



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
- а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
- б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 1. $a^2 b^3 c^2 = ab \cdot bc \cdot ac : 2^7 3^{11} 5^{14} : 2^{13} 3^{15} 5^{18} \cdot 2^{14} 3^{17} 5^{43} = 2^{34} 3^{43} 5^{75}$

Тогда $abc : 2^{17} 3^{22} 5^{38} = 2^{17} 3^{22} 5^{38}$. (грубая оценка, $abc : ac : 2^{17} 3^{19} 5^{43}$

Поскольку 2, 3 и 5 попарно взаимно просты, $abc : 2^{17} 3^{22} 5^{43}$.

Поскольку a, b и c натуральные, abc - натуральное, > 0 .

Тогда если $abc : 2^{17} 3^{22} 5^{43}$, то $abc \geq 2^{17} 3^{22} 5^{43}$.

Заметим, что для $a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$; $ab = 2^7 3^{11} 5^{14}$; $b = 2^3 \cdot 3^4$; $bc = 2^{13} 3^{15} 5^{28}$; $c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{29}$; $ac = 2^{14} 3^{18} 5^{43}$; $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ } условие выполнено

$abc = 2^{17} 3^{22} 5^{43}$. - пример на минимальное значение суммы.

Тогда ответ: $2^{17} 3^{22} 5^{43}$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x. \quad \text{Пусть } t = \frac{\pi}{4} - x, \text{ тогда } \sin x = \cos t.$$

$$5 \arccos(\cos t) = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - t = \frac{7\pi}{4} - t$$

$$\text{Пусть теперь } t = k\pi + d, \text{ где } k \in \mathbb{Z}, d \in [0; \pi)$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда из определения } \arccos(\cos t) &= \arccos(\cos d) = d \text{ при чётных } k \\ \arccos(\cos t) &= \arccos(\cos d + \pi) = \arccos(-\cos d) = \\ &= \pi - d \text{ при нечётных } k. \end{aligned}$$

$$\text{Найдём ограничения на } k: \text{ из исходного уравн. } -\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2};$$

$$\text{тогда } -4\pi \leq \frac{3\pi}{4} - t \leq \frac{7\pi}{4} - t < 2\pi. \quad \text{Тогда } k \in [-4; 1].$$

$$k = -4: 5d = \frac{7\pi}{4} + 4\pi - d; 6d = \frac{23\pi}{4}; d = \frac{23\pi}{24}; t = -3\frac{1}{24}\pi; x = 3\frac{7}{24}\pi$$

$$k = -2: 5d = \frac{7\pi}{4} + 2\pi - d; 6d = \frac{15\pi}{4}; d = \frac{15\pi}{24}; t = -1\frac{9}{24}\pi; x = 1\frac{13}{24}\pi$$

$$k = 0: 5d = \frac{7\pi}{4} - d; 6d = \frac{7\pi}{4}; d = \frac{7\pi}{24}; t = \frac{7\pi}{24}; x = -\frac{1}{24}\pi$$

$$k = -3: 5\pi - 5d = \frac{7\pi}{4} + 3\pi - d; -4d = -\frac{\pi}{4}; d = \frac{\pi}{16}; t = -2\frac{15}{16}\pi; x = 3\frac{3}{16}\pi$$

$$k = -1: 5\pi - 5d = \frac{7\pi}{4} + \pi - d; -4d = -\frac{9\pi}{4}; d = \frac{9\pi}{16}; t = -\frac{7}{16}\pi; x = \frac{11}{16}\pi$$

$$k = 1: 5\pi - 5d = \frac{7\pi}{4} - \pi - d; -4d = \frac{-\pi}{4}; d = \frac{\pi}{16}; d > \pi - \text{не подходит.}$$

все остальные x, d, k, t
удовл. условиям на них

$$\text{Ответ: } x_1 = 3\frac{7}{24}\pi$$

$$x_2 = 1\frac{13}{24}\pi$$

$$x_3 = -\frac{1}{24}\pi$$

$$x_4 = 3\frac{3}{16}\pi$$

$$x_5 = \frac{11}{16}\pi$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.
$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ (x^2+4x+y^2+4)(x^2+y^2-9)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ ((x+2)^2+y^2-4)(x^2+y^2-9)=0. \end{cases}$$

Посмотрим на графическое представление системы: второе уравнение

задаёт две окружности. окр-ти: U_1 : центр $O_1(-2;0)$, радиус $r_1=2$

U_2 : центр $O_2(0;0)$, радиус $r_2=3$.

