos \sinh n = n + \frac{3\pi}{2} \text{ при } n \in \left(-\frac{5\pi}{2}; -\frac{7\pi}{2}\right)$$

$$V \arccos \sinh n = n - \frac{5\pi}{2} \text{ при } n \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$$

$$VI \arccos \sinh n = -\frac{3\pi}{2} - n \text{ при } n \in \left[-\frac{3\pi}{2}; 0 - \frac{\pi}{2}\right]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$II \quad 5x - \frac{5\sqrt{c}}{2} = \frac{3\sqrt{c}}{2} + x$$

$$4x = 4\sqrt{c}$$

$$\underline{x = \sqrt{c}} \quad \in [0; \sqrt{c}]$$

$$IV: 5x + \frac{15\sqrt{c}}{2} = \frac{3\sqrt{c}}{2} + x$$

$$4x = -\frac{12\sqrt{c}}{6} < 0; x < 0 \Rightarrow x \notin \left(\frac{5\sqrt{c}}{2}; \frac{7\sqrt{c}}{2}\right)$$

$$V \quad 5x - \frac{25\sqrt{c}}{2} = \frac{3\sqrt{c}}{2} + x$$

$$4x = 14\sqrt{c}$$

$$x = \frac{7\sqrt{c}}{2} \in \left[-\frac{\sqrt{c}}{2}; 0\right]$$

$$VI \quad 6x = -\frac{15\sqrt{c}}{2} - \frac{3\sqrt{c}}{2}$$

$$6x = -\frac{18\sqrt{c}}{2}$$

$$6x = -9\sqrt{c}$$

$$\underline{x = -\frac{3\sqrt{c}}{2}} \in \left[-\frac{3\sqrt{c}}{2}; -\frac{\sqrt{c}}{2}\right)$$

$$\text{Ответ: } -\frac{3\sqrt{c}}{2}; \sqrt{c}; \frac{\sqrt{c}}{6}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{4}$

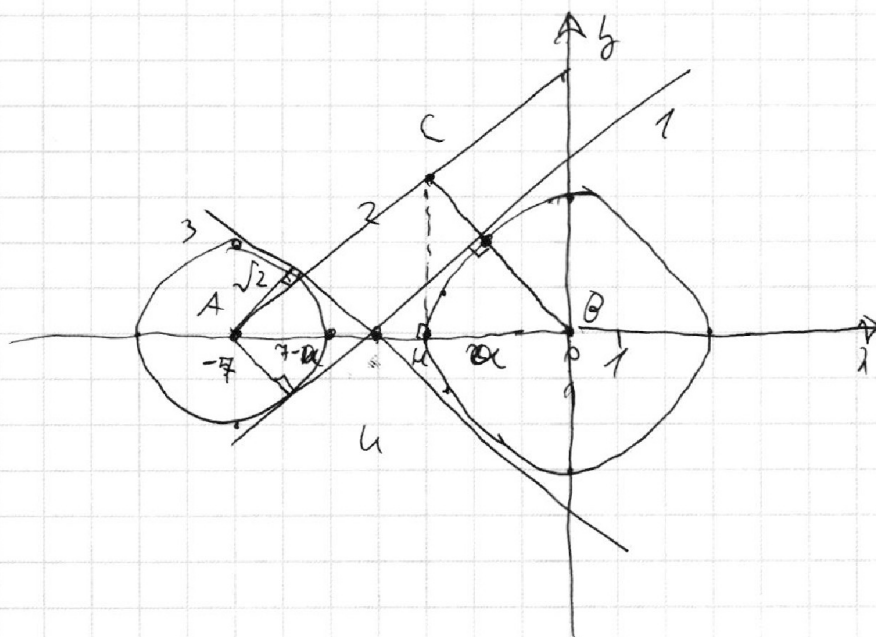
$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \end{cases}$$

$$\left((x^2 + 7)^2 + y^2 - 4 \right) (x^2 + y^2 - 9) = 0 \quad \text{— корень}$$

решение второй системы — 2 окр

с центром в $(-7; 0)$ и радиусом 2, и с центром в

$(0; 0)$ и радиусом 3.



