



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) возведение в кв-м abc: $ab = k \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}, k \in \mathbb{Z}$
 $bc = t \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}, t \in \mathbb{Z}$
 $ca = m \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}, m \in \mathbb{Z}$

$$(abc)^2 = ab \cdot bc \cdot ca \Rightarrow$$

$$(abc)^2 = ktm \cdot 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$$

$$abc = \sqrt{ktm} \cdot 2^{21} \cdot 3^{\frac{41}{2}} \cdot 5^{\frac{53}{2}}$$

$$\Rightarrow abc = \sqrt{ktm} \cdot 2^{21} \cdot 3^{20,5} \cdot 5^{26,5}$$

- $9+14+19$
 $10+20+12=42$
- $10+13+18$
 $10+20+11=41$
- $10+13+30=53$

$\sqrt{ktm}$ должно быть представлено в виде
 числа $a \cdot 3^z \cdot 5^z$ минимум, при этом (т.к. abc —
 целое число, все оно состоит из произведений целых
 чисел) $\sqrt{ktm}$ — тоже целое число

$$\sqrt{ktm} = \sqrt{a \cdot 15^z} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \Rightarrow \text{если } (15 \cdot x) \text{ — полный квадрат}$$

$$\Rightarrow a=15 \Rightarrow ktm=15 \Rightarrow \sqrt{ktm} \text{ при этом не полн. кв}$$

Пример сверху: $\sqrt{ktm} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} \cdot 5^{\frac{3}{2}} = 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{3 \cdot 5}$
 $3^2 \cdot 5^2 \Rightarrow ktm = 3^3 \cdot 5^3$ ✓

$$\Rightarrow ktm = 15 \cdot 3^3 \cdot 5^3 = 3^4 \cdot 5^4 \Rightarrow \text{является полным}$$

квадратом, минимальный пример, при котором
 не получается целочисленность $\sqrt{ktm}$, $\Rightarrow$ числа $k, t, m \in \mathbb{Z}$
 Например: $k=15, t=27, m=125, \sqrt{ktm} = \sqrt{15 \cdot 27 \cdot 125} = \sqrt{3^4 \cdot 5^4} = 3^2 \cdot 5^2 \Rightarrow \text{полн. кв}$

$$\Rightarrow \text{Получим, что } ab = 15 \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}, bc = 2^7 \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}, ca = 12 \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$\Rightarrow abc_{\min} = 2^{21} \cdot 3^{22} \cdot 5^{30}$$

$$\sqrt{ktm} = 3^{\frac{3}{2}} \cdot 5^{\frac{7}{2}} \Rightarrow ktm = 3^3 \cdot 5^7$$

$$k \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$$

$$k = 3^3, t = 5^3, m = 5^4$$

$$\Rightarrow abc_{\min} = 2^{21} \cdot 3^{22}$$

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{22} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

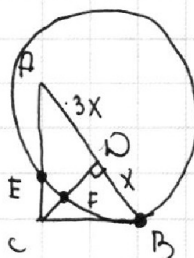
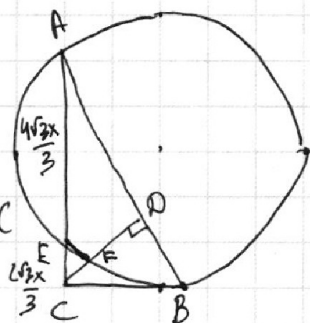
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}}$$

$$3) \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = k^2$$

k -коэффициент
подобия $\triangle ABC$
и $\triangle CFE$



1) $EF \parallel AB$
 $\Rightarrow CD \perp EF$, т.к.
 $CD \perp AB$

$$\Rightarrow \angle EFC = \frac{\pi}{2}$$

$$2) \angle DAC = \angle FEC$$

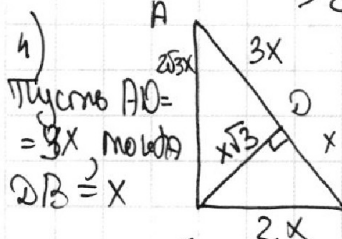
(соотв. т.п.
пар. прямых AB и EF)

$\Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CAD$
по II углам

аналогично:
 $\triangle CEF \sim \triangle CDB$

по II углам
 $\triangle CEF \sim \triangle ABC$

по II углам



$h_2 = \sqrt{AD \cdot DB}$ — среднее геометрическое
отрезков AD и DB
 $CD = x\sqrt{3}$
 $CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{3x^2}$

