



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N1

~~$$a \cdot b = k \cdot 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$b \cdot c = r \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$a \cdot c = s \cdot 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{26}$$

$$abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28} \quad (k, r, s \in \mathbb{N})$$~~

Пусть

$$a = 2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot 5^{x_3}$$

$$b = 2^{y_1} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{y_3}$$

$$c = 2^{z_1} \cdot 3^{z_2} \cdot 5^{z_3}$$

значит

$$\begin{cases} (x_1 + y_1)_{\min} \geq 6 \\ (x_1 + z_1)_{\min} \geq 16 \\ (y_1 + z_1)_{\min} \geq 14 \end{cases} \quad \text{Если эта система}$$

имеет натуральные корни, то эти значения подходят ~~как корни~~

Решив эту систему получаем $x_1 = 4, y_1 = 2, z_1 = 12$

$$\begin{cases} (x_2 + y_2)_{\min} \geq 13 \\ (x_2 + z_2)_{\min} \geq 25 \\ (y_2 + z_2)_{\min} \geq 21 \end{cases}$$

Решив систему получаем, что минимальные натуральные корни это $x_2 = 9, y_2 = 5, z_2 = 16$

$$\begin{cases} (x_3 + y_3)_{\min} \geq 11 \\ (y_3 + z_3)_{\min} \geq 13 \\ (x_3 + z_3)_{\min} \geq 28 \end{cases}$$

Для этой системы минимальные корни $x_3 = 0, y_3 = 0, z_3 = 13$

~~$$abc = 2^{x_1+y_1+z_1} \cdot 3^{x_2+y_2+z_2} \cdot 5^{x_3+y_3+z_3}$$~~

$$abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\text{Ограничения } \begin{cases} 9\pi - 2x \in [0; 10\pi] \\ \sin x \in [-1; 1] \end{cases} \Rightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}$$

$$\cos(\arccos(\sin x)) = \cos\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right)$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right)$$

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right)\right) \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{4\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$$

$$\sin x - \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5}\right) = 0$$

$$2 \cdot \sin \frac{x - \frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5}}{2} \cos \frac{x + \frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5}}{2} = 0$$

$$\sin \left(\frac{2x}{5} + \frac{\pi}{5}\right) \cos \left(\frac{3x}{5} - \frac{\pi}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \left(\frac{2x}{5} + \frac{\pi}{5}\right) = 0 \\ \cos \left(\frac{3x}{5} - \frac{\pi}{5}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{5} + \frac{\pi}{5} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{3x}{5} - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{7\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

С учетом ограничений получаем корни $-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}$

Ответ: $-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

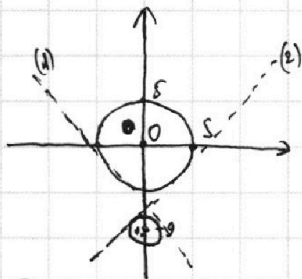
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N4

$$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 & (1) \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 & (2) \end{cases}$$

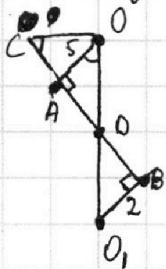
- (1) это окружность с центром $(0;0)$ и радиусом 5
(2) это окружности с центром $(0;-9)$ и радиусом 2



Прямая $5x + 6ay - b = 0$ имеет с оговоркой от нуля до 4 решений. Также эта прямая пересекает ОУ в точке $\frac{b}{6a}$. Это есть если ~~прямая~~ условие будет выполняться от касания прямой (1) до касания прямой (2).

Из-за симметрии от-но ОУ можно рассмотреть только прямую (1).