Первое уравнение задаёт прямую; если $a \neq 0$, то она не параллельна осям координат. Если $a=0$, то $x=7b$ — верт. прямая.

Но у окружностей y -координаты центров совпадают, но пересечения нет, причём ни одна не лежит внутри другой. Тогда прямая $x=7b$, перпендикулярная их линии центров, не может пересекать обе окружности одновременно. Но с одной она имеет не более двух т.п., так что этот случай нам не подходит.

Тогда применим уравнение прямой так

$$y = \frac{7b-x}{3a} = \frac{7b}{3a} - \frac{1}{3a} \cdot x. \text{ Для каждого } a \text{ параметр } b$$

задаёт семейство прямых с ~~заданным~~ ^{фиксированным} угловым коэффициентом $k = -\frac{1}{3a}$.

(они друг другу параллельны). Если какая-то из этих прямых

может одновременно пересекать обе окружности, причём каждая в

двух точках, то данное a нам подходит.

(продолжение на обороте)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

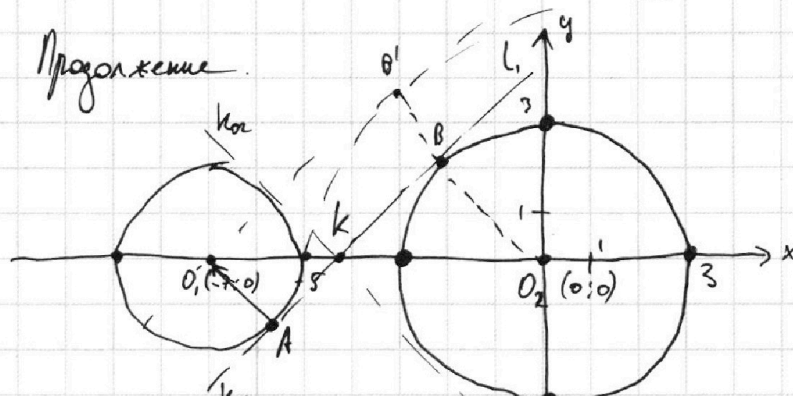
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Задача 4. Продолжение.



Заметим, что если существует прямая, l_2 перес. одну из окружностей в двух точках и касаясь другой, то всегда можно сдвинуть её на $\epsilon > 0$ в сторону той, которой касается, так, чтобы точек пересечения с окружностями не было, т.е. их станет четыре. (по соображениям непрерывности)

Тогда наше "граничное" K_0 соответствует общей касательной (внутренней, иначе, проходила бы прямую через т. К, их таких две). Найдём это K_0 : ((см. рис.)) получим 4 пересечения) Отметим точки A, B (см. рис.)

Заметим, что ~~прямая l1~~

$$\vec{AO_1} \perp \vec{O_2B}, \text{ т.е. } \angle O_1K = 90^\circ - \angle O_1A = 90^\circ - \angle O_2K = \angle KO_2B.$$

Тогда сдвиг на $\vec{AO_1}$ и гомотетия в O_2 с коэфф. $\frac{AO_1 + O_2B}{O_2B} = \frac{r_1 + r_2}{r_2}$ переводят прямую l_1 в одну и ту же — касательную l_3 из $(-7;0)$ к окружности $\omega_2: O_2(0;0)$
 $r_1 + r_2 = r_3 = 5$.