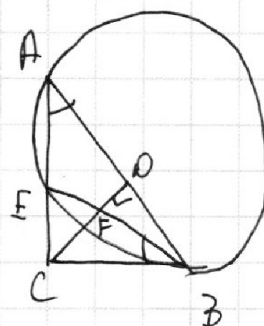
по т. Пифагора
($\triangle CAD$)

$$AC = \sqrt{9x^2 + 3x^2} = \sqrt{12}x = 2\sqrt{3}x$$

по т. Пифагора
($\triangle CDB$)

$$CB = \sqrt{3x^2 + x^2} = \sqrt{4}x = 2x$$

5) Предположим,
докажем, что
 $A \in$ окружности
Пусть A не
лежит на окружности



(доказано в (5))
6) Допущение: $A \in$ окружности
Тогда: $\angle EAB = \angle BEC$ — вписанные
 $\angle EBC = \angle BEC$ — углы между
касательной и хордой

$$\Rightarrow \triangle ACB \sim \triangle CEB$$

Пусть $\angle CAB = \alpha$
 $\tan \alpha = \frac{CB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ т.к. $\tan \alpha = \frac{CE}{BC}$
 $\frac{CE}{2x} = \frac{1}{\sqrt{3}}; CE = \frac{2x}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}x}{3}$

Тогда: $k = \frac{AB}{CE} = \frac{4x \cdot 3}{2\sqrt{3}x} = \frac{12}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}}$
($\triangle ABC$ и $\triangle CEF$)
 $\boxed{= 2\sqrt{3}}$

тогда: $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = k^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$

Ответ: 12

$4x^2 = CE \cdot AC = \frac{2\sqrt{3}x}{3} \cdot 2\sqrt{3}x = 4x^2$
Теорема выполняется
для случая $A \in$ окружн.
 $BC^2 = CE \cdot CM$ — противоречие)
 $CB = CE \cdot AC$
 $CM > AC$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

Теперь следует проверить найденные корни:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3} \\ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2} \end{cases}$$

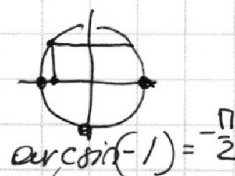
$$k = -1; 0; 1$$

$$k = -2; -1; 0; 1$$

1) $x = -3\pi$ ✓

$$5 \arcsin(\cos(-3\pi)) = -\frac{5\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} = -\frac{5\pi}{2}$$



$x = -3\pi$; $x = -\frac{4\pi}{3}$; $x = \frac{\pi}{3}$; $x = 2\pi$;
 $x = -3\pi$; $x = -\frac{\pi}{2}$; $x = 2\pi$;

2) $x = 2\pi$; ✓

$$5 \arcsin(\cos(2\pi)) = \frac{5\pi}{2}$$

$$\cos(2\pi) = 1$$

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \quad \frac{5\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} \quad \checkmark$$

3) $x = -\frac{4\pi}{3}$; $x = -\frac{8\pi}{6}$; ✓

$$\cos(-\frac{4\pi}{3}) = \cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$$

$$5 \arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{5\pi}{6} + \frac{3\pi}{6};$$

$$5 \arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{5\pi}{6};$$

$$\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}; \quad \checkmark$$

4) $x = \frac{\pi}{3}$; $5 \arcsin \frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6}$ ✓

5) $x = -\frac{\pi}{2}$; $5 \arcsin(0) = 0$ ✓

Ответ: -3π ; 2π ; $-\frac{4\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{2}$;

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \cdot \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$2) \arcsin(\sin x) = x$$

$$5(1 - x^2) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5x^2 + x - 5 \cdot \frac{\pi}{2} = 0$$

$$D = 1 + 40\left(5 - \frac{\pi}{2}\right) = 100 + 1 - 10\pi = 10(10 - \pi) + 1$$

$$10 - \pi > 6 \Rightarrow D > 61 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{D}}{10}$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{2x + \pi}{10}, \text{ вернем от аргумента } \sin$$

$$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{2x + \pi}{10}\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{2x + \pi}{10}\right) \text{ условие равенства двух аргументов}$$

$$\cos x = \cos(-x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{2x + \pi}{10}\right) \Rightarrow \frac{6\pi + 12x}{10} = \pi + 2\pi k$$

$$\sin\left(\frac{\pi + 2x}{2}\right) = \sin\left(\frac{2x + \pi}{10}\right) \Rightarrow \frac{6\pi + 12x}{10} = \pi + 2\pi k$$

$$\sin\left(\frac{5\pi + 10x}{10}\right) = \sin\left(\frac{2x + \pi}{10}\right)$$

$$8k = -4\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{4\pi + 8x}{10} = 2\pi t \Rightarrow 4\pi + 8x = 10\pi t$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{2}t, t \in \mathbb{Z} \text{ на графике системы}$$