Пусть она касается верхней окр в точке А, касается в В, пересекает ОХ в С и ОУ в D. Получаем:



$$\triangle AOD \sim \triangle BO_1D, \text{ так } \begin{cases} \frac{AO}{O_1B} = \frac{OD}{DO_1} = \frac{5}{2} \\ DO + DO_1 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OD = \frac{45}{7} \\ O_1D = \frac{18}{7} \end{cases}$$

$$\angle AOD = \angle O_1CD$$

$$\operatorname{tg} \angle OCD = -\frac{5}{6a}$$

$$\operatorname{tg} \angle OCD = \operatorname{tg} \angle AOD = \sqrt{1 - \frac{1}{\cos^2 \angle AOD}} = \sqrt{1 - \frac{O_1D^2}{AO^2}} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$-\frac{5}{6a} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$a = -\frac{35}{24\sqrt{2}} = -\frac{35\sqrt{2}}{48}$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{35\sqrt{2}}{48}; \frac{35\sqrt{2}}{48}\right)$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 5

$$1. \log_{11}^4 x - 6 \log_{x 11} = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad x \neq 1$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} - \left(-\frac{2}{3 \log_{11} x} \right) + 5 = 0.$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{16}{3 \log_{11} x} + 5 = 0.$$

$$2. \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y 11} = \log_{0,125y^3} (11^{-11}) - 5.$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} - \left(-\frac{13}{3 \log_{11} (0,5y)} \right) + 5 = 0.$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \frac{16}{3 \log_{11} (0,5y)} + 5 = 0.$$

3. Заметим, что при $\log_{11} (0,5y) = -\log_{11} (x)$ первое и второе выражения равны, то есть если x является решением первого уравнения то $y = \frac{2}{x}$ также является решением второго.

$$\text{Значит } xy = 2$$

4. Других ~~решений~~ ~~функция~~ ~~не имеет~~, ~~потому что она монотонно возрастает~~:

$$\text{Применяя первое выражение: } \frac{4 \log_{11}^3 (x)}{x \log_{11}} + \frac{16}{3 \log_{11}^2 x \cdot x \log_{11}} = 0$$

$$f(t) = t^4 - \frac{16}{3t} + 5$$

$$f'(t) = 4t^3 - \frac{16}{3t^2} = 0 \quad t_0 = \sqrt[5]{\frac{16}{12}}$$

$$f(t_0) = \sqrt[5]{\left(\frac{16}{12}\right)^4} - \frac{16 \sqrt[5]{12}}{3 \sqrt[5]{6}} + 5 > 0$$

Поэтому функция имеет только один вещественный корень



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Для функции $g(t) = t^4 + \frac{16}{3t} + 5$ тоже будет одно решение
по той же причине. Значит $xy = 2$ единственное удовлетворяющее
нас значение.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

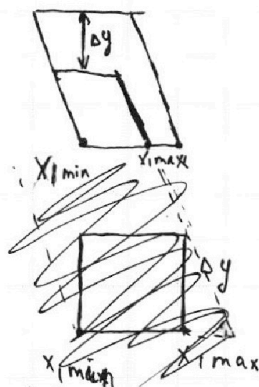
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если $\Delta x \geq 0$ $\Delta y \geq 0$



$$x_2 \max = 17 - \frac{\Delta y}{6}$$

$$x_1 \min = 0$$

$$x_4 \max = 17 - \frac{\Delta y}{6} - \Delta x$$

$$\left(\frac{96 - \Delta y}{6}\right) \cdot \left(17 - \frac{\Delta y}{6} - \Delta x\right) + 5n \left(17 - \frac{\Delta y}{6} - \Delta x\right)$$

Δx	1	2	3	4	5	6	7	8
Δy	42	36	30	24	18	12	6	0
$N_{\text{модель}}$	135	130	245	300	355	410	465	520

Если $\Delta x > 0$ $\Delta y < 0$

$$x_1 \min = -17$$

$$x_4 \max = -\frac{96\Delta y}{6} + 17 = 29 - \frac{\Delta y}{6}$$

$$\left(19 - \frac{\Delta y}{6}\right) \cdot \left(\frac{\Delta y}{6} + 1\right) + 5n \left(18 - \frac{\Delta y}{6}\right)$$

Δx	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Δy	-6	-12	-18	-24	-30	-36	-42	-48	-54
$N_{\text{модель}}$	135								

