



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-16; 80)$ ,  $Q(2; 80)$  и  $R(18; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1.  $a, b, c \in \mathbb{N}$

Пусть  $k, m, n$  — натуральные числа такие, что:

$$ab = k \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}, \quad bc = m \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}, \quad ac = n \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}, \text{ тогда:}$$

$$ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = kmn \cdot 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}, \text{ значит:}$$

$$abc = \sqrt{kmn} \cdot 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34} \cdot \sqrt{3}, \text{ т.к. } a, b, c \in \mathbb{N}, \text{ то } abc \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sqrt{3kmn} \in \mathbb{N} \Rightarrow$  какие-то из чисел  $k, m, n$  содержат в разложении на простые множители тройку  $3$  нечётной степени, т.к. нас интересует минимизация, то возьмём  $3^1 = 3$ .

Из произведения  $abc$  можно выделить  $a, b, c$  по отдельности ведь мы знаем парные произведения, на  $ab$  и  $bc$   $abc$  делится и всё хорошо, но при делении на  $ac$ :

$$\frac{abc}{ac} = \frac{\sqrt{3kmn} \cdot 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34}}{n \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}} = \sqrt{\frac{3km}{n}} \cdot 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^{-5} \Rightarrow \frac{abc}{ac} \notin \mathbb{N}, \text{ значит}$$

$\sqrt{kmn} \geq 5^5 \Rightarrow kmn \geq 5^{10}$ . Взяв в интересах минимизации возьмём  $kmn = 3 \cdot 5^{10}$  (т.к.  $kmn$  содержит  $3$  из ранее написанного).

Тогда, пусть  $k=3, m=5^{10}, n=1$ :  $abc = 3 \cdot 5^5 \cdot 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34} = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{abc}{ab} = \frac{2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}}{3 \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}} = 2^9 \cdot 3^{13} \cdot 5^{27} \\ b &= \frac{abc}{ac} = \frac{2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}}{1 \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}} = 2^3 \cdot 3^7 \\ a &= \frac{abc}{bc} = \frac{2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}}{5^{10} \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}} = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{12} \end{aligned} \right\} \text{ все числа натуральные.}$$

Ответ:  $abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3} \quad 10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \cos(-x) = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$1) \quad 10 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \pi - 2x \quad 2) \quad 10 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) = \pi - 2x$$

$$10 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \pi - 2x$$

$$5\pi + 10x = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10x = \pi - 2x$$

$$12x = -4\pi$$

$$8x = 4\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

Мы нашли корни при  $x \in [-\pi; \pi]$ .

По графику видно, что  
есть еще корни, рассмотрим  
другие угастки:

$$x \in [-3\pi; -\pi]:$$

$$1) \quad 10 \arcsin\left(\sin\left(-x - \frac{3\pi}{2}\right)\right) = \pi - 2x$$

$$-10x - 15\pi = \pi - 2x$$

$$-8x = 16\pi \Rightarrow x = -2\pi$$

$$2) \quad 10x - 15\pi = \pi - 2x \Rightarrow 12x = 16\pi \Rightarrow x = \frac{4}{3}\pi \quad \text{не подходит } [-3\pi; -\pi].$$

$$x \in [\pi; 3\pi]:$$

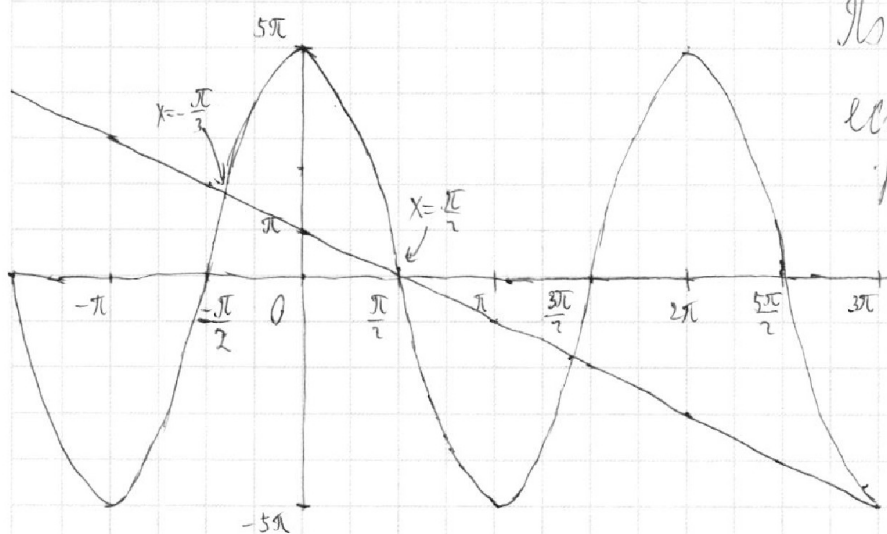
$$\text{проверим: } 10 \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5\pi}{3} = \pi - \frac{4}{3}\pi \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  корни

