



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^8 3^{14} 5^{12}, bc: 2^{12} 3^{20} 5^{18}, ac: 2^{14} 3^{12} 5^{39}$$

Пусть $a: 2^x$, тогда $b: 2^{8-x}$, $c: 2^{14-x} = 2^{12-(8-x)}$
 $c: 2^{14-x}$, тогда $14-x = 12+x \Rightarrow x=5$

Проверим сами $a: 2^5, b: 2^3$ то $ab: 2^8$,
 $c: 2^{14}$ тогда $bc: 2^{12}$, $ac: 2^{19}$ - неверно.
 Пусть $a: 3^y$, тогда $b: 3^{12-y}$, $c: 3^{20-(12-y)} = 3^{8+y}$
 $c: 3^{8+y}$, тогда $27-y = 6+y \Rightarrow y=15$

т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, то рассм. $\frac{a}{b}$ дел. $\frac{c}{b}$,
 значит $y \in \mathbb{N}$, получим:

При $y=2$: $a: 3^2 \Rightarrow b: 3^{10} \Rightarrow c: 3^{22} \Rightarrow ac: 3^{24}$, а
 необходимо чтоб $bc: 3^{22}$ значит не
 подходит.

При $y=8$: $a: 3^8, b: 3^4, c: 3^{28} \Rightarrow ac: 3^{36}$ -
 подходит

Пусть $a: 5^z$, тогда $b: 5^{12-z} \Rightarrow c: 5^{18-(12-z)} = 5^{6+z}$

$c: 5^{6+z}$, тогда $39-z = 5+z \Rightarrow 34=2z \Rightarrow z=17$,
 проверим: $a: 5^{17} \Rightarrow b: 5^{22} \Rightarrow ac: 5^{39}$,
 $ab: 5^{39}$ (удовлет.) $bc: 5^{34}$ (удовлет.)

Итак $abc = 2^5 \cdot 2^3 \cdot 2^9 \cdot 3^8 \cdot 3^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \cdot 5^{22} =$
 $= 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$ - мин. возм. произв.

Ответ $abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin(\cos x) = 2 - 2x$$

$$\cos(\sin x) = \sqrt{1-x^2}, \text{ при } x \in [-1; 1]$$

$$\sqrt{1-x^2} = 2 - 2x, \text{ т.к. } x \in [-1; 1], \text{ то } 2 - 2x > 0$$

$$\text{т.к. } 2 \approx 3, \text{ т.е. } 2x \leq 2$$

следов. возв. в квадрат обе части уравн.

$$100(1-x^2) = 2^2 - 4x + 4x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 104x^2 - 4x + 2^2 - 100 = 0$$

$$D = 16^2 - 4 \cdot 104 \cdot 2^2 + 4 \cdot 100 = 100(416 - 42^2)$$

$$x = \frac{42 \pm 10\sqrt{416-42^2}}{208}$$

$$\frac{42 + 10\sqrt{416-42^2}}{208} < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10\sqrt{416-42^2} < 208 - 42 \quad 2 > 3$$

$$10\sqrt{416-36} < 196$$

$$330 \cdot 100 < 196 \cdot 196$$

следов. нест.

ошибкой > 0

$$42 - \frac{10\sqrt{416-42^2}}{208} > 1$$

$$\text{т.к. } \frac{42}{208} - \frac{10\sqrt{416-42^2}}{208}$$

$$> 0, \text{ а } \frac{42}{208} + x < 1$$

$$\text{Ответ: } \frac{42 \pm 10\sqrt{416-42^2}}{208}$$

$$\begin{array}{r} 5835 \\ 796 \\ + 796 \\ \hline 1796 \\ + 1796 \\ \hline 3592 \\ + 3592 \\ \hline 7184 \\ + 7184 \\ \hline 14368 \\ + 14368 \\ \hline 28736 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

критерии

$$\operatorname{tg} \angle B C = \frac{\alpha}{3} \quad \operatorname{tg}^2 \angle B C + 7 = \frac{7}{\cos^2 \angle B C} \rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}^2 \angle B C = \left(\frac{70}{3}\right)^2 - 7 = \frac{700 - 49}{49} = \frac{57}{49} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \angle B C = \pm \frac{\sqrt{57}}{7} = \frac{\alpha}{3} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{3}{7} \sqrt{57}$$

Все доп. при $\alpha \in (-\infty; -\frac{3}{7} \sqrt{57})$ - 4 реч. ~~то~~
при нек. зн. α

$\alpha \in [-\frac{3}{7} \sqrt{57}; \frac{3}{7} \sqrt{57}]$ - все 4 реч. ~~то~~ при
люб. зн. α