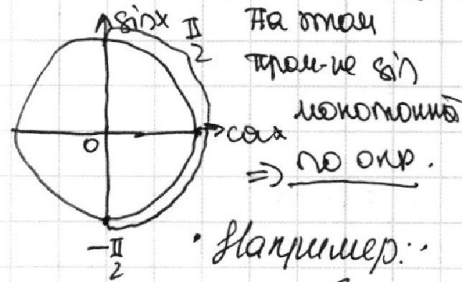
распишем ограничения уравнения

$$\cos x \in [-1; 1] \forall x$$

$$5 \cdot \arcsin(\cos x) \in \left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$$

т.к.

$$\arcsin(\cos x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

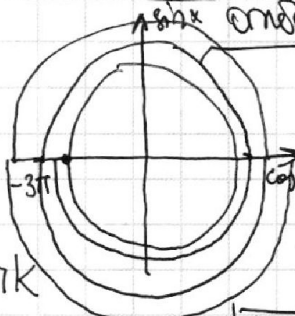


$$\sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\arcsin(\sin \alpha) = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\alpha = \arcsin \frac{3}{5}$$

$$\arcsin(\sin \alpha) = \alpha$$



$$\begin{aligned} -3\pi &\leq \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2} \leq 2\pi \cdot 3 \\ -9\pi &\leq \pi + 5\pi k \leq 6\pi \quad | -\pi \\ -8\pi &\leq 5\pi k \leq 5\pi \quad | -\pi \\ -10 &\leq 5k \leq 5 \quad | :5 \\ -2 &\leq k \leq 1 \end{aligned}$$

$$k = -2; k = -1; k = 0; k = 1$$

$$\begin{aligned} -3\pi &\leq \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi t}{2} \leq 2\pi \quad | \cdot \frac{2}{5\pi} \\ -6 &\leq -1 + 5t \leq 4 \quad | +1 \\ -5 &\leq 5t \leq 5 \quad | :5 \\ -1 &\leq t \leq 1 \end{aligned}$$

$$t = -1; t = 0; t = 1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

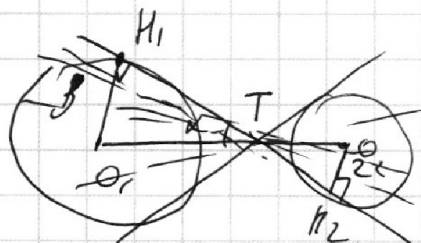
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



рассм. случай, когда прямая касается обеих окружностей.



$$O_1 O_2 = 6;$$

$$\triangle O_1 H_1 T \sim \triangle T O_2 H_2$$

$$k = \frac{3}{2}; \quad \frac{O_1 T}{T O_2} = \frac{3}{2}$$

$$\tan \alpha = \frac{3.5}{18.6} = \frac{5}{6}; \quad \text{а каково } a = \frac{5}{3} \quad \text{а } \frac{O_1 T}{6 - O_1 T} = \frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2} \quad \tan \alpha = -\frac{a}{2}; \quad a = -\frac{5}{3}$$

$$2O_1 T = 18 - 3O_1 T$$

$$5O_1 T = 18 \quad O_1 T = \frac{18}{5}$$

уменьшая b , уменьшаем высоту отоб прямой, её наименьшую ординату $\Rightarrow$ уменьшая a , уменьшаем угловой коэффициент то есть поворачиваем прямую $\Rightarrow$ при сдвиге прямой могут возникнуть пересечения вместо касаний.

$\Rightarrow$ Ответ: $(-\frac{5}{3}; \frac{5}{3})$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Из параметров a , получим следующее. $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$

$$a=0$$

$$a = \frac{1}{3} \text{ при } b \in [-\frac{2}{3}; 2]$$

$$a = -\frac{1}{3} \text{ при } b \in [-2; \frac{2}{3}]$$

$$32a^2 - 72a + 10 = 0$$

$$16a^2 - 36a + 5 = 0$$

$$8a^2 + 18a + 5 = 0$$

$$D = 324 - 160 = 164$$

$$L_1: \frac{x}{8} = \frac{y-3}{-3} \quad a = \frac{3}{4} \text{ корень}$$

$$-\frac{3}{8}x + 3 = y$$

$$a = \frac{3}{4}, \rightarrow \text{подходит}$$

при $b < 2$ существует

8) радиусами "Нормальную
ординату! то есть, при
 $b = 2$

при накл a , прямая L
пройдет через $(0; 3)$ и касаясь

второй окружности.