$$1) \quad -10x + 25\pi = \pi - 2x \Rightarrow -8x = -24\pi, \quad x = 3\pi$$

$$2) \quad 10x + 25\pi = \pi - 2x \Rightarrow 12x = -24\pi, \quad x = -2\pi$$

$$\text{Ответ: } -2\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}, 3\pi.$$



|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

W4

$$1) ax - 3y + 4b = 0$$

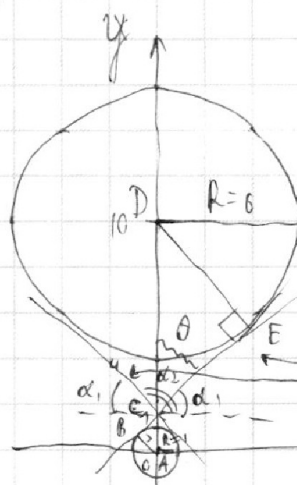
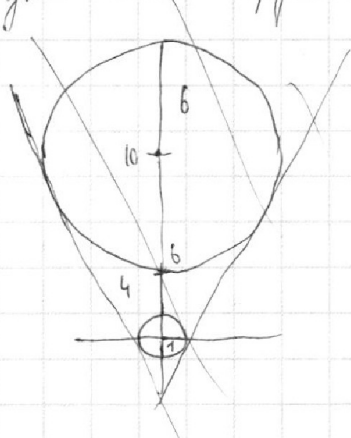
$$2) (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 2ay + 64) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow \text{окружность с центром } (0, 0), R = 1$$

$$x^2 + y^2 - 2ay + 64 = x^2 + (y - 10)^2 - 36 = 0 \Rightarrow \text{окр-ть с центром } (0, 10), R = 6.$$

$$ax - 3y + 4b = 0 - \text{прямая} \quad y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$$

Четыре решения будет если прямая 1) будет секущей для обеих окружностей, то есть:



внутренние касательные  
к обеим окружностям.

$$\frac{a}{3} > \tan \alpha_1, \quad \frac{a}{3} < \tan \alpha_2, \quad \tan \alpha_2 = -\tan \alpha_1$$

Пусть  $A, D$  - центры окружностей,  $B, E$  - точки касания,  
 $C$  - точка пересечения  $AD$  и  $BE$ , т.к.  $\angle BSA = \angle DSE$  (вертикальные),  $\angle DEC = \angle ABC = 90^\circ$   
(радиус, проведенный в точку касания), то  $\triangle ABC \sim \triangle CDE \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{1}{6} = \frac{AC}{DC} \Rightarrow DC = 6AC$ ,  
 $AC + DC = 7AC = 10$  (т.к. расстояние между центрами = 10)  $\Rightarrow AC = \frac{10}{7}, DC = \frac{60}{7}$

$$CE = \sqrt{DE^2 + CD^2} = \sqrt{\frac{3600}{49} + 36} = 6\sqrt{\frac{100}{49} + 1} = \frac{6}{7}\sqrt{51} \Rightarrow BC = \frac{CE}{6} = \frac{\sqrt{51}}{7} \Rightarrow BE = \sqrt{51}$$

$$DB = \sqrt{36 + 51} = \sqrt{87}$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{51}}{10}$$

$$\sin \theta = \frac{DE}{DC} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10} \Rightarrow \sin \alpha_1 = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin \frac{\pi}{2} \cos \theta - \cos \frac{\pi}{2} \sin \theta = \frac{\sqrt{51}}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha_1 = \frac{7}{10} \Rightarrow \tan \alpha_1 = \frac{\sqrt{51}}{7} \Rightarrow \frac{a}{3} > \frac{\sqrt{51}}{7} \Rightarrow a > \frac{3\sqrt{51}}{7} \quad a < -\frac{3\sqrt{51}}{7}$$