$\alpha \in (\frac{3}{7} \sqrt{57}; +\infty)$ - 4 реч. ~~то~~ при нек. зн. α

Ответ: $\alpha \in (-\infty; -\frac{3}{7} \sqrt{57}) \cup (\frac{3}{7} \sqrt{57}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

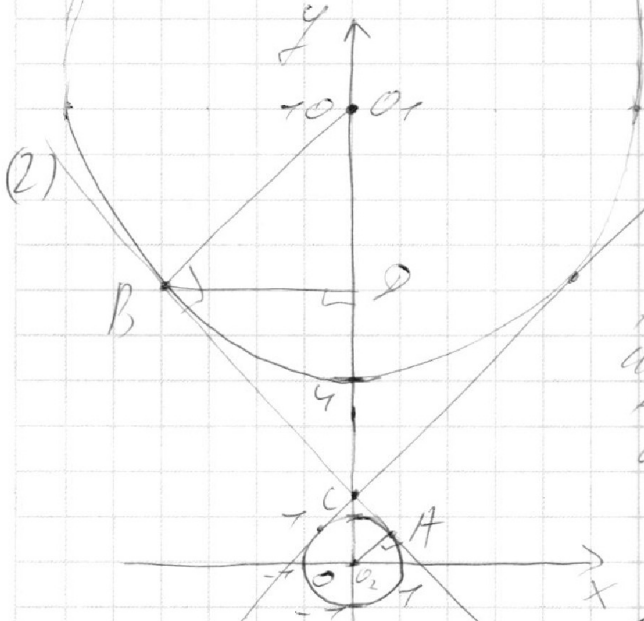
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 7)(x^2 + y^2 - 20x + 64) = 0 \end{cases}$$

$$ax - 3y + 4b = 0 \Rightarrow y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b - \text{у-р. прямой}$$

$$\begin{aligned} \text{у-р. для у-ра} \\ x^2 + y^2 = 7 - \text{у-р. окр.} \\ x^2 + (y - 10)^2 = 36 - \text{у-р. окр.} \end{aligned}$$



(1) Проведем две окружности
касаясь. и тогда
окружностей.
Если правильно сформули-
рованы, найдите вверх
или наоборот вниз, то
не будет перес. с одной
из окружностей или
уменьшится у-р. касаясь.
до момента касаясь
х-прямая не пересекает
в у-р. касаясь, то не

будет у-р. не пересекает в (но так
как не касаясь). Найдите у-р. касаясь
касаясь (1). Тогда O_1, O_2 - центры окр. с ради-
усом 6 и 7 соответственно. B и A - т. кас. окр. O_1 и O_2 соответственно.
т. (пересек. кас. с осью ординат в одну точку
они перес. в одной точке)

$$\begin{aligned} \angle O_1 B C \sim \angle O_2 A C \text{ по 2 у-р. } \angle O_1 B C = \angle O_2 A C = 90^\circ \\ \text{по 2 у-р. радиусов } O_1 B \perp BC, O_2 A \perp AC \text{ по 2 у-р. } \angle O_1 B C = \angle O_2 A C \\ \text{верт. углы} \frac{O_1 B}{O_2 A} = \frac{O_1 C}{O_2 C} = \frac{BC}{AC} = \frac{6}{7} \Rightarrow O_1 C = 6 O_2 C \end{aligned}$$

$$O_1 C + O_2 C = 70 \text{ (т. у-р. окр.)} \Rightarrow 3 O_2 C = 70 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O_2 C = \frac{70}{3} \Rightarrow O_1 C = \frac{60}{3}, O_2 C = \frac{70}{3} - \text{коэф. т.с.}$$

$$\text{по оси } y. \frac{70}{3} = \frac{4}{3} b \Rightarrow b = \frac{75}{4}. \text{ Тогда } B(10, \frac{75}{4})$$

$$\triangle O_1 B C \sim \triangle O_2 A C \text{ по 2 у-р. } \angle O_1 B C = \angle O_2 A C = 90^\circ$$

$$\angle B O_1 C - \text{одн. тогда } \frac{O_1 B}{O_1 C} = \frac{B C}{A C} = \frac{6 \cdot 7}{60 \cdot 70} = \frac{7}{70} = \frac{1}{10}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4 2x - 3 + \log_{2x} 5 = \log_{2x^3} 625 - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log_5^4 2x - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3} \frac{1}{\log_5 2x} - 3, \text{ т.к. } 2x^3 = (2x)^3 \\ 2x \neq 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 625 = 5^4 \end{array}$$