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

МФТИ

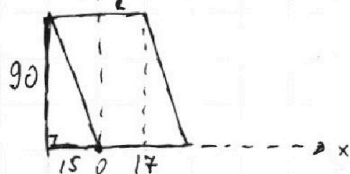
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 6

4. У нас получается параллелограмм с высотой 90 и с боковыми сторонами $y = -6x$ и $y = -6x + 102$



$$2. \quad 6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$$

$$6 \Delta x + 5y = 48, \text{ zgl } \Delta x = x_2 - x_1, \Delta x \in [-17; 17]$$

$$\Delta y = y_2 - y_1, \Delta y \in [-90; 90].$$

3. Возмощие знаков:

Δx	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Δy	90	84	78	72	66	60	54	48	42	36	30	24	18	12	6	0	-6	-12	-18	-24	-30	-36	-42	-48	-54
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

4. При $\Delta y = 90$ $X_{1\max} = 17 - \frac{1}{6} \cdot 90 = 2$, $X_{2\max} = -7 + 2 = -5$.

$$x_{1 \min} = 0, 3u \quad x_{2 \min} = -7$$

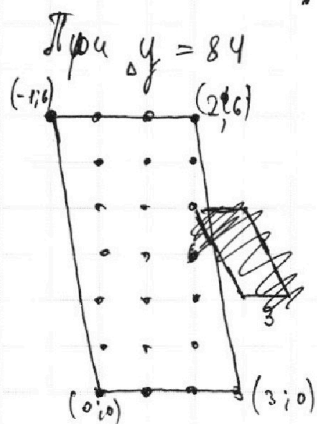
$$y_{\max} = y_{\min} = 0$$

количество пар: 3

$$x_{1\max} = 17 - \frac{1}{6} \cdot 84 = 3 \quad x_{1\min} = 0.$$

$$y_{\max} = 6$$

$$y_1 \min = 6$$



Количество пар: $3 \cdot (\overline{100}) \cdot \ln 10 \cdot (x_{1, \max} - x_{1, \min}) \cdot \ln 10 +$
 $+ (x_{1, \max} - x_{1, \min} + 1) \cdot \ln 10 \cdot 0.6$
 $= 3 \cdot 100 + 4 \cdot 2 = 23$

Эта формула справедлива для любой пары Δx и Δy , где $\Delta y \geq 0, \Delta x \geq 0$.

5. Преобразуем это выражение $\left(\underbrace{\left(17 - \frac{1}{6} \Delta y \right)}_{x, \max} - \underbrace{0}_{x, \min} \right) \cdot \frac{5n}{6} + \left(17 - \frac{\Delta y}{6} + 1 \right) \cdot \frac{5n}{6} =$
 $\Rightarrow \left(17 - \frac{\Delta y}{6} \right) \cdot \frac{5n}{6} + \left(18 - \frac{\Delta y}{6} \right) \cdot \frac{5n}{6}$

Простыми для Катова из $y \geq 0$ и $x \leq 0$

BY	90	84	78	72	66	60	54	48	42	36	30	24	18	12	6	0
Numerik	3	23	58	99	155	223	303	395								