Ответ:  $a \in (-\infty, -\frac{3\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{7}, +\infty)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt[5]{\begin{cases} \log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{(2x)^3} 5^4 - 3 & \begin{cases} x > 0, x \neq \frac{1}{2} \\ y > 0, y \neq 1 \\ xy \neq ? \end{cases} \\ \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 5^4 - 3 \end{cases}}$$

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_{5^3} 2x} = \frac{4}{3\log_{5^3} 2x} - 3 \\ \log_5^4 y + \frac{4}{\log_{5^3} y} = -\frac{1}{3\log_{5^3} y} - 3 \end{cases}$$

Пусть  $a = \log_5 2x$ ,  $b = \log_5 y$ ,  
тогда  $xy = \frac{5^{a+b}}{2}$

$$\ominus \begin{cases} a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0 \\ b^4 + \frac{13}{3b} + 3 = 0 \end{cases}$$

$$a^4 - b^4 - \frac{13}{3a} - \frac{13}{3b} = 0 \quad \text{если } a = -b, \text{ то верно } \Rightarrow xy = \frac{1}{2}.$$



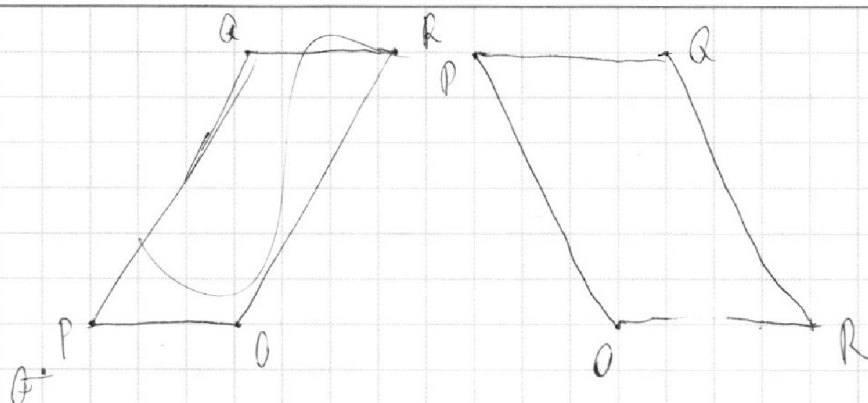
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a^4 - b^4 = -\frac{13}{3} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 0$$

$$a^4 = -\frac{13}{3a}$$

$$\begin{cases} \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b = x^2 + y^2 \\ \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b \end{cases}$$

$$\sqrt[5]{\left(\frac{13}{3}\right)^4} - \sqrt[5]{\left(\frac{13}{3}\right)^4} - \frac{13}{3} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{a} \right) = 0$$

$$3a^5 = -13 \Rightarrow a = \sqrt[5]{-\frac{13}{3}}$$

$$b = \sqrt[5]{-\frac{13}{3}}$$

$$x_1^2 - \frac{a}{3}x_1 + \frac{4}{3}b = y_1^2$$

$$b^4$$

$$2\gamma + \alpha + \delta =$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \delta = \frac{1}{5} = (y^3)^{\alpha} = y^{3\alpha}$$

$$\log_y a = \frac{1}{3} \log_y a = \log_y a^{\frac{1}{3}}$$

$$5^{-1} = y^{\alpha} \Rightarrow y = 5^{3\alpha} \log_5 y = -1$$

$$\log_5(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \frac{1}{3} \log_{2x} 5 \Rightarrow y = -\frac{1}{3\alpha}$$