$$y = -\frac{a}{2}x + 3 = 3 - \frac{a}{2}x$$

$$x^2 - 12x + 36 + \frac{a^2 x^2}{4} + 9 - 3ax = 4$$

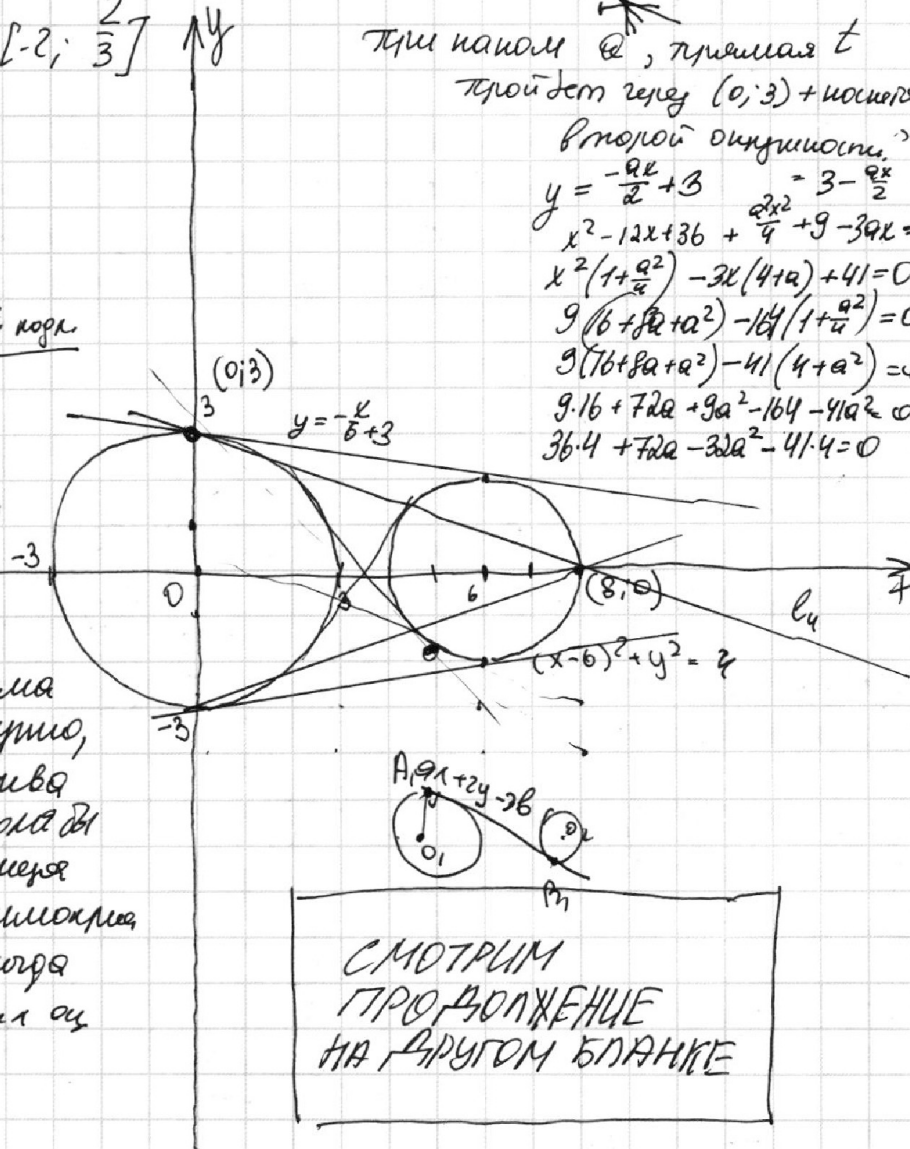
$$x^2(1 + \frac{a^2}{4}) - 3x(4+a) + 41 = 0$$

$$9(16+8a+a^2) - 144(1+\frac{a^2}{4}) = 0$$

$$9(16+8a+a^2) - 41(4+a^2) = 0$$

$$9 \cdot 16 + 72a + 9a^2 - 164 - 41a^2 = 0$$

$$36 \cdot 4 + 72a - 32a^2 - 41 \cdot 4 = 0$$



Итак найдем b ,
при котором система
имеет 4 решения, т.е.,
чтобы среди семейства
касательных к окружности
прямая, касаясь первой
окружности, касалась
второй окружности, когда
касательная касалась
второй окружности, когда
касательная касалась
второй окружности