$$\text{Пусть } \log_5 2x = m \Rightarrow 5^m = 2x, x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \neq 0, \text{ тогда } m^4 - \frac{3}{m} = \frac{4}{3} \frac{1}{m} - 3 \Rightarrow \cdot m \neq 0$$

$$\Rightarrow m^5 + 3m - \frac{4}{3} = 0 \quad (1)$$

$$\log_5^4 y + 4 + \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{7}{3} \frac{1}{\log_5 y} - 3, \text{ т.к. } \\ y \neq 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 0,2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 5^{-1} \end{array}$$

$$\text{Пусть } \log_5 y = n \Rightarrow 5^n = y, y \neq 1 \Rightarrow n \neq 0$$

$$\text{тогда } n + \frac{4}{n} = -\frac{7}{3} \frac{1}{n} - 3 \Rightarrow \cdot n \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^5 + 3n + \frac{7}{3} = 0 \quad (2) \text{ ком. (1) и (2):}$$

$$n^5 + m^5 + 3(m+n) = 0 \Rightarrow (m+n)(m^4 + n^4 - m^3n + m^2n^2 -$$

$$- mn^3 + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m+n=0 \\ m^4 + n^4 - m^3n + m^2n^2 - mn^3 + 3 = 0 \end{cases}$$

$$xy = \frac{5^m \cdot 5^n}{2} = \frac{5^{m+n}}{2} \quad \text{т.к. } m+n=0, \neq 0$$

$$xy = \frac{5^0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$$

$$x_2 - x_1 \leq 9 \text{ или } y_2 - y_1 \geq 0$$

9) $x_2 - x_1 \leq 18$ или $y_2 - y_1 \leq 0$
т.е. длинна кар. ~~вдоль~~ x ~~равна~~ 18

$$L = \frac{80}{16} = 5 - \text{числ. колл. 2-ой стороны.}$$



т.е. каждые 5 отч. по оси y
выбер. целые коор. по оси x
при $y=0$: ~~то~~ кар $(x_2 - x_1) = 9$

т.е. во все кар $M = \left(\frac{80}{5} + 1\right) \cdot 9 = 17 \cdot 9 = 153$

$= 17 \cdot 9 = 153$ кар y котор. одит. знач.
по оси y . и выкат. y_1 $30 \cdot 9$ и $y_2 - y_1 \geq 0$,
~~равнозначны~~

при $y_2 - y_1 = 1$ $5(x_2 - x_1) = 44 = 2 \cdot 2 \cdot 11$ колл.
долб. ~~значит~~ $(y_2 - y_1) : 5$, т.е.

при $\left. \begin{array}{l} y_2 - y_1 = 5, \quad x_2 - x_1 = 8 \\ y_2 - y_1 = 10, \quad x_2 - x_1 = 9 \end{array} \right\} 9 \text{ случаев}$
 $y_2 - y_1 = 45 \quad x_2 - x_1 = 0$

I $18 - 8 + 1 = 11$ кар $(x_2 - x_1)$ и 16 кар $(y_2 - y_1)$
итого $16 \cdot 11$ кар y ~~удов.~~ y_1 ~~удов.~~

II $18 - 7 + 1 = 12$ кар $(x_2 - x_1)$ и 8 кар $(y_2 - y_1)$
итого $12 \cdot 8$ кар. y ~~уд.~~ y_1 .

III $18 - 6 + 1 = 13$ кар $(x_2 - x_1)$ и 6 кар $(y_2 - y_1)$
итого $13 \cdot 6$ кар. y ~~уд.~~ y_1 .

IV $18 - 5 + 1 = 14$ кар $(x_2 - x_1)$ и 4 кар. $(y_2 - y_1)$
итого $14 \cdot 4$ кар. y ~~уд.~~ y_1 .

V $18 - 4 + 1 = 15$ кар. $(x_2 - x_1)$ и 3 кар. $(y_2 - y_1)$
итого $15 \cdot 3$ кар. y ~~уд.~~ y_1 .