$= 0$

$x + 3ay - 7b = 0$ — какое — координата, y ,

$$x = 7b - 3ay; \quad 7b - 3ay = P \cdot F(x)$$

найдем, когда такое уравнение имеет

и то пересек с окр: если только

проведем 2 общие касательные, они

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4.

$$\cos \angle P \neq A = \cos \angle P < A = \frac{5}{\sqrt{24}} = k, \text{ где } k - \text{гран}$$

меньше этой грани, поэтому
укажем на условием которое
применяется $\frac{5}{\sqrt{24}}$ и $(-\frac{5}{\sqrt{24}})$ в силу симметрии

тогда как $y = \frac{76 - x}{3a} = \frac{76}{3a} - \frac{x}{3a}$

$$\text{т.е. } \begin{cases} -\frac{1}{3a} \leq \frac{5}{\sqrt{24}} \\ -\frac{1}{3a} \geq \frac{-5}{\sqrt{24}} \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{a} \geq \frac{-75}{\sqrt{24}} \\ \frac{1}{a} \leq \frac{45}{\sqrt{24}} \end{cases} \begin{cases} a \leq \frac{\sqrt{24}}{15} \\ a \geq \frac{\sqrt{24}}{-15} \end{cases} \quad (a \neq 0)$$

Ответ при $a \in (\frac{\sqrt{24}}{-15}; \frac{\sqrt{24}}{15})$.

Ответ: при $a \in (\frac{\sqrt{24}}{-15}; 0) \cup (0; \frac{\sqrt{24}}{15})$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_7^4(6n) = \frac{3}{2} \log_6 n \cdot 7 + 2 \log_6 n \cdot 7 = 4 \\ \log_7^4(y) = \frac{5}{2} \log_6 y \cdot 7 - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{7}{2} \log_6 n \cdot 7 - 4 = \log_7^4(6n) \\ -\frac{7}{2} \log_6 y \cdot 7 - 4 = \log_7^4(y) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{7}{2} (\log_6 n \cdot 7 + \log_6 y \cdot 7) &= 0 \\ \log_7 6n + \log_7 y &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\log_7 y + \log_7 6n}{\log_7 6n \cdot \log_7 y} = 0$$

$$\log_7(y \cdot 6n) = 0$$

$$6ny = 7^0$$

$$ny = \frac{1}{6}$$

$$\text{ответ: } \frac{1}{6}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4. Пусть Γ — расставленные разности
и Γ — всевозможные члены Γ
и тогда все Γ — Γ — Γ
не левой из Γ , все Γ —
правой и Γ — Γ — Γ
из Γ — Γ — Γ — Γ
(целые Γ) (все Γ — Γ , т.к.
и Γ — Γ — Γ , а Γ — Γ).

всего ≥ 0 т.к. Γ — Γ — Γ
и так, т.к. все Γ — Γ
прямые имеют Γ — Γ , но
не прямой Γ — Γ — Γ
через все точки $\frac{P}{\Gamma}$; где $P \in [0; 18.4]$
и P — целое (это очевидно из того
что $\Gamma = K + \Gamma \cdot \Gamma$, где K — целое)

теперь выберем 2 прямые из
того семейства.

$$\begin{cases} y = -\Gamma x + a = f(x) \\ y = -\Gamma x + b = g(x) \end{cases}$$

$g(0) - f(0) = b - a$, — искомого
разности Γ — Γ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что нам разрешено
уходить от границах пленки.

ОР и ОР с уравнениями $y=x$ и $xy=-4x$
соответственно:

Пусть y нас интересует

$$x \text{ и } y_1, \text{ тогда } -(4x + y_1) = k \text{ с } 0 \leq k \leq c.$$

$$4x_2 + y_2 = 40 - c.$$

$$y_2 = 40 - c - 4x_2 \text{ т. е. при } k \text{ и } c.$$

Можно как-то уловить, что
через которые внутри парал-
лелограмма это пленка пройдет.
А-то где x_1, y_1 . то есть, где
есть паре y_1 точки с целыми
координатами x_1, y_1 все нужное
в клетке на 1-ой пленке, перемеще-
нием стороны, и где А. то же самое.
тогда задача сводится к водо-
ру 2 пленки из всевозможных

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Все наши приемы в точке 0 имеют
целое значение от 0 до $14 \cdot 18 \cdot 4$.

См. к увеличению правой части $y = -4x + 18 \cdot 4$

Итак, найдем теперь кол-во

целых точек прямой $y = -4x + k$

внутри параллелограмма в зависи-
мости от k ; заметим, что при

единичном остатке при делении
на 4 и $y = k$ это значение единично.