СМОТРИМ
ПРОДОЛЖЕНИЕ
НА ДРУГОМ БЛАНКЕ

Ответ: $a = \pm \frac{1}{3}$

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$ а? равно 4 решения

$-x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \quad / +4$
 $(x-6)^2 + y^2 = 2^2$

(1) перепишем как совокупность

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ (x-6)^2 + y^2 = 2^2 \end{cases}$$

(2) перепишем систему:

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ x^2 + y^2 = 3^2 \\ (x-6)^2 + y^2 = 2^2 \end{cases} \quad \begin{cases} -x^2 + y^2 - 12x + 32 = 4 \\ (x-6)^2 + y^2 = 2^2 \end{cases}$$

3) Построим $\vec{b}$ в координатах xOy

$\vec{b}$ — график функции $ax + 2y = 3b$

1.1 — прямая, зависящая от a, b

1.1 — окружность $(0;0), R=3$

1.1 — окружность $(6;0), R=2$

5) радиусы имеют так:

при $a=0, b=0$

то прямая $ax + 2y - 3b = 0$

пересекает окружности в 4 точках.

$3b$ определяет параллельную ось абсцисс:

$$\frac{a}{2}x + y = \frac{3b}{2} \quad \frac{ax}{2} + y = \frac{3b}{2}; y = -\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2}$$

b определяет высоту прямой

6) $l_1: A \in l_1, B \in l_1, y = -\frac{x}{b} + 3$
 $l_2: C \in l_2, D \in l_2, y = \frac{x}{b} - 3$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad \text{По 2 точкам}$$

$$\frac{x}{b} = \frac{y-3}{-1} \quad \frac{x}{b} = \frac{y+3}{1}$$

$$y = -\frac{x}{b} + 3 \quad y = \frac{x}{b} - 3$$

СМОТРИ ПРОДОЛЖЕНИЕ на обратной стороне листа ↓ ↓ ↓

1) АНАЛИЗ $ax + 2y = 3b$

$$f(x) = ax \quad 2y = 3b - ax$$

$$2y = 3b - ax \quad y = \frac{3b - ax}{2}$$

$$(на начало коор) f(x) = \frac{3b - ax}{2}$$

$$0 = 3b, b = 0 \quad f(0) = \frac{3b}{2}$$

$$x = \frac{3b}{a}; \rightarrow \text{нуль } f(x)$$

$$ax + 2y - 3b = 0$$

$$4.1) \boxed{a=0} \quad y = \frac{3b}{2}$$

такие b существуют

иногда $y = \frac{3b}{2}$ пересекает

4 раза (имеет 4 решения)

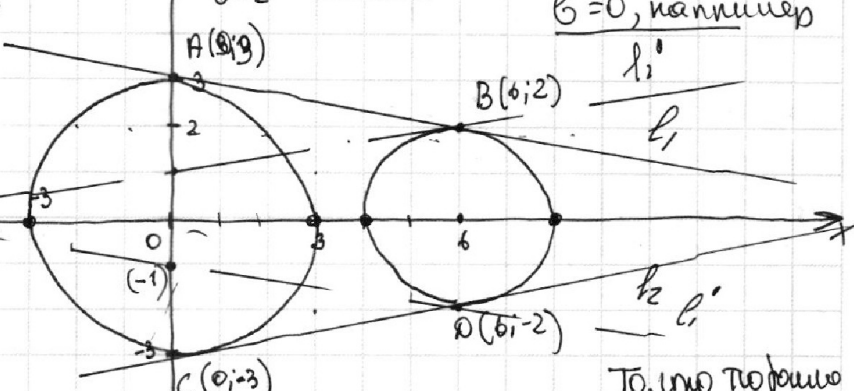
$b=0$, например

$$l_1: \frac{1}{b} = -\frac{a}{2}$$

$$a = \frac{2}{3}, \text{ при } a = \frac{1}{3}$$

$$l_2: \frac{1}{b} = -\frac{a}{2}, b = 0, \text{ касание двух окружностей}$$

$$a = -\frac{1}{3}, b = -2 \quad \text{касание}$$



То, что требуется

$$a=0$$

$$a = \frac{1}{3}$$

$$a = -\frac{1}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 2 \log_3 x^5 + 16 \log_3 x + 7 = 0 & (.) \\ 1 \log_3 y^5 + 16 \log_3 y - 7 = 0 & (..) \end{cases}$$