Найдём её уравнение: $l_3: y = (x+7)p$;
 $\begin{cases} y = (x+7)p \\ y^2 + x^2 = 25 \end{cases}$ имеет одно решение: $x^2 - 25 + x^2p^2 + 14xp^2 + 49p^2 = 0$
 $D = 0 \Rightarrow 196p^4 - 4 \cdot (49p^2 - 25)(p^2 + 1) = 0$
 $\Rightarrow 4(25 + 25p^2 - 49p^2) = 0$, т.е.
 $24p^2 = 25, p = \pm \frac{5}{2\sqrt{6}}$

(Знак минус соотв. второй касательной (в ней при аналогичных действиях переменим ω_1, l_2))

Тогда видно, что $p \in (0; \frac{5}{2\sqrt{6}}) \cup (-\frac{5}{2\sqrt{6}}; 0)$; а $\in (-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}) \cup (\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty)$ (ограничена снизу)
 Ответ: а $\in (-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}) \cup (\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

$$\log_{\frac{1}{7}}(6x) - 2\log_{\frac{1}{7}} 7 = \log_{\frac{1}{7}} 2^3 - 4$$

$$\begin{cases} t = 6x & x \neq \frac{1}{6} \\ t, x, y > 0, t \neq 1, y \neq \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\log_{\frac{1}{7}} 6x + 6\log_{\frac{1}{7}} 7 = \log_{\frac{1}{7}} (7^5) - 4$$

$$\log_{\frac{1}{7}} t - \frac{2}{\log_{\frac{1}{7}} 7} = \frac{1,5}{\log_{\frac{1}{7}} 7} - 4$$

$$\log_{\frac{1}{7}} y + \frac{6}{\log_{\frac{1}{7}} 7} = \frac{2,5}{\log_{\frac{1}{7}} 7} - 4$$

$$\log_{\frac{1}{7}} t - \frac{3,5}{\log_{\frac{1}{7}} 7} = -4 = \log_{\frac{1}{7}} y + \frac{3,5}{\log_{\frac{1}{7}} 7}$$

$$\log_{\frac{1}{7}} t - 3,5 = -4 \log_{\frac{1}{7}} 7$$

$$\log_{\frac{1}{7}} y + 3,5 = -4 \log_{\frac{1}{7}} 7$$

$$\log_{\frac{1}{7}} y + \log_{\frac{1}{7}} t = -4 (\log_{\frac{1}{7}} 7 + \log_{\frac{1}{7}} 7)$$

$$\text{невозм.} - \log_{\frac{1}{7}} y - \log_{\frac{1}{7}} y \log_{\frac{1}{7}} t + \log_{\frac{1}{7}} t + \log_{\frac{1}{7}} y = \log_{\frac{1}{7}} t + \log_{\frac{1}{7}} y + \log_{\frac{1}{7}} t = -4$$

$$\text{или } \log_{\frac{1}{7}} y + t = 0 \rightarrow yt = 1, \boxed{xy = \frac{1}{6}}$$

$$\text{Ответ: } xy = \frac{1}{6}$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.

$$O(0;0) \quad P(-17;68) \quad Q(2;68) \quad R(19;0).$$

$$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40 = |(4x_2 + y_2) - (4x_1 + y_1)|.$$

Введём $f(x; y) = 4x + y$ — функцию от координат точки.

Заметим, что для каждой точки A прямой, заданной ур-нем

$$4x + y + c = 0 \quad f(A) = -c - \text{const}, \text{ и для всех прямых такого вида эта константа различается. Т.е. } f(A) = -c.$$

Также заметим, что $f(O) = 0 > f(P)$; $f(Q) = f(R) = 76$.

$$OP: 4x + y = 0 \quad QR: 4x + y - 76 = 0.$$

Рассмотрим прямые вида $4x + y - k = 0$, где $k \in 0, 1, 2, \dots, 76$.

Каждая из них пересекает параллелограмм; более того, нетрудно видеть,

что любая такая точка пар-ма лежит ровно на одной из 77 прямых.

Назовём группу прямых *семей*, если у них k одинаковые остатки

при делении на 4. Получим 4 семьи: $I: k = 0, 4, \dots, 76$ — 20 прямых

$$II: k = 1, 5, \dots, 75$$

k любой семье относятся $\frac{77}{4} = 19$ прямых.