VI ~~кар.~~ $16 \cdot 2$, VII $17 \cdot 2$
VIII $18 \cdot 2$; ~~IX~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

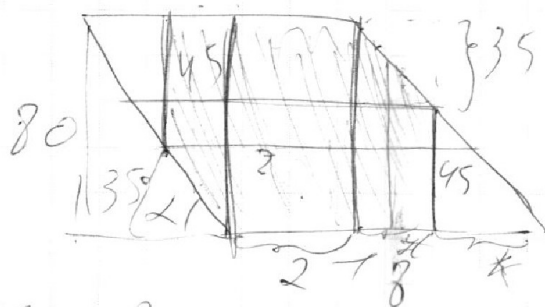
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



предметные

1X61.



$$L = 5$$

$$y_2 - y_1 = 45$$

$$\frac{k}{k+t} = \frac{45}{80} = \frac{9}{16}$$

$$k+t = \frac{80}{5} = 16$$

$$\frac{k+t}{k} = \frac{80}{45} = \frac{16}{9} \quad (\text{из 19})$$

тогда $k = 9 \Rightarrow t = 5$ тогда стр. 44. провер.

$$80 - 45 + 7 = 36 \text{ см вкл. } (y_2 - y_1) = 45$$

36.3; ~~при расч. троп.~~ (из расч.)

при вкл. 45 + см при 46 - 2 см 80 36 см

$$\text{итого } \frac{7+36}{2} \cdot 36 = 37 \cdot 36 \text{ см у одной}$$

трапеции ~~итого в 1X61.~~ $37 \cdot 36 \cdot 2 + 36 \cdot 3 =$
 $= 36 \cdot 40 \text{ метров.}$

W - все метров, тогда при $(y_2 - y_1) \geq 0$

$$\frac{W}{2} \text{ метров } \frac{W}{2} = \frac{1}{2} (120 + 76 \cdot 77 + 12 \cdot 8 + 73 \cdot 6 + 74 \cdot 4 + 75 \cdot 3 +$$

$$+ 76 \cdot 2 + 77 \cdot 2 + 78 \cdot 2 + 36 \cdot 40) = 2 \cdot 2763 =$$

$$= 4326$$

Ответ: 4326

$$\text{Ответ } W = 2(120 + 76 \cdot 77 + 12 \cdot 8 + 73 \cdot 6 + 74 \cdot 4 + 75 \cdot 3 +$$

$$+ 36 \cdot 40 + 702)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

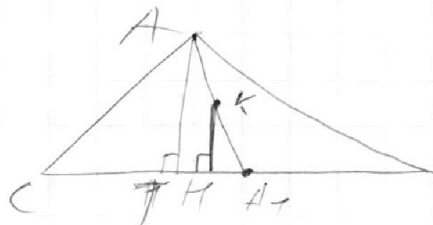
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Углы при вершине BC 12-кратны по величине.
тогда $\text{tg } \frac{\angle}{2} = \frac{V}{KH}$, где $V=5$ - радиус сферы.



$$SL = SN = 4 \text{ км. отр. км.}$$

проб. от тр. к тр. с от

$$\text{Итого: } AL = AS - SL = 16 - 4 =$$

$$= 12 = AK \Rightarrow KA_1 = AA_1 -$$

$$- AK = 24 - 12 = 12, \text{ т. к.}$$

сер. AA_1 .

Положим $AT \perp BC$, т. к. $AT \perp BC$, $KH \perp BC \Rightarrow$

$\Rightarrow AT \parallel HK$, т. к. K - сер. AA_1 и $AT \parallel HK$ - то

HK - ср. лин. $\Rightarrow AT = HK$ попарно. $HK = \frac{AT}{2}$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AT \cdot BC = \frac{1}{2} AT \cdot 16 = 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AT = \frac{25}{2} \Rightarrow HK = \frac{AT}{2} = \frac{25}{4}$$

$$\text{Тогда } \text{tg } \frac{\angle}{2} = \frac{V}{HK} = \frac{5 \cdot 4}{25} = \frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\angle}{2} = \arctg \frac{4}{5} \Rightarrow \angle = 2 \arctg \frac{4}{5}$$

Ответ: $AA_1, BB_1, CC_1 = 3600$; $\angle = 2 \arctg \frac{4}{5}$

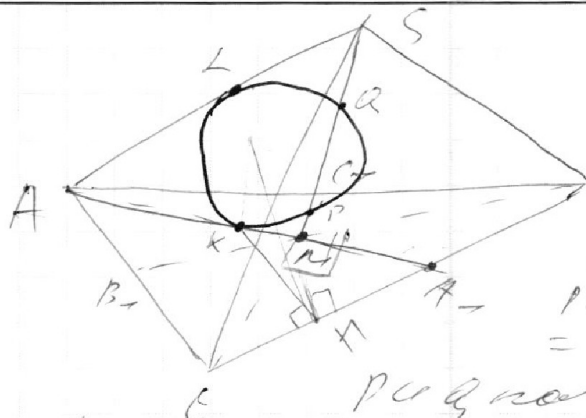
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дадено: 270° агол
 и во заврз POQ
 Високо. $\angle P = 90^\circ$
 $\angle Q = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$
 $\angle R = x$, тогаш
 $x + 90^\circ = 180^\circ$
 $x = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

Родина, 10.10.1917.