1) $k = 0$ - 17 точек ($\frac{68}{4}$)

2) $k = 1$ - 16 точек.

3) $k = 2$ - 16 точек.

4) $k = 3$ - 16 точек

Итак, кол-во искоемых пар

(разности св. элементов) - 37.

присл. узник со свободными членами

кратным 4 - 10 на каждой узнике

47 17 нулевых точек, но основаны по 16

$\Rightarrow$ всего $17 \cdot 17 \cdot 10 + 16 \cdot 16 \cdot 27 = 7016 + 6812 + 2380 =$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

= 8802

ответ: 8802.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$b_1 = \frac{\sqrt{2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 4 \cdot 88 - 4 \cdot 16 \cdot 10}}{4} = \frac{\sqrt{200 + 704 - 160}}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{744}}{4} = \frac{\sqrt{186}}{2}$$

$$c_1 = \frac{\sqrt{2 \cdot 10^2 + 16 \cdot 10 \cdot 2 - 4 \cdot 88}}{4} = \frac{\sqrt{550 + 80 - 88}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{42}}{2}$$

иногда.

$$A_1 \cdot b_1 \cdot c_1 = 15 \cdot \frac{\sqrt{42 \cdot 186}}{2 \cdot 2} = \frac{15 \cdot \sqrt{21 \cdot 83}}{2} =$$

$$= \frac{45 \cdot \sqrt{7 \cdot 31}}{2} = \frac{45}{2} \sqrt{217}$$

$$\text{ответ: } \frac{45}{2} \sqrt{217}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

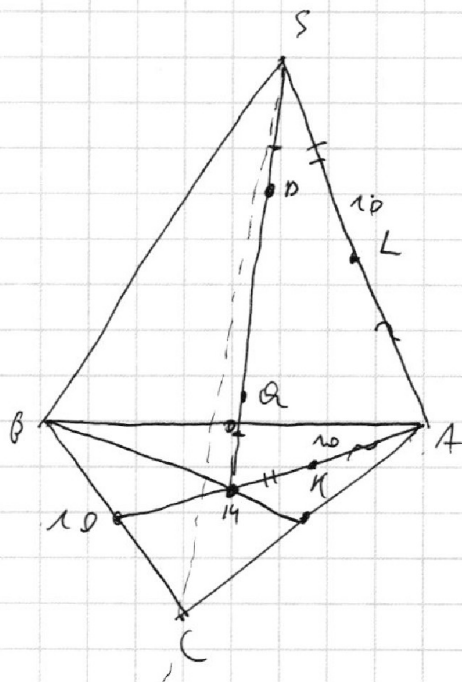
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6.



Решение: 1) Пусть ω — ^{плоскостью} сечение (SAM)
~~плоскостью~~ ω — шара сферы Ω , тогда
из-за касания Ω с SA в L и AM в K ,
 ω кас SA в L и ω кас AM в K .

2) По S.M.A: $\text{deg}(S; \omega) = SP \cdot SQ = SL^2$, т.к.

$SL \perp \omega$ кас AS в L ,

$\text{deg}(M; \omega) = MQ \cdot MP = MK^2$ т.к. ω кас AM в K , тогда в силу равенства

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$SP = SQ, MP \cdot MQ = SP \cdot SQ \Rightarrow SL = MK.$$

3) в кос AS и AM в точках L и K . $\Rightarrow$

$$AL = SK, AL = AK \text{ (как кас из } AKL)$$

$$4) AL = AK, SL = MK \Rightarrow AM = AS = 10.$$

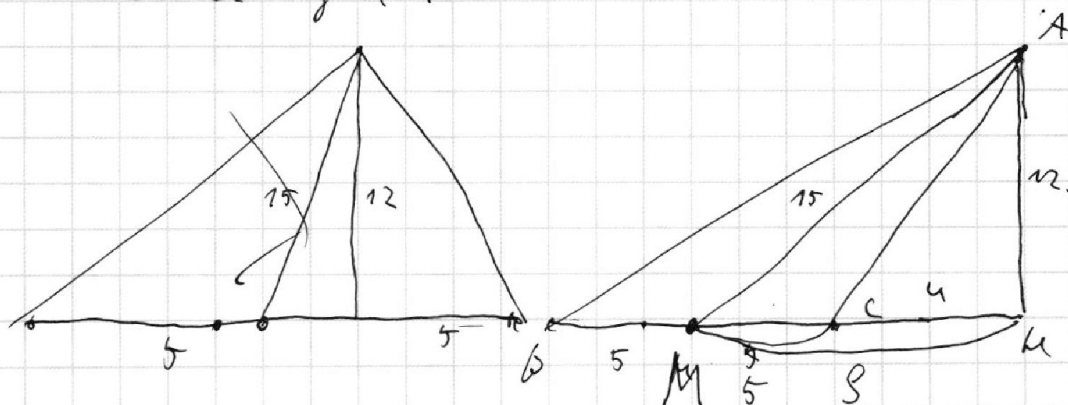
5) $\triangle ABC$: M - центр тяжести ABC , $AM = 10 \Rightarrow$