точки границы, поэтому на каждой $III: k = 3, 7, \dots, 75$.

прямой семьи I ~~по 19~~ $\frac{77}{4} + 1 = 18$ точек.

На прямых всех остальных семей по 17 точек на каждой.

(под *точками* здесь ~~и другие~~ подразумеваются угловые точки пар-ма.)

(продолжение на обороте)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6. Продолжение.

Теперь заметим, что если всели заданную нулевую
дан каждой семье, то для каждой новой прямой k увеличивается
на 1, а если и f каждой новой прямой.

Тогда под условие подходят точки прямых одной семьи, с номерами
(выбор семьи) от 10.

В I семье таких пар прямых 10: 1-11, 2-12, ... 10-20.

В остальных по 9. И для каждой прямой можно брать по две
из её точек (подставить в условие).

$$\begin{aligned} \text{Тогда всего таких пар точек} & 10 \cdot 18 \cdot 18 + 3 \cdot 9 \cdot 17 \cdot 17 = \\ & = 3240 + 3 \cdot 289 \cdot 9 = 3240 + 3 \cdot (2601) = 3240 + 7803 = 11043. \end{aligned}$$

Ответ: 11043.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

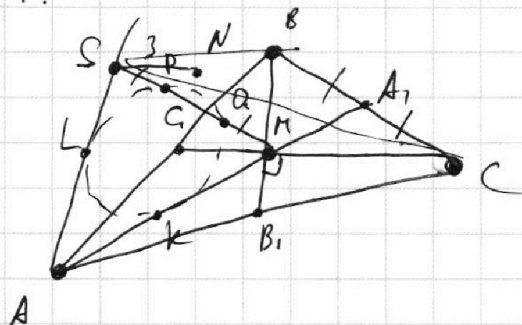
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7.



$$S_{ABC} = 60$$

$$SA = BC = 10$$

1) Рассмотрим мощность (SAM): она пересекает окружность ω . $AL = MK$; $SP = QM$, тогда $SP^2 + PQ \cdot SP = QM^2 + PQ \cdot QM$
 $SP \cdot SQ = MP \cdot MQ = \deg(S; \omega) = \deg(M; \omega)$ Тогда $SL^2 = MK^2$ (по теореме о касательной)
 $SL = MK$ (по теореме о касательной); тогда $AS = AM = BC = 10$.

$$AM = \frac{2}{3} AA_1 \text{ по св-ву медианы: } AA_1 = 15 \text{ и } MA_1 = 5 = \frac{BC}{2}.$$

Поскольку в $\triangle BMC$ медиана разбивает стороны, к которым проведена.

Поскольку он прямой, $\angle BMC = 90^\circ$. Тогда $BM \cdot MC = 2 \frac{S_{BMC}}{2} = 2 \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{40}{3}$ (по св-ву медианы)
 $= 40 \cdot \frac{BC}{4} = \frac{9}{4} \cdot 40 = 90$. $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15 \cdot 90 = 1350$.

а) Ответ: 1350.

(поскольку $BM^2 + MC^2 = 100$, BM и MC — катеты в $\triangle BMC$, $\angle BMC = 90^\circ$).

2) $SN = 3$ — гипотенуза. из S и L $SL = MK = 3$.

$$AL = LK = 10 - 3 = 7. \text{ Пусть } O \text{ — центр } \omega. \quad SO = \sqrt{SL^2 + r^2} = 5.$$

$$MO = \sqrt{MK^2 + r^2} = 5.$$

$$B_1C = \sqrt{MC^2 + BM^2} = \sqrt{80 + 5} = \sqrt{85}$$

$$BAC = 2\sqrt{85}$$

$$BC = \sqrt{BM^2 + MC^2} = \sqrt{100}$$

$$MC = \sqrt{20} = BM$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_2^4 t - \frac{2}{\log_2 t} = \log_2^4 y - \frac{1.5}{\log_2 y} - 4$$