посл. $f(t) = [t > 0]$
 $= \log_3 t^5 + 8 \log_3 t \quad t \neq 1, t \neq \frac{1}{5}$

$$f'(t) = 5 \log_3 t^4 \cdot \frac{1}{t} \ln 3 + \frac{8}{t} \ln 3$$

$$f'(t) = \frac{1}{t} \ln 3 (5 \log_3 t^4 + 8) > 0$$

$$\Rightarrow f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$$

$$\Rightarrow f(x) = f\left(\frac{1}{5y}\right) \Leftrightarrow x = \frac{1}{5y}$$

Следовательно найдем x, y ;

Ответ: 0,2

(.) + (..) Найдем xy

$$= 2 \log_3 x^5 + 16 \log_3 x + 2 \log_3 y^5 + 16 \log_3 y = 0$$

$$2 \log_3 x^5 + 16 \log_3 x = -2 \log_3 y^5 - 16 \log_3 y$$

$$\log_3 x^5 + 8 \log_3 x = \log_3 \frac{1}{5y} + 8 \log_3 \frac{1}{5y}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \ln e$$

$$(\log_3 x)' = \frac{1}{x \ln 3}$$

$f'(t)$ монотонно
возрастает на $D(t)$

т.е. выполняется
теорема о корнях

$$x = \frac{1}{5y}; \quad xy = \frac{y}{5y} = \frac{1}{5}$$

Ограничения:

$$\begin{matrix} x > 0 & x \neq 1 \\ y > 0 & 5y \neq 1 & y \neq \frac{1}{5} \end{matrix}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 & (1) \\ \log_3^4 5y + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y} (3^{11}) - 8 \end{cases}$$

xy-?
1) найдем ограничения

$$x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$$

$$y \in (0; \frac{1}{5}) \cup (\frac{1}{5}; +\infty)$$

$$\log_3 x = a, \log_3 5y = b, a \neq 0$$

$$(1) a^4 + \frac{6}{a} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{1}{a} - 8$$

$$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8$$

$$2a^5 + 12 = 5 - 16a$$

$$2a^5 + 16a + 7 = 0$$

$$(3) + (4) 2a^5 + 2b^5 + 16a + 16b = 0$$

$$2a^5 + 16a + 7 = 0 \quad (3)$$

$$2b^5 + 16b + 7 = 0 \quad (4)$$

$$2(a-b)(a^4 + b^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3) + 16(a-b) = 0$$

$$(a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) + 8(a-b) = 0$$

$$(a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 + 8) = 0$$

Вторая скобка - неположительный квадрат $\Rightarrow$ всегда положительна

$$\Rightarrow a = b \quad \log_3 x = \log_{5y} 5y \Rightarrow x = 5y; \quad x \cdot y = \frac{5y}{5} = y^2$$

т.к. $f(t) = \log_3 t$

$$\text{на } D(t) \Rightarrow \log_3 p = \log_3 d$$

$$\Leftrightarrow p = d$$

$$\log_3^4 x$$

Перепишем: ① $\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 x} - 8$$

$$2 \log_3^5 x + 12 - 5 + 8 \log_3 x = 0$$

$$2 \log_3^5 x + 16 \log_3 x + 7 = 0$$

② $\log_3^4 5y + \frac{2}{\log_3 5y} = \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 5y} - 8 \quad / \cdot 2 \log_3 5y$

$$2 \log_3^5 5y + 4 = 11 - 16 \log_3 5y$$

СМОТРИМ
ПРОДОЛЖЕНИЕ
НА СЛЕДУЮЩЕЙ
(НА ГРУППЕ)
СТРАНИЦЕ

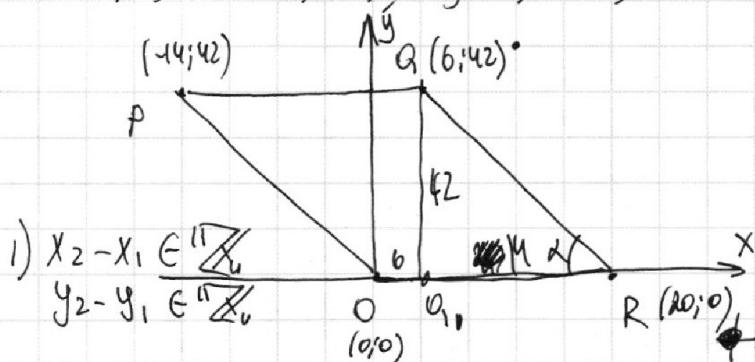
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$O(0;0)$ $P(-14;42)$ $Q(6;42)$ $R(20;0)$ $A(x_1; y_1)$