$$AA_1 = 15, \text{ где } AA_1 - \text{высота } ABC.$$

6) $\triangle ABC$: $BC = 10$; $S_{ABC} = 60 \Rightarrow BK = 12$, где

AK - высота из A

7)



$$\triangle AMK - \text{прям} \Rightarrow MK = \sqrt{AM^2 - AK^2} = 9, \text{ тогда}$$

$$CK = 9 - 5 = 4.$$

$$\triangle AKC - \text{прям}: AC^2 = 12^2 + 4^2 = 4^2(1 + 9) = (4\sqrt{10})^2$$

$$AC = 4\sqrt{10}$$

$$\triangle ABK - \text{прям}: AB^2 = 12^2 + 14^2 = 2^2(6^2 + 7^2) = (2\sqrt{85})^2.$$

$$\text{тогда по формуле } \frac{\sqrt{2a^2b^2 - c^2}}{c} \text{ найдем } \frac{85}{76}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = kx$$

$$-17; 68$$

$$y = -\frac{1}{4}x$$

$$y = -4x$$

$$4x_2 + y_2 = 40 + k$$

$$\begin{array}{r} 100 + \dots - 520 \\ 200 + 320178 \end{array}$$

$$(2, 68)$$

$$\begin{array}{r} 88 \\ 54 \\ \hline 352 \end{array}$$

$$y_2 = 40 + k - 4x_2$$

$$2(25 + 88 - 20)$$

$$\begin{array}{r} 225 \\ \times 4 \\ \hline 900 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 244 \overline{) 186} \\ 48 \\ \hline 186 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 88 \\ \times 3 \\ \hline 264 \end{array}$$

$$204$$

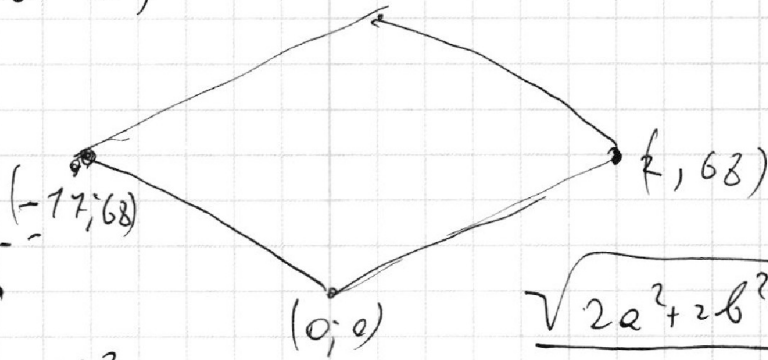
$$-11$$

$$\begin{array}{r} 186 \overline{) 183} \\ 186 \\ \hline \end{array}$$

$$15^2 = 225$$

$$(18; 0)$$

$$y_2 = -4x_2 + 40 + k$$



$$\frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{4}$$

$$4x_2 + y_2 - (4x_1 + y_1) = 40$$

$$4x_2 - 40 = 4x_1 + y_1 \quad 2(4 \cdot 81 + 4 \cdot 10)$$

$$y_1 = x_2 - 40 - 4x_1$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ + 42 \\ \hline 78 \end{array} \quad \begin{array}{r} 36 \\ + 49 \\ \hline 85 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 78 \\ \times 2 \\ \hline 156 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 564 \\ + 160 \\ \hline 724 \\ \times 2 \\ \hline 1448 \\ + 186 \\ \hline 1634 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_7^4(x) = \frac{7}{2} \log_7 x - 4 \\ \log_7^4(y) = -\frac{7}{2} \log_7 y - 4 \end{cases}$$