$$-3 \Rightarrow \log_5(2x) - 4 \log_{2x} 5 = -3$$

$$a^4 - 4 \frac{1}{a} = -3$$

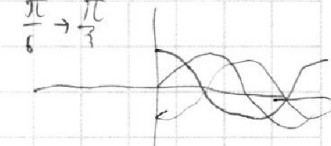
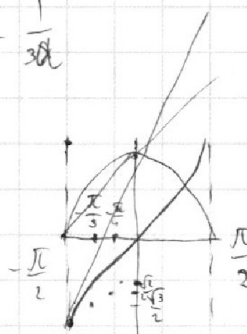
$$a^4 - \frac{4}{a} + 3 = 0$$

$$\frac{\pi}{3} \rightarrow \frac{\pi}{6} \cdot 10 \frac{5\pi}{3}$$

$$0$$

$$\frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{\pi}{3}$$



$$\arcsin(x) = \cos x = \frac{\pi}{16} - \frac{x}{5}$$

$$DC =$$

$$\log \Rightarrow$$

$$\sin \theta =$$

$$D \cdot \frac{DE}{AC} =$$

$$\frac{DE}{AC} =$$

$$\frac{DE}{AC} =$$

$$\frac{DE}{AC} =$$

$$\frac{DE}{AC} =$$

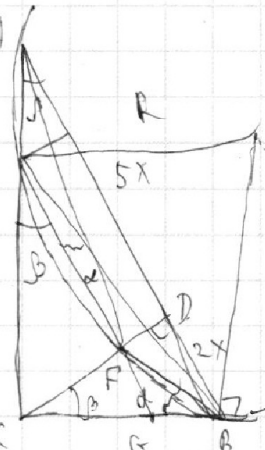
$$\frac{DE}{AC} =$$

$$\frac{DE}{AC} =$$

$$\frac{DE}{AC} =$$

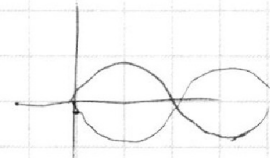
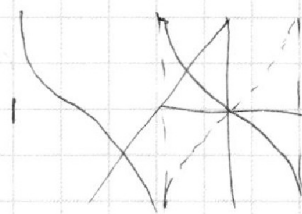
$$\frac{DE}{AC} =$$

$$\frac{DE}{AC} =$$



$$\angle FEB = \angle FBC = \angle EBA$$

$$2\alpha \frac{\pi}{2} - 2\alpha = \angle EBF$$



$$-\frac{\pi}{2} \quad -\frac{\pi}{3}$$

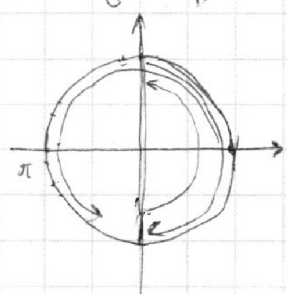
$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \cdot 10 = \frac{5\pi}{3}$$

$$12x = -4\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{3}$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\cos x = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$$

$$\log_5^4(y) + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 5 - 3$$

$xy = ?$

$$\frac{\log_5^4 2x}{\log_5^4 5} - 3 \log_5 5$$

$$\begin{cases} \log \log_5^4 2x - 3 \frac{1}{\log_5 2x} = \frac{4}{\log_5 8x^3} - 3 \\ \log_5^4 y + 4 \frac{1}{\log_5 y} = \log - \frac{1}{\log_5 y^3} - 3 \end{cases}$$

$$\log_5^4 2x - \frac{3}{\log_5 2x} - \log_5^4 y - \frac{4}{\log_5 y} = \frac{4}{3 \log_5 2x} + \frac{1}{3 \log_5 y}$$

$$\log_5 2x = a, \log_5 y = b \Rightarrow a^4 - \frac{3}{a} - \frac{4}{3a} - b^4 - \frac{4}{b} - \frac{1}{3b} = 0$$

$$a^4 - \frac{13}{3a} - b^4 - \frac{13}{3b} = 0$$

$$a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0 \quad a \neq 0 \Rightarrow a^5 + 3a - 13 = 0$$

$$a^4 - b^4 - \frac{13}{3} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 0$$