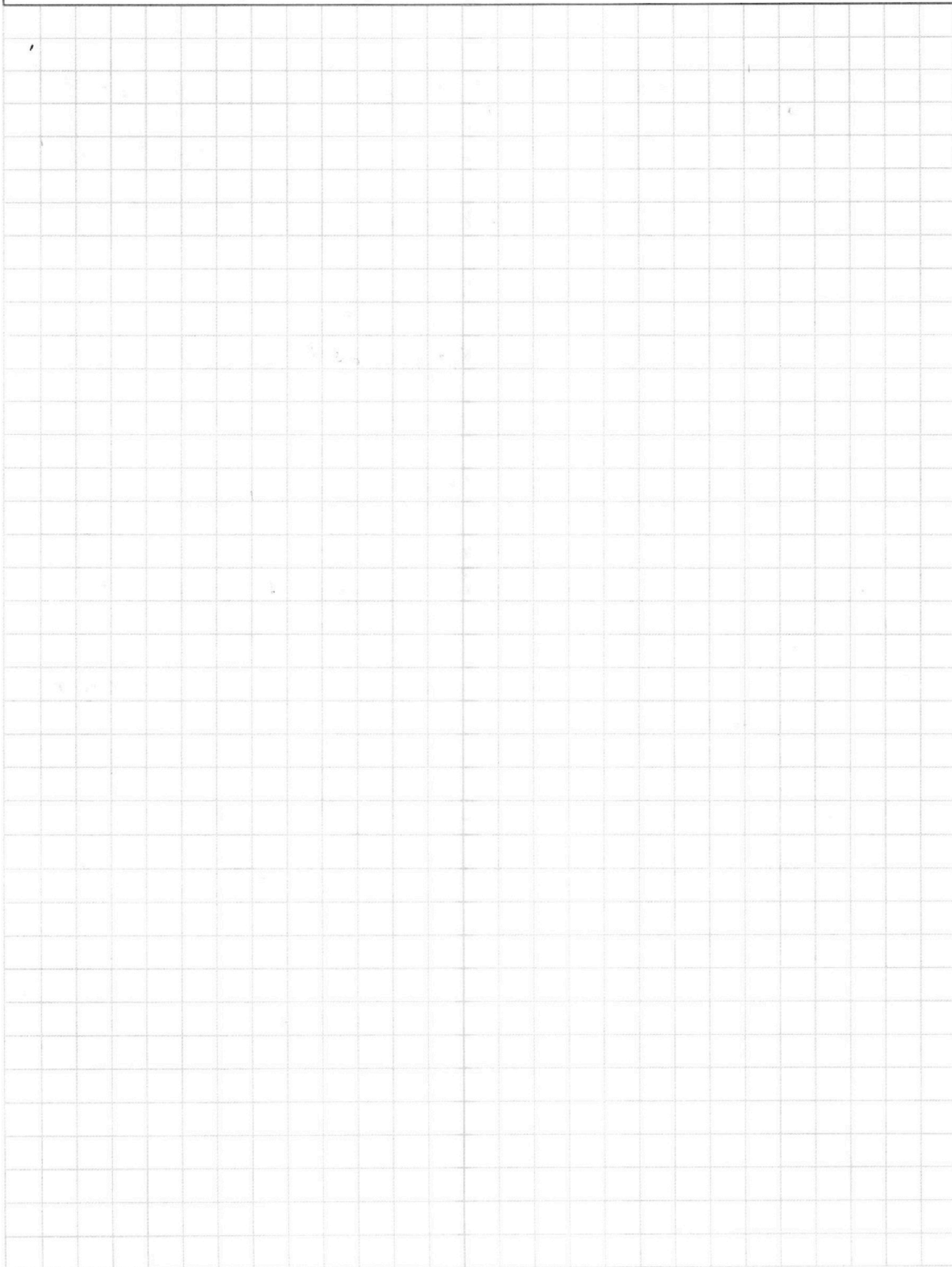
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



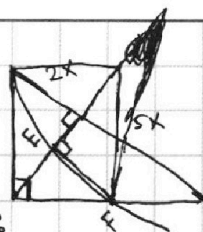
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



90 + 90
100 + 90
110 + 155
120 + 180
130 + 225
140 + 270
150 + 315
160 + 360



$$\log_{11}^4(0,5y) + \frac{1}{\log_{11} 0,5y} + \frac{13}{3} \log_{11} 0,5y + 5.$$

$$\log_{11}^4(0,5y) + \frac{16}{3} \log_{11} 0,5y + 5 = 0.$$

$$\log_{11} 0,5y = -\log_{11} x.$$

$$0,5y = \frac{1}{x}.$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} + \frac{2}{3 \log_{11} x} + 5 = 0.$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{16}{3 \log_{11} x} + 5 = 0.$$