$$\log_2^4 y + \frac{6}{\log_2 y} = \frac{25}{\log_2 y} - 4$$

$$\log_2^4 t - \frac{3.5}{\log_2 t} = -4 = \log_2^4 y + \frac{3.5}{\log_2 y}$$

$$\log_2^4 t + \log_2^4 y = 3.5 \quad \log_2^4 t - \log_2^4 y = \frac{3.5}{\log_2 t} + \frac{3.5}{\log_2 y}$$

$$(\log_2 t - \log_2 y) / (\log_2 t + \log_2 y) (\log_2^2 t + \log_2^2 y) = 3.5 \frac{\log_2 t + \log_2 y}{\log_2 t \log_2 y}$$

$$(\log_2 t + \log_2 y)^2 (\log_2 t - \log_2 y) = \frac{3.5}{\log_2 t \log_2 y} + 2 \log_2 y (\log_2 t - \log_2 y)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

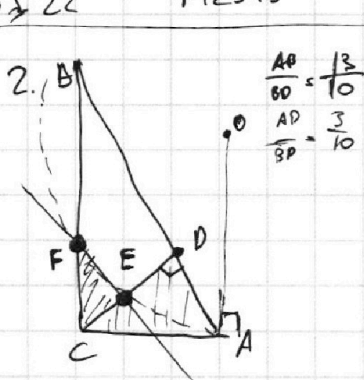
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a^2 b^2 c^2 : 2^{13+14} \cdot 3^{11+15+17} \cdot 5^{11+18+19}$, ко $a^2 b^2 c^2 : a^2 c^2 : 2^{28} 3^{34} 5^{86}$.

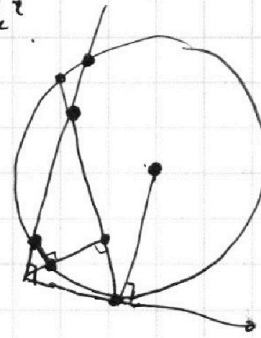
$abc : ac : 2^{14} 3^{19} 5^9$, $abc > 0$, $abc > 2^{13} 3^{17} 5^{11}$.
 $a = 2^4 3^9 5^2$
 $b = 2^4 3^5 5^3$
 $c = 2^5 3^5 5^5$

$y+z \geq 11$
 $eq \geq 15$
 $y+q \geq 17$

$x+d \geq 17$ m.m. $x+d+p \geq 17$
 $d+p \geq 18$
 $x+p \geq 14$
 $f+g \geq 18$
 $2+15+2$
 $38 \frac{25}{7}$
 12343



$\frac{AB}{BO} = \frac{3}{10}$
 $\frac{AD}{BP} = \frac{3}{10}$



3. $\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$. $-\frac{3\pi}{2}$
 проанализируем
 $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right]$

$\arccos(\sin x) + \arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\frac{5\pi}{2} = \arccos(\sin x) + \frac{3\pi}{2} + x$

$\pi = \arccos(\sin x) + x$. $x = 2\pi + \alpha, \alpha \in [0, 2\pi)$ $\pi = \arccos(\sin \alpha) + 2\pi + \alpha$

$\alpha \in \left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right]$

$\alpha \in \left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right]$
 $\arccos(\sin \alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha$

$t = k\pi + d$
 $k \in \{4; 1\}$
 брешу

$\arccos(\cos t) = d$
 $7-46$
 $7+6 = 23 \text{ ч.}$
 $7-4 \geq 0$

$5d + d \cdot k\pi = \frac{4\pi}{4}$
 $d = \frac{(4-4)\pi}{24}$
 $d \in (0; \pi)$

$t_1 = -4\pi + \frac{23}{24}\pi$
 $t_2 = -3\pi + \frac{19}{24}\pi$
 $t_3 = -2\pi + \frac{15}{24}\pi$
 $t_4 = -\pi + \frac{11}{24}\pi$
 $t_5 = 0 + \frac{7}{24}\pi$
 $t_6 = \pi + \frac{3}{24}\pi$