$a = -b$  решение

$$\log_5 2x = -\log_5 y$$

$$2x = 5^a$$

$$y = 5^b$$

$$\Rightarrow xy = \frac{5^{a+b}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$2x = -y$$

$$x = -\frac{y}{2}$$

$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3 \Rightarrow a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0$$

$$3a^5 + 9a - 13 = 0$$

$$3a(a^4 + 3) = 13$$

$$a^4 = \frac{13}{3^4} = \sqrt[4]{13} - 3$$

$$\begin{aligned} a^4 - \frac{13}{3a} + 3 &= 0 \\ a^4 - \frac{13}{3a} + 3 &= 0 \\ a^4 - \frac{13}{3a} + 3 &= 0 \\ a^4 - \frac{13}{3a} + 3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^4 - \frac{13}{3a} + 3 &= 0 \\ a^4 - \frac{13}{3a} + 3 &= 0 \\ a^4 - \frac{13}{3a} + 3 &= 0 \\ a^4 - \frac{13}{3a} + 3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3a &= \sqrt{13} & a &= \frac{\sqrt{13}}{3} \\ a^4 - 3 &= \sqrt{13} & a^4 &= \sqrt{13} + 3 \\ 3a &= \sqrt[3]{13} & a &= \frac{\sqrt[3]{13}}{3} \\ a^4 + 3 &= \sqrt[3]{13} & a^4 &= \sqrt[3]{13} - 3 \end{aligned}$$



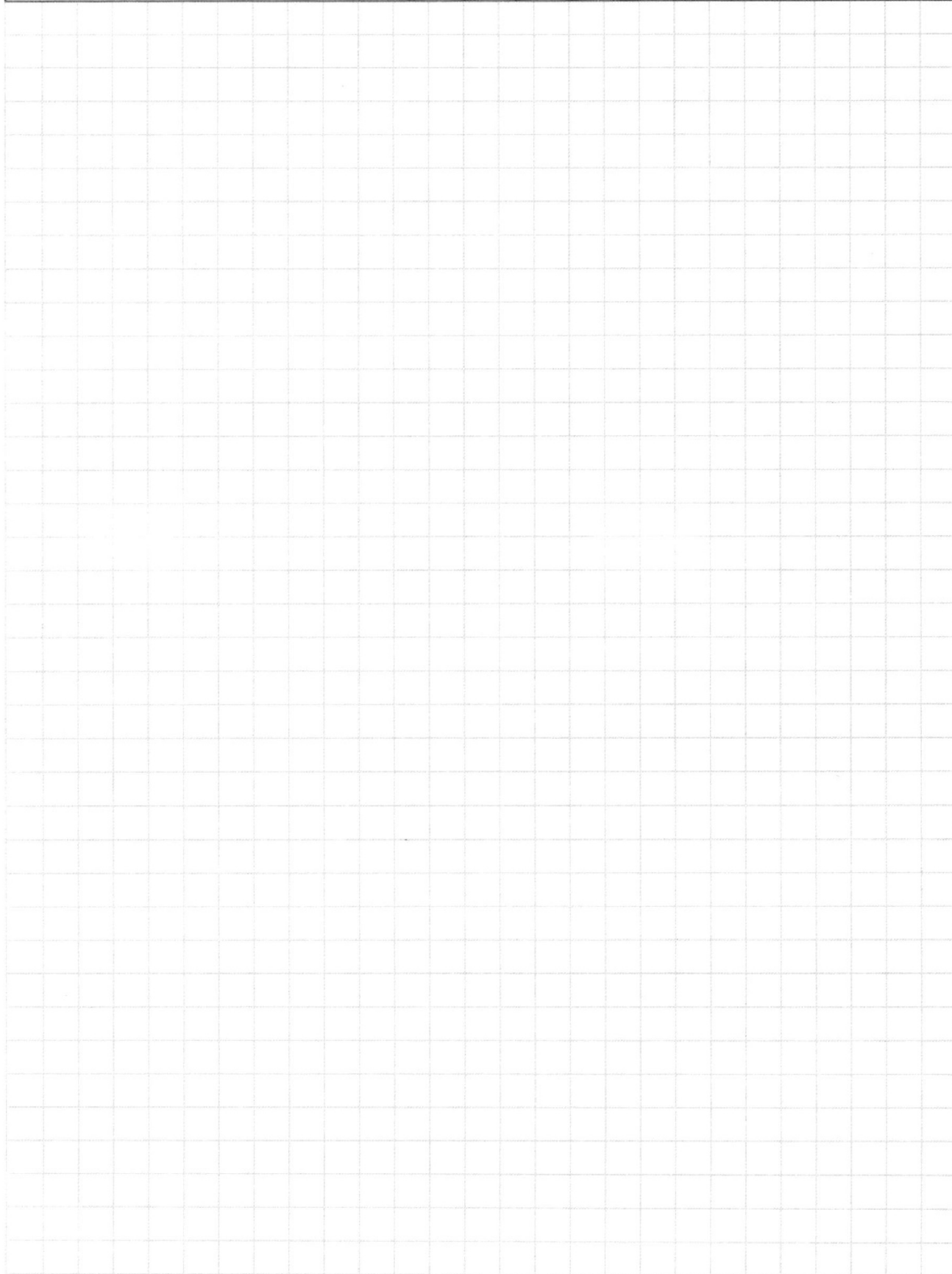
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