тогда мы легко получим: $ML^2 = MP \cdot MQ = x(r-x)$
 $SL^2 = SQ \cdot SP = x(r-x) = ML^2 \Rightarrow ML = SL$ (что и требовалось доказать)

7. 0 кол. и сел. кров. аз. т. к. т. о. к. 1

$AL = AK$ по теор. о отв. кат. $\angle A$ и $\angle B$.
по CA $AK = AK + MK = AL + SL = AS = BC = 16$

no change. $\frac{A_N}{A_-} = \frac{2}{1} \Rightarrow \mu_{A+} = \frac{A_{N+}}{2} = \frac{16}{2} = 8$

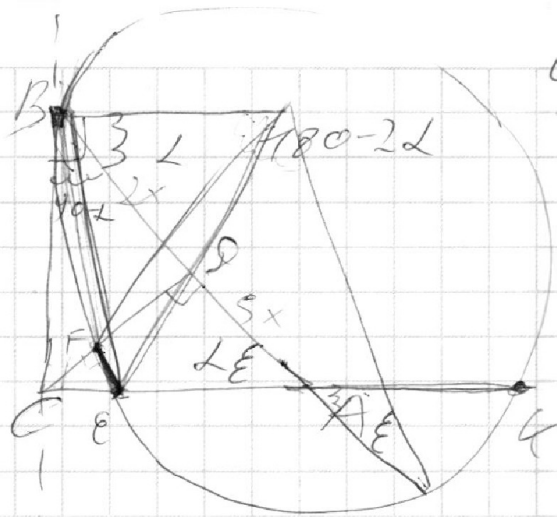
$$CA_7 = A_7 B \text{ (т.к. } AA_7 = \text{diag.)} \text{ и } CA_7 = A_7 B = \frac{BC}{2} = \frac{76}{2} = 38 = 14A_7$$

тогда т.к. $NA_T = BA_T = CA_T$, то по признаку ВМС-признак. $\angle BMC = 90^\circ$

простав, прѣб' $MC = 24$, $KB = 2x$, тогда по в. б. между $MC = 24$, $MB = x$

$$Y = \tilde{A} A_T + \tilde{B} B_T \quad (C_T = (A_T + B_T) / (B_T + C_T) / (C_T + C_T) =$$
$$= 3x \cdot 3y \cdot 24 = 24 \cdot 9xy \quad \text{---}$$
$$S_{ABC} = 100 \text{ кв. м.} \quad S_{BMC} = \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{1000}{3} =$$
$$= \frac{1}{2} MB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2y \Rightarrow 2xy = \frac{100}{3} \Rightarrow xy = \frac{50}{3}$$
$$\Rightarrow \underline{24.9^3 50} = 72.50 = 3600$$

Треугольник $KH \perp BC$, т.к. IK - т.кас., то центр описанной окружности лежит на перес. 4-х плоск. (ABC) , IK - перес. т.к. Центр лежит на перес. двух плоск. при ребре BC (т.к. описанная (ABC) и (BCK)).
 Точка O - центр описанной окружности OH - т.кас. к BC , $KH \perp BC$, KH - перес. плоск. (ABC) , $OK \perp (ABC)$ - 3-х перес. $OH \perp BC \Rightarrow$ т.кас. из пред. рассуждений $\angle HKO = \frac{\pi}{2}$, где L - центр описанной



$$CFE \sim BCE$$

$$\frac{FE}{CE} = \frac{BE}{CE}$$

$$\frac{1}{2} CD AB$$

$$\sum ABC = 2$$

$$\sum CFE = \frac{1}{2} FE \cdot CF$$

$$\frac{CF}{CE} = \frac{CE}{CA}$$

$$\frac{CD AB}{CF FE} = \frac{CA}{CE} \cdot \frac{AB}{EF}$$

$$\frac{\sum ABC}{\sum CFE}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EF}{CE}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{FE}$$

$$\frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn) + \frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn) - \frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn) =$$

$$= \frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn) + \frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn) - \frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn) =$$

$$= \frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn) + \frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn) - \frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn) =$$

$$\frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn) + \frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn) - \frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn) =$$

$$z = mn$$

$$y = m + n$$

$$\frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn)$$

$$\frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn) + \frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn) - \frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn) =$$

$$= \frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn) + \frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn) - \frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn) =$$

$$= \frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn) + \frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn) - \frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn) =$$

$$0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$(m^2 + n^2 - 2mn) + (m^2 + n^2 - 2mn) - (m^2 + n^2 - 2mn) =$$

$$m^2 + n^2 - 2mn + m^2 + n^2 - 2mn - m^2 + n^2 - 2mn =$$

$$0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

На одной странице можно оформить только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5
- ☐ 6
- ☐ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порядк QR-кода недопустим!