$B(x_2; y_2)$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$



1) $x_2 - x_1 \in \mathbb{Z}$
 $y_2 - y_1 \in \mathbb{Z}$

$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$

$3(x_2 - x_1) + 1 \cdot (y_2 - y_1) = 33$

$33 = 3k + p$

$33 = 0 + 33$

$33 = 18 + 15$

$33 = 3k + y$

$3k + p = 33$

$33 = 3 + 30$

$33 = 21 + 12$

$k = 11; p = 0$

$33 = 6 + 27$

$33 = 24 + 9$

$3(k - 11) + (p - 0)$

$33 = 9 + 24$

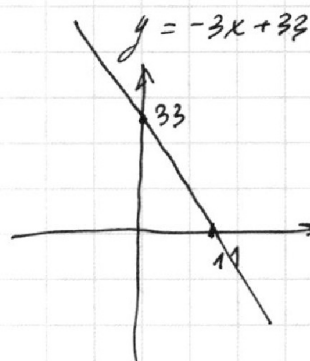
$33 = 27 + 6$

$33 = 12 + 21$

$33 = 30 + 3$

$33 = 15 + 18$

$33 = 33 + 0$



$\tan \angle QRO = \frac{42}{20} = 3$

$\tan \angle (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$

$3x_1 + y_1 + 3x_2 + y_2$
перенесем ~~то~~ уравнение
влево

$y = 33 - y_2 + 3x_2 - 3x_1$

пусть $x_1 = x, y_1 = y;$

Очень похоже на уравнение
прямой, уравнение которой
совпадает с уравнением
которой совпадает с уравнением
прямых PQ и OR
 $\Rightarrow$ это прямая, // сторонам
параллелограмма

$y = 33$ на границе между точками O и R

20 целых точек $\Rightarrow$ любая прямая // стороне PR -на
пересекающая ось X будет иметь пару целых точек
 $(x; y)$ ~~связать~~ PR ~~до~~ PR , это считая вместе с границей

Ответ: 20

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = M$$

(медианы)

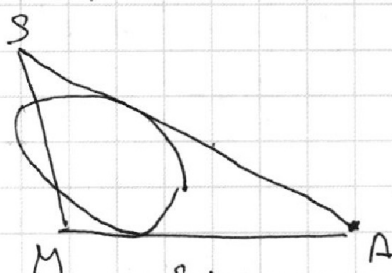
$$S_{\triangle ABC} = 30$$

$$AA_1 = BB_1 = 12$$

$$SP = MQ$$

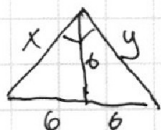
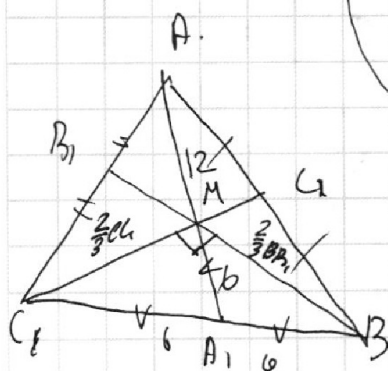
$$a) AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = ?$$

$$AA_1 = 18$$



$$4) A_1M = 6$$

расшир. $\triangle CAB$



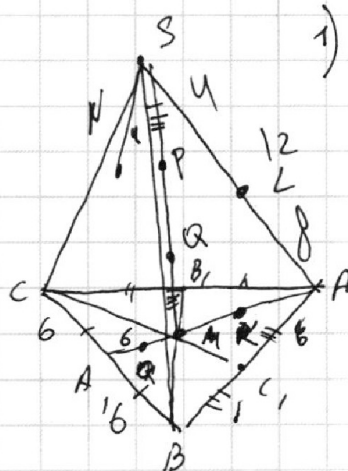
$$b) \frac{2}{3} CC_1 \cdot \frac{2}{3} BB_1 \cdot \frac{1}{2} = 30 = S_{\triangle CAB}$$

$$\frac{2 \cdot CC_1 \cdot BB_1}{9} = 30 \quad CC_1 \cdot BB_1 = \frac{270}{2}$$

$$AA_1 \cdot CC_1 \cdot BB_1 = \frac{18 \cdot 270}{2} = 9 \cdot 9 \cdot 30 = 81 \cdot 30 = 243 \cdot 10 = 2430$$

Ответ: а) 2430

Смотри продолжение на следующей странице.