$$\frac{4 \log_{11} x + \frac{16}{3 \log_{11} x}}{x \log_{11} x} = 0.$$

$$\frac{\pm}{\sqrt{2}} = \frac{\pm}{\sqrt{2}} =$$

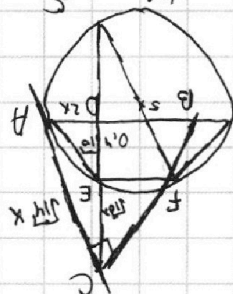
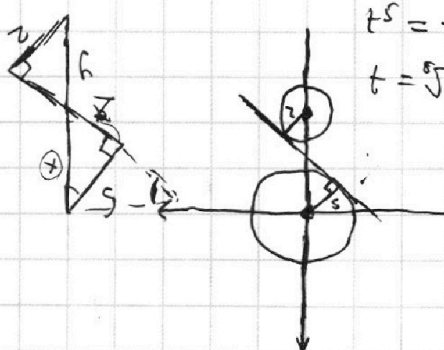
$$= \frac{5y}{18} - 1 = 767 \sqrt{\frac{16}{12}} -$$

$$\frac{5}{\pm} = \frac{16}{3t^2} + 5$$

$$2x = 2s - \left(\frac{\pm}{5y}\right) \frac{12t^5 + 16}{3t^2} = 0.$$

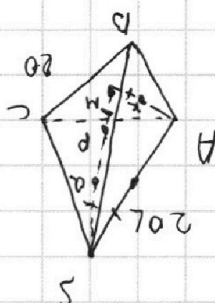
$$t^5 = -\frac{16}{12},$$

$$t = \sqrt[5]{-\frac{16}{12}}.$$



$$a = 14 \sqrt{10}$$

$$ht = 14 \sqrt{10}$$



$$p_{5,2} = x$$

$$p_{5,2} = 2x$$

$$p_{5,2} = \frac{x}{s} = \frac{y}{2}$$

$$p_{5,2} = p + x$$

$$y = \frac{a}{-5x + 6}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$x_2 = \frac{17}{2}$$

$$y_2 = y$$

$$I_2 = 16$$

$$2Z_3 + 11 = 49, \quad 38$$

$$I_3 = 19$$

$$\sin x - \cos y =$$

$$5\frac{17}{10} - \frac{97}{10}.$$

$$\log_{11} x - 6 \log_x 11 = -\frac{2}{3} \log x 11 - 5.$$

$$200 - 243 + 28 = 24$$

$$\sin x - \sin y = \frac{1}{2} \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\log_4 x - \frac{6}{\log_4 x} + \frac{2}{3} \log_4 x + 5 = 0.$$

$$11 + 13 + 28 = 26$$

$$\frac{2x}{5} + \frac{1}{5} = \pi k$$

$$9 + 2 = 11$$

$$2x + n = 5nk$$

$$\chi = -\frac{\eta}{2} + \frac{\sum \pi \kappa}{2}$$

$$27_3 + 11 = 41$$

$$Z_3 = 15.$$

$$3x - \pi = \frac{5\pi}{2} + 5\pi n$$

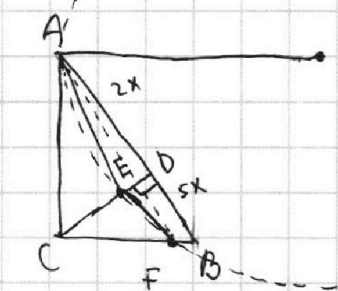
$$x_3 = 13.$$

$$3x = \frac{7\pi}{2} + 5\pi n$$

$$y_3 = 0.$$

$$x = \frac{7\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi n$$

$$\sin x = \cos \left(\frac{9}{10}\pi - \frac{2x}{10} \right)$$



$$\frac{1}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{6} = \frac{2}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2}; 2\pi; 4,5\pi$$

$$\frac{7\pi}{6} - \frac{10\pi}{6} - \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{270}{6} = \frac{90}{2}$$