МФТИ

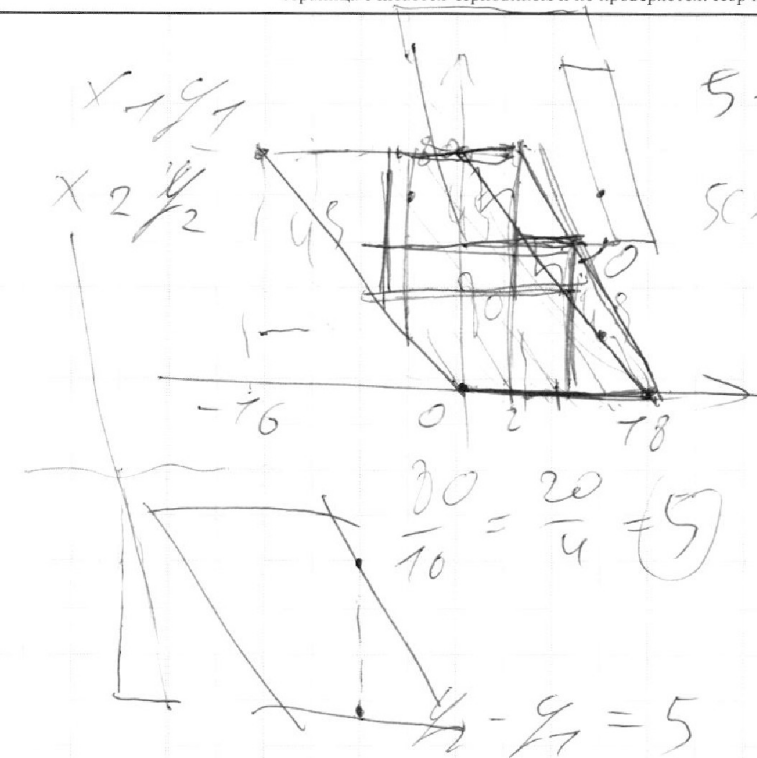
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$$

$$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$$

$$x_2 - x_1 \leq 8$$

$$x_2 - x_1 \leq 9$$

$$4.17$$

$$4.43$$

$$3.42$$

$$2.2$$

$$x_2 - x_1 = 8$$

$$x_2 - x_1 = 5$$

$$x_2 - x_1 = 0$$

$$\frac{5}{2} = 2$$

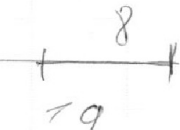
000000

④

$$5-3=2$$

$$18-9$$

$$15$$



000000

30	
380	
380	
380	

$$80/15 = 6$$

$$80/25$$

$$\frac{441}{5} = 88.2$$

$$202 = 2.25$$

$$\frac{8}{3}$$

$$9.1 + 0.01$$

222
1440
2585

98 981

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r}
 325 \\
 943 \\
 333 \\
 \hline
 964 \\
 182
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4326 \\
 2 \\
 3942 \\
 \hline
 875 \\
 0441 \\
 182 \\
 201 \\
 451 \\
 54 \\
 431
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 943 \\
 951 \\
 051 \\
 1 \\
 431 \\
 95 \\
 851
 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{то } \sin(\cos x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\cos x = x \in [-1; 1]$$

$$\cos 2 = x \in [-1; 1]$$

$$\sin x = \sqrt{1-x^2}$$

$$\sin 2 = \sqrt{1-x^2}$$

$$\arcsin 2 = \sqrt{1-x^2}$$

$$\text{то } \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x^2}$$

$$100(1-x^2) = 7^2 - 49x + 4x^2$$

$$104x^2 - 49x + 5^2 - 100 = 0$$

$$\Delta = 49^2 - 4(5^2 - 100) \cdot 104 =$$

$$= 49^2 - 4(25 - 100) \cdot 104 = 49^2 - 4(-75) \cdot 104 = 49^2 + 400 \cdot 104 = 49^2 + 41600 = 17129$$