$x_1 = 6\pi - \frac{13}{24}\pi$
 $x_2 = 3\pi - \frac{13}{24}\pi$
 $x_3 = 2\pi - \frac{9}{24}\pi$
 $x_4 = \pi - \frac{5}{24}\pi$
 $x_5 = -\frac{\pi}{24}$
 $x_6 = -\pi + \frac{3\pi}{24}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$4. \begin{cases} x+3ay-7b \leq 0 \\ (x^2+y^2-4) \wedge (x^2+y^2-9) \leq 0 \end{cases}$$

$$(x^2+y^2-4) \wedge (x^2+y^2-9) \leq 0$$

$$(x^2+y^2-4) \wedge (x^2+y^2-9) \leq 0$$

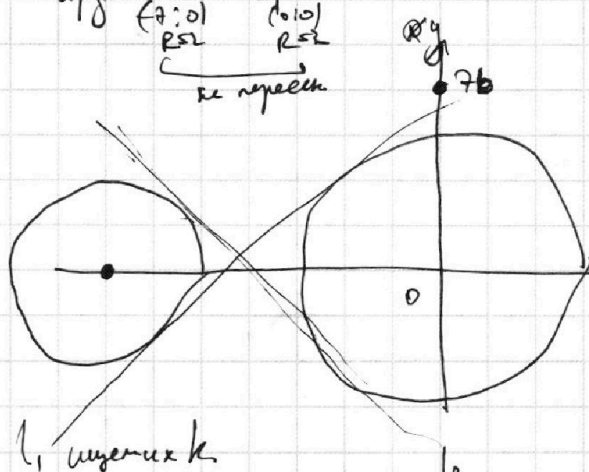
определить
R=2
R=3
и перейти

$$x = 7b - 3ay$$

$$y = \frac{7b-x}{3a} = \frac{7b}{3a} - \frac{x}{3a}$$

$x = 7b - 3ay$: прямая, граница - $-3a$
сдвигаем $7b$.

априори где оп. т.ч.



1, ищем их k.

$$y = (x+7)a, y^2 = 25 - x^2$$

$$x^2 + (x+7)^2 a^2 = 25$$

$$2x^2 + 14ax + 49a^2 - 25 = 0$$

$$D = \frac{196a^2 - 8 \cdot (49a^2 - 25)}{4} = 0$$

$$49a^2 - 249a + 200 = 0$$

$$7(a^2 - 4)^2$$

$$x^2(a^2+1) + 14ax + 49a^2 - 25 = 0$$

$$D = \frac{196a^2 - 8 \cdot (49a^2 - 25)}{4} = 0$$

$$24a^2 - 25 = 0$$

$$a = \pm \sqrt{\frac{25}{24}} = \pm \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{1}{3a} \in \left[0, \frac{5}{2\sqrt{6}}\right]$$

$$\frac{1}{3a} \in \left(-\frac{5}{2\sqrt{6}}, 0\right]$$

$$a \in \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}, +\infty\right]$$

$$a \in \left(-\infty, -\frac{2\sqrt{6}}{15}\right]$$

$$\log_7^4 t + \log_7^4 t^2 = \log_7^4 t^3 - 4$$

$$\log_7^4 y + \log_7^4 y^2 = \log_7^4 y^3 - 4$$

$$\log_7^4 t + \frac{1}{2\log_7 t} = \frac{1}{15\log_7 t} - 4$$

$$\log_7^4 y + \frac{1}{6\log_7 y} = \frac{1}{25\log_7 y} - 4$$

$$t > 0, t \neq 1$$

$$y > 0, y \neq 1$$

$$\log_7 t, \log_7 y \neq 0$$

$$a, b \neq 0$$

$$a^4 - \frac{1}{2a} = \frac{1}{15a} - 4$$

$$b^4 + \frac{1}{6b} = \frac{1}{25b} - 4$$

$$a^4 + 4a = \frac{1}{15a} - 4$$

$$a^4 + 4a = \frac{1}{15a} - 4$$