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - \underline{2x}$$

$$\arccos(\sin x) \in [0; \pi]$$

$$10 \arccos(\sin x) \in [0; 10\pi]$$

$$\sin x + \cos y = \frac{1}{2} \sin(x)$$

$$9n-2x \in [0; 1017]$$

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$$



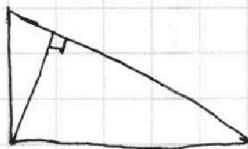
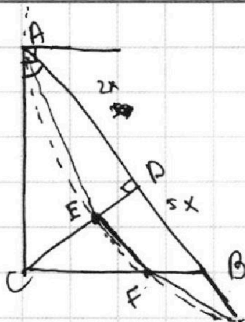
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

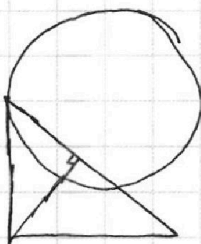
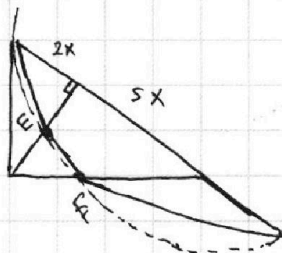
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{10}x^2$$

$$2x \cdot 5x$$



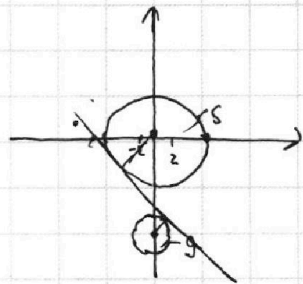
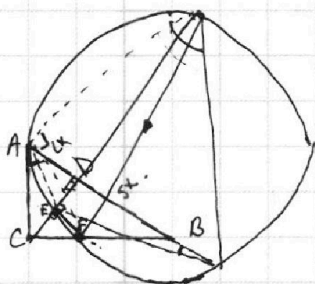
$$AC^2 = CF \cdot AB$$

$$x^2 + (y+s)^2$$

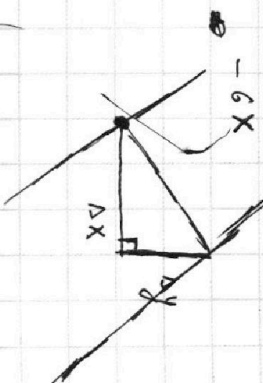
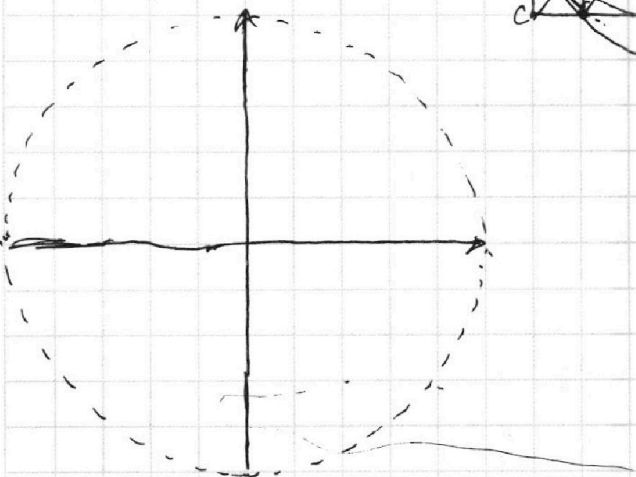
$$x = \frac{b}{5}$$

$$a = 0$$

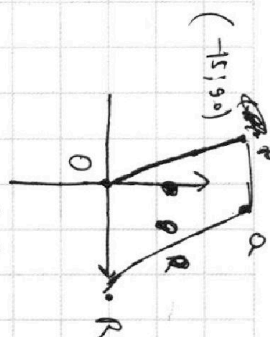
$$\frac{b}{5} \in (-5; -2] \cup (2; 5)$$



$$g = k \cdot y$$



$$\Delta x_{\max} = 17$$
$$\Delta y_{\max} = 80$$



$$g(x) + \Delta y = 48$$