$$x = \frac{49 \pm \sqrt{17129}}{208}$$

$$\sqrt{1-x^2} \quad x \in [-1; 1]$$

$$\sin 2 = \sqrt{1-x^2} \quad \sin 2 = \cos x$$

$$\arcsin 2 = 2$$

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sin 2$$

$$\sin^2 x + 2^2 = 1$$

$$1 - \sin^2 x = \sin^2 2 = 1$$

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x^2}$$

$$ax - 3y + 4b = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0$$

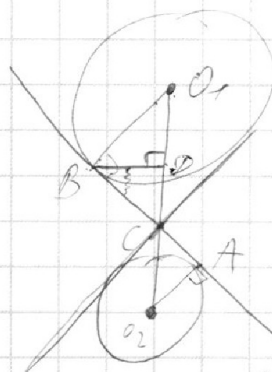
$$x^2 + y^2 - 20y + 64 = 0$$

$$x^2 + (y-10)^2 = 36$$

$$y = \frac{ax + 4b}{3}$$

$$O_1 B D \sim O_1 C B$$

$$\frac{6}{60} = \frac{BD}{BC} = \frac{O_1 D}{O_1 B}$$



$$O_1 B C \sim O_2 A C$$

$$\frac{6}{7} = \frac{O_1 C}{O_2 B}$$

$$O_1 C = O_2 \cdot 6$$

$$O_1 C + O_2 C = 10$$

$$O_2 C + 6O_2 C = 10$$

$$O_2 C = \frac{10}{7}$$

$$C = \frac{75}{14}$$

$$\frac{46}{3} = \frac{10}{7}$$

$$O_1 C = \frac{60}{7}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$abc : 2^8 3^{14} 5^{72}, bc : 2^{12} 3^{26} 5^{72}, ac : 2^{16} 3^{27} 5^{39}$$

$$abc - 711n1$$

$$a : 5^{72} \quad b : 5^{72} \quad c : 5^{39}$$

$$a : 3^{27-x} \quad b : 3^{20-27+x} = 3^{x-7}$$

$$a : 3^{15-x}$$

$$75-x = x$$

$$x = \frac{75}{2}$$

$$x = 8$$

$$b : 3^7$$

$$c : 3^{13}$$

$$b : 3^6$$

$$c : 3^{14}$$

$$a : 3^8 \quad b : 3^6 \quad c : 3^{14}$$

$$a : 5^x$$

$$c : 5^{34-x}$$

$$b : 5^{72-x} \quad c : 5^{13-34+x}$$

$$72-x = x-22$$

$$34 = 2x$$

$$x = 17$$

$$a : 5^{15} \quad c : 5^{22}$$

$$a : 2^x$$

$$b : 2^{8-x}$$

$$c : 2^{72-8+x}$$

$$c : 2^{74-x}$$

$$4+x = 74-x$$

$$2x = 70$$

$$x = 35$$

$$a : 2^5 \quad b : 2^3 \quad c : 2^9$$

$$\text{Таким образом } abc = 3^8 \cdot 3^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{15} \cdot 5^{22} \cdot 2^5 \cdot 2^3$$

$$x5 = 37x = \frac{24}{37} = \frac{64}{37}$$

$$\frac{5}{5} = 750$$

$$\frac{5}{1} = \frac{750}{1} = 750$$

$$750 = \frac{5x}{2} = 750$$

$$x = 25$$

$$x = 25$$

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AH}$$

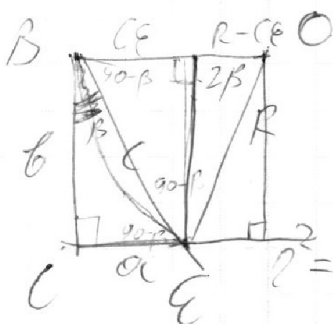
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\sin 2\beta = \frac{b}{R} = 2 \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c}$$

$$2aR = c^2$$

$$R = \frac{c^2}{2a}$$

$$R^2 = b^2 + R^2 - 2Rc \cos \alpha + a^2$$

$$25x^2 + 100x^2$$

$$25 + 100$$

$$\sqrt{125}x$$

$$R = \frac{49x^2}{2\sqrt{125}} = \frac{49x}{10\sqrt{5}} \cdot 25.5$$

$$R = \frac{49}{50} \sqrt{5}x \quad AC = 5\sqrt{5}x$$

$$24x^2 + \frac{4}{9}FE^2 = 2 \cdot \frac{5}{3}FE \cdot R$$

$$\cos \angle = \frac{FE}{5x} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \angle = \frac{FE}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{3R}{5} = \frac{4.5}{5} \quad \angle BCE = 2\beta \quad R = 3\beta$$