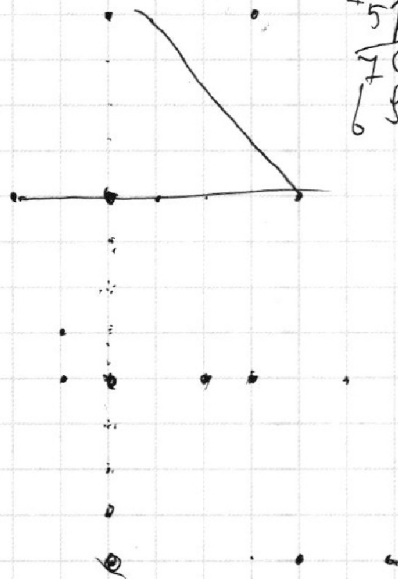
$$\begin{array}{r} 040 \\ 32 \\ \hline 3676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 118 \\ 64 \\ \hline 76 \end{array}$$

$$a: \begin{array}{r} 16 \\ 256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 756 \\ + 27 \\ \hline 1782 \\ + 522 \\ \hline 7012 \\ 681 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ + 77 \\ \hline 118 \\ + 17 \\ \hline 285 \\ 28 \end{array}$$



$$0 = -4 \cdot 18 + 6$$

$$6 = 4 \cdot 18$$

$$-4x +$$

$$\begin{array}{r} + 6812 \\ 2880 \\ \hline 9802 \end{array}$$



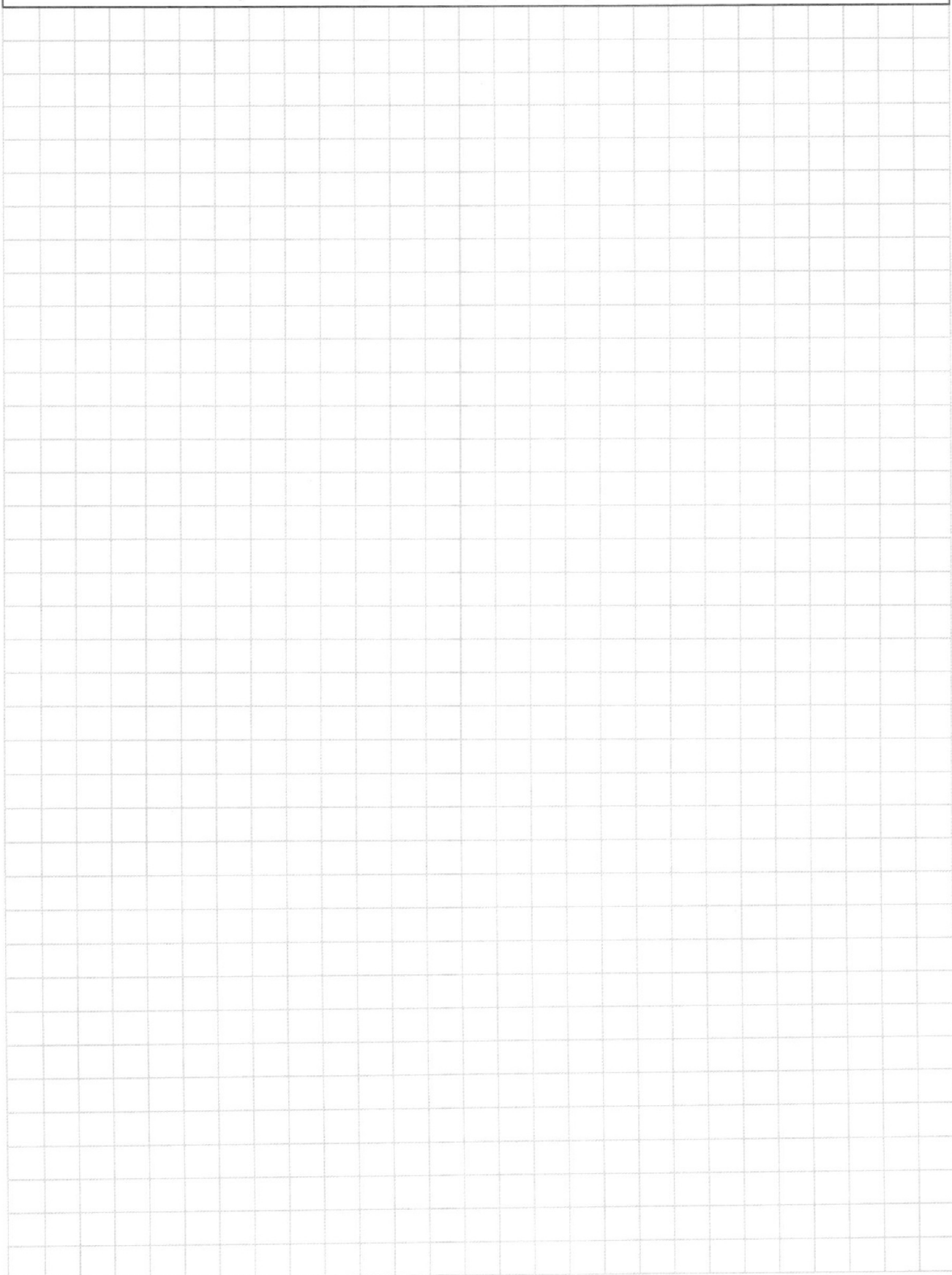
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