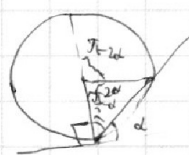
1.  $ab = k \cdot 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$ ,  $bc = m \cdot 2^{12} \cdot 3^{26} \cdot 5^{17}$ ,  $ac = n \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$ ,  $k, m, n \in \mathbb{N}$

$ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = kmn \cdot 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}$ , если  $kmn = 3^2 \cdot 5^{20}$  то  $abc =$

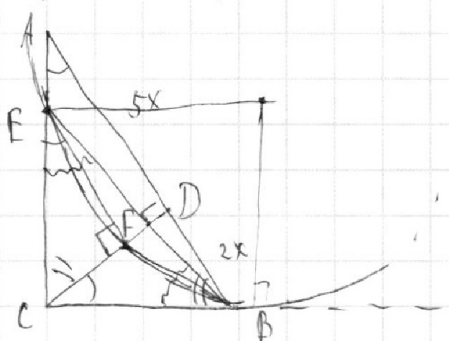
$= 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{29} \Rightarrow c = \frac{2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}}{k}$ ,  $a = \frac{2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{12}}{m}$ ,  $b = \frac{2^3 \cdot 3^7 \cdot 5^{10}}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow ab = \frac{2^8 \cdot 3^{15} \cdot 5^{12}}{mn}$ ,  $bc = \frac{2^{12} \cdot 3^{21} \cdot 5^{17}}{nk}$ ,  $ac = 2^{14} \cdot 3^{22} \cdot 5$

$abc = \sqrt{kmn} \cdot 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{30}$



2.



$AB \parallel EF$

$CD^2 = AD \cdot DB = 10x^2$

$\frac{AD}{DB} = \frac{5}{2}$

$\triangle ADC \sim \triangle CDB$

$\frac{CD}{5x} = \frac{2x}{CD}$

$\angle FEB = \angle FBC$

$\frac{CF}{CD} = \frac{EF}{AD}$

$CD = \sqrt{10}x$ ,  $[ABC] = \frac{7\sqrt{10}}{2}x^2$

$BC = \sqrt{10x^2 + 4x^2} = \sqrt{14}x$ ,  $AC = \sqrt{35x^2} = \sqrt{35}x$

$\triangle ECB$

$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

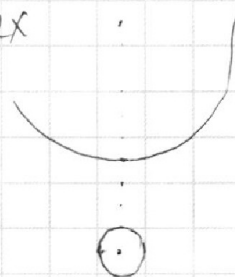
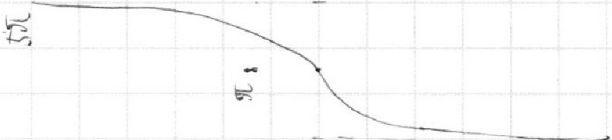
$\arcsin \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$10 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \pi - 2x$

$5\pi - 10x = \pi - 2x$

$8x = 4\pi$

$x = \frac{\pi}{2}$



$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$

$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 2cy + 64) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 - 2cy + 100 - 36} = 0 \Rightarrow x^2 + (y - 10)^2 = 36$