$$1) S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot CB \cdot h$$

$$30 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot h$$

$$h = 10$$

2) Сер падает на AP в т. L
Сер падает на BP в т. K
 $\Rightarrow$ параллельные
уг. одной тощ
равны
 $\Rightarrow AL = BK$

3) $PLKM$ - вписанно
Пусть $SP = QM = x$, $PQ = y$
то т.о. параллельной
и секущей

$$SL^2 = x \cdot (2x + y)$$

$$MK^2 = x \cdot (2x + y)$$

$$\Rightarrow MK = SL$$

$$\Rightarrow AM = AS$$

$\triangle CMB$

MA_1 - медиана

$$MA_1 = 6, CA_1 = BA_1 = MA_1 = \text{ноб } AS = 12; AM = \frac{2}{3} \cdot m_1 = 12$$

$$\Rightarrow \angle CMB = \frac{\pi}{2} \text{ (медиана } = \frac{\text{гипотенуза}}{2}) \quad m_1 = 18$$

$$\angle CMB = 90^\circ$$



$$S_{\triangle ABC} = S$$

$$S_{\triangle BB_1C} = \frac{S}{2}$$

$$S_{\triangle BMC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle BB_1C} = \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{2} = \frac{S}{6}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle CMB} = \frac{2}{3} \cdot S_{\triangle BB_1C}$$

$$S_{\triangle CMB} = \frac{1}{3} S = 30$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

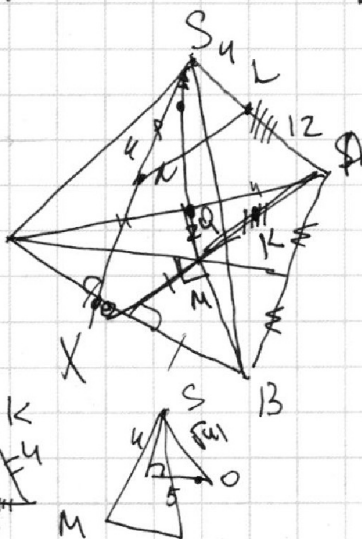
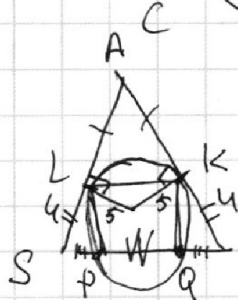
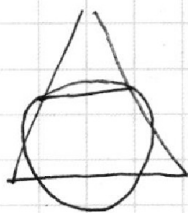


5) Сфера касается (BCS) = N

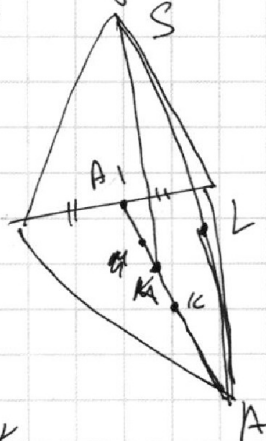
$$SN = 4;$$

$$KS = 5;$$

∠ при BC - ?



6) Сфера вписана в двугранный угол при вершине B



2) $\triangle ALK \sim \triangle SAM$, п.б., $\angle A$ - общий, $\frac{AL}{AS} = \frac{LK}{AM}$

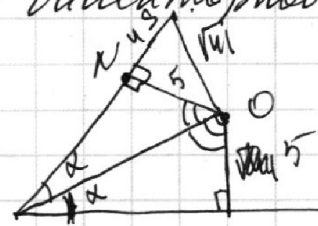
$\Rightarrow LK \parallel SM \Rightarrow LPQK$ - трапеция / п.б.

(-) нужно доказать, что ASX - трети

3) $SN = 4$ - касательная $\Rightarrow SL = 4$ (касательные из одной точки)
 $\Rightarrow SK = 4$

Пусть O - центр сферы: $ON \perp R$, $\perp SN \Rightarrow \triangle SNO$ - прямоугольный $ON \perp SN$, то т. Т. $SO = \sqrt{17}$
 $\Rightarrow$ у пункта (1)

O - диссекторной плоскости нашего (исходного) угла.



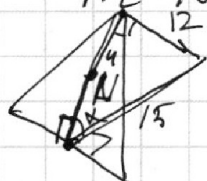
Сфера;

← это линейный угол двугранного угла

4) вспомним, что K и CB равны 15

$$\frac{324}{205} = \frac{18}{5}$$

$$m = 18; (AA_1)$$



(-) то допустить $\triangle ASX$ трети-ит
 $SN \cap CB = X$, $SX = 9$ (т.т. Тюр-га)

$$\sin \alpha = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

Ответ: $\arcsin \frac{4}{5}$