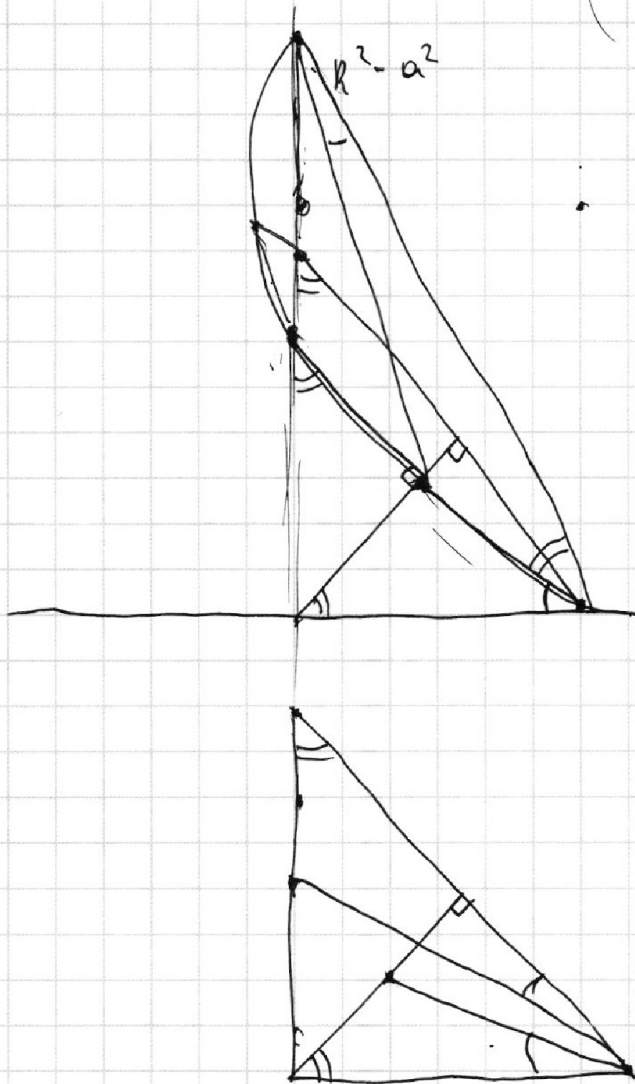
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x_0 \left(x + 2\sqrt{R^2 - a^2} \right) = a^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$bc: 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$abc - \min?$

$$ca: 2^{17} \cdot 3^{17} \cdot 5^{23}$$

$$abc \cdot b: 2^{20} \cdot 3^{26} \cdot 5^{22}$$

$$bcb \cdot a: 2^{21} \cdot 3^{28} \cdot 5^{27}$$

$$abc \cdot c: 2^{27} \cdot 3^{32} \cdot 5^{31}$$

$$\begin{array}{r} 43 \\ +18 \\ \hline 61 \end{array} \quad \begin{array}{r} 57 \\ +61 \\ \hline 118 \end{array} \quad 120/30$$

$$11+15+11+17+15+17$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ +2 \\ \hline 50 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ +8 \\ \hline 11 \end{array} \quad 2+8+6+5=21$$

$$abc: 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{28}$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ -14 \\ \hline 24 \end{array} \quad 37,5$$