$$FE = 2R \cdot \sin \left(\frac{2}{3} \right) = 3$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2R}{3} \quad R = 3$$

$$BOF = 2\beta$$

$$\angle BFE = \angle$$

$$\angle BOE = 2\beta$$

$$\angle CBE = \beta$$

$$\angle BFE = \angle CBE - \angle BCF$$

$$3\beta = \angle FBE$$

$$\frac{FE}{2R} = \frac{4.5}{2R}$$

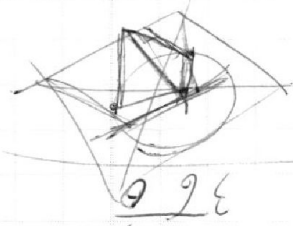
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

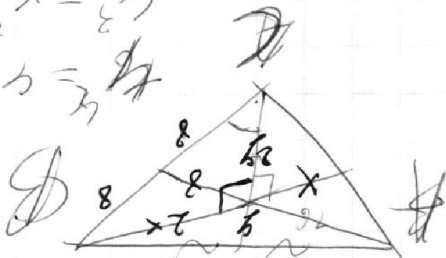
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



360
5
32

$$\begin{aligned} 4^2 + 3^2 &= 5^2 \\ 4^2 + 3^2 &= 5^2 \end{aligned}$$

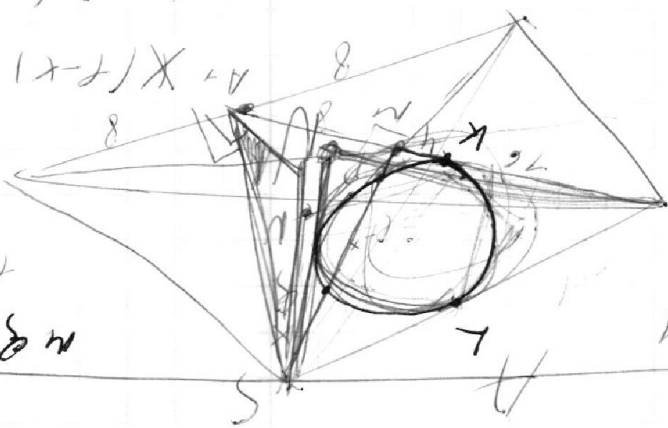
$$3 \times 3929$$



$$AS = AL + LS = AL + AL = AL$$

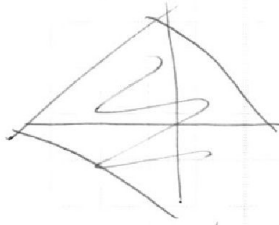
$$AL = AL$$

$$AS = AL + LS = AL + AL = AL$$



$$AL = 24$$

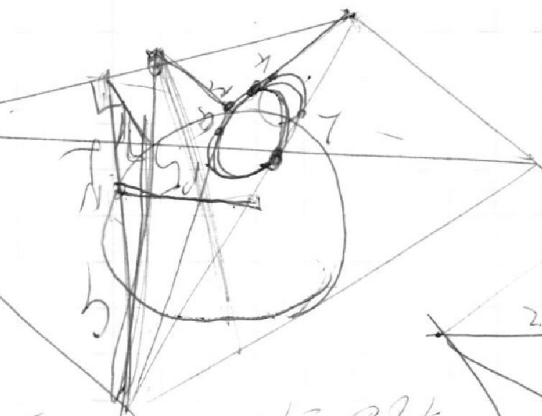
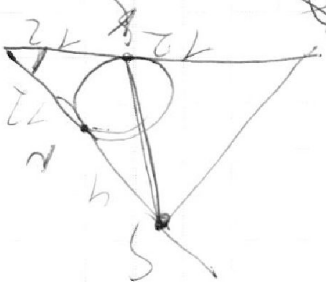
$$AS = SP = r$$



$$SL = 4$$



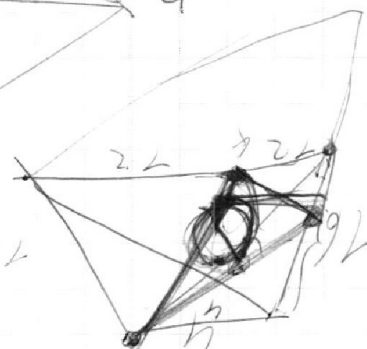
$$x = \frac{3}{4}$$



$$180 - 213$$

$$B + 90 - 213$$

$$90 - 213$$



$$CE = \frac{3}{5} FE$$

$$\frac{FE}{CE} = \frac{BC}{CE}$$

$$CFE \sim BFC$$