$$2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{28}$$

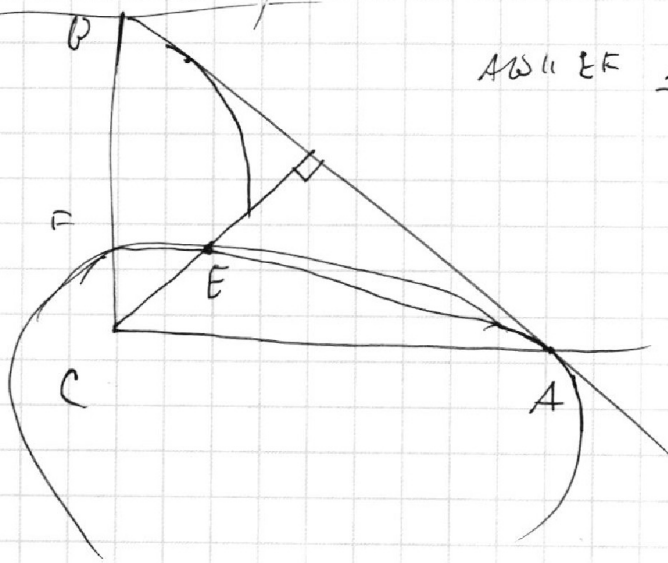
$$c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{29}$$

$$a = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{26}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^5 \cdot x$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \cdot 43 \\ -14 \\ \hline 29 \end{array} \quad \begin{array}{r} 93 \\ -29 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$AD \parallel EF \quad \frac{AD}{b} = \frac{1}{13}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

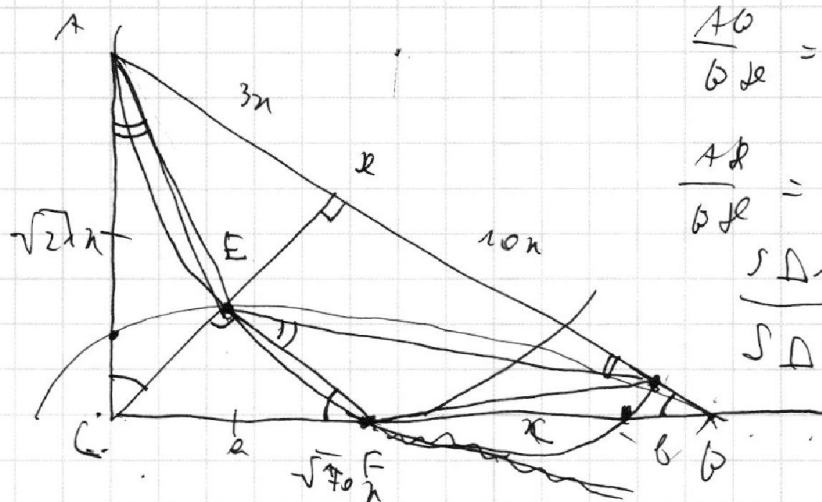
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

[illegible]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{5}{2} - \frac{12}{2}$$



$$\frac{40}{60} = 0.66 = \frac{13}{20}$$

$$\frac{42}{62} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{SDACD}{SDCEF}$$

$$\begin{array}{r} -30 \\ \underline{9} \\ -21 \end{array} \quad \begin{array}{l} a(a+c) = 21x^2 \\ b(b+c) = \end{array}$$

$$\frac{3n}{h} = \frac{n}{1.0n}$$

$$h = \sqrt{30} \text{ m}$$

$$\log_7^4(6n) - 2\log_7^2$$

$$a \vdash (0) \quad 2 \vdash n.$$

$$\cos A = 2.$$

$$\cos n = 5; k d.$$

Sinn

$$\alpha \Gamma C C O S \alpha = 2.$$

$$\cos 2 = \sinh x.$$

$$\sinh^2 x + \cosh^2 x = 1$$

$$L = x_{\text{out}} + \left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - n\right) = \sin n.$$

$$a_{rcc} \cos \sin n = \frac{\pi}{2} - n.$$

$$\log_{36} 7^3 - 4.$$

$$\log_7^4(6n) = 2 \log_6 n \quad ? =$$

$$= \frac{3}{2} \log_6 n^{7-4}.$$

$$\log_7^4(6n) = \frac{7}{2} \log_6 n^{7-4} ; \log_7^4 y = -\frac{7}{2} \log y^{-4}.$$