



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1. Пусть 1_j — степень числа j в разложении на простые множители числа i . Должны выполняться условия:

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 8 \\ b_2 + c_2 \geq 12 \\ a_2 + c_2 \geq 14 \\ a_3 + b_3 \geq 14 \\ b_3 + c_3 \geq 20 \\ a_3 + c_3 \geq 27 \\ a_5 + b_5 \geq 12 \\ b_5 + c_5 \geq 17 \\ a_5 + c_5 \geq 39 \end{cases}$$

При этом все показатели степеней должны быть минимальны, чтобы была ~~се~~ минимальна на функция в нарезывающемся показателе.

Если x — наименьшее число, то $x = 2^{a_2+b_2+c_2} \cdot 3^{a_3+b_3+c_3} \cdot 5^{a_5+b_5+c_5}$

(очевидно, что у минимального числа других простых множителей в разложении нет). Для степеней 2 и 3 выполняются равенства, т.е. значения минимальны: $a_2=5, b_2=3, c_2=9, a_3=7, b_3=6, c_3=14$. Для 5 минимальное значение $a_5+b_5+c_5=39$ (при $b_5 \neq 0$ (при $b_5=0$), тогда существуют a_5 и c_5 такие, что $a_5 \geq 12, b_5 \geq 17$ (пример: $a_5=19, b_5=0, c_5=20$)). Подставим ~~выра~~ значения минимальных $a_j+b_j+c_j$ ($j \in \{2, 3, 5\}$) в выражение для x :

$$x = 2^{5+3+9} \cdot 3^{7+6+14} \cdot 5^{19+0+20} = 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{39}$$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



2. $AB^2 = AD \cdot DB = AC^2 \cdot BC^2 \Rightarrow AC:BC = \sqrt{5}:\sqrt{2}$ Введём ДСЖ

$AB: \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{5}} = 1 \quad \sqrt{5}x + \sqrt{2}y - \sqrt{10} = 0$

м.к. $y = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}x + \sqrt{10} \quad k_{AB} = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \quad AB \perp CD \Rightarrow k_{AB} k_{CD} = -1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow k_{CD} = \frac{2}{5} \quad y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}x \quad (\text{м.к. } C \in CD) \quad CD: \sqrt{2}x - \sqrt{5}y = 0$

$A(0; \sqrt{5}) \quad B(\sqrt{2}; 0) \quad C(0; 0) \quad D(\sqrt{5}; y_0)$

$E(x_F; y_F) \quad F(x_F; y_F)$

$\begin{cases} EF \parallel AB \\ B, E, F \in \omega \\ E \in AC \\ F \in CD \end{cases} \quad \begin{cases} \{x_F; y_F - y_0\} = k \{-\sqrt{5}; \sqrt{2}\} \quad (1) \\ y_0 = \sqrt{(x_F - \sqrt{2})^2 + (y_F - y_0)^2} \quad (2) \\ y_0 = \sqrt{2 + (y_F - y_0)^2} \quad (3) \\ \sqrt{2}x_F + \sqrt{5}y_F = 0 \quad (4) \end{cases}$

$(AC: x=0 \quad BC: y=0) \quad (2): (x_F - \sqrt{2})^2 + (y_F - y_0)^2 = 2 + (y_F - y_0)^2$

$(2): (4): x_F = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}y_F \quad (2): y_0^2 = (\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}y_F - \sqrt{2})^2 + (y_F - y_0)^2$

$y_0^2 = \frac{5}{2}y_F^2 - 2\sqrt{5}y_F + 2 + y_F^2 - 2y_Fy_0 + y_0^2 \quad 2y_Fy_0 = \frac{5}{2}y_F^2 - 2\sqrt{5}y_F + 2$

$y_0 = \frac{\frac{5}{2}y_F^2 - 2\sqrt{5}y_F + 2}{2y_F} \quad (3): (\frac{\frac{5}{2}y_F^2 - 2\sqrt{5}y_F + 2}{2y_F})^2 = 2 + y_F^2 - 2y_F \cdot (\frac{\frac{5}{2}y_F^2 - 2\sqrt{5}y_F + 2}{y_F}) + y_0^2$

$+ (\frac{\frac{5}{2}y_F^2 - 2\sqrt{5}y_F + 2}{y_F})^2 \quad y_0^2 = 2 + y_F^2 - 2y_Fy_0 + y_0^2 \quad y_F^2 - 2y_0y_F + 2 = 0$

$\frac{P}{4} = y_0^2 - 2 \quad y_E = y_0 + \sqrt{y_0^2 - 2}$

$(4): x_F = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}y_F \quad (2): y_0^2 = \frac{5}{2}y_F^2 + 2\sqrt{5}y_F + 2 + y_F^2 - 2y_0y_F + y_0^2$

$\frac{5}{2}y_F^2 + 2(\sqrt{5} - y_0)y_F + 2 = 0 \quad y_F^2 + \frac{4}{\sqrt{5}}(\sqrt{5} - y_0)y_F + \frac{4}{\sqrt{5}} = 0 \quad D =$

$7y_F^2 + 4(\sqrt{5} - y_0)y_F + 4 = 0 \quad \frac{D}{4} = (2\sqrt{5} - 2y_0)^2 - 28 = 50 - 8\sqrt{5}y_0 + 4y_0^2 - 28 = 4y_0^2 - 8\sqrt{5}y_0 + 22$

$y_F = \frac{-2(2(\sqrt{5} - y_0) + \sqrt{4y_0^2 - 8\sqrt{5}y_0 + 22})}{7} \quad (1): -\sqrt{5}x_F + \sqrt{2}(y_F - y_0) = 0$

$\frac{5}{\sqrt{2}}y_F + \sqrt{2}y_F - \sqrt{2}y_0 = 0 \quad 5y_F + 2y_F - 2y_0 = 0 \quad 7y_F = 2y_0$

$2(y_0 - \sqrt{5}) + \sqrt{4y_0^2 - 8\sqrt{5}y_0 + 22} = 2y_0 + 2\sqrt{y_0^2 - 2} \quad -2\sqrt{5} + \sqrt{4y_0^2 - 8\sqrt{5}y_0 + 22} = 2\sqrt{y_0^2 - 2}$

$\sqrt{4y_0^2 - 8\sqrt{5}y_0 + 22} = 2\sqrt{y_0^2 - 2} + 2\sqrt{5} \quad 4y_0^2 - 8\sqrt{5}y_0 + 22 = 4(y_0^2 - 2) + 50 + 8\sqrt{5}y_0 - 20$

$4y_0^2 - 8\sqrt{5}y_0 = 4y_0^2 + 20 + 8\sqrt{5}y_0 - 20 \quad 8\sqrt{5}y_0 - 40 = -8\sqrt{5}y_0 - 20 \quad 16\sqrt{5}y_0 = 20$

$64(5y_0^2 - 20) =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3. $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}$ $\begin{cases} \cos x \in [-1; 1] - \text{всегда верно} \\ \frac{\pi}{10} - \frac{x}{5} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \quad (\forall x) \Rightarrow \\ \cos x = \sin(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{10} - \frac{x}{5} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \\ \cos x = \sin(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x \in [-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}] \\ \cos x = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} + \frac{x}{5}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x \in [-3\pi; 2\pi] \\ \cos x = \cos(\frac{2\pi}{5} + \frac{x}{5}) \end{cases}$

$\begin{cases} x \in [-2\pi; 3\pi] \\ \begin{cases} x = \frac{2\pi}{5} + \frac{x}{5} + 2\pi k \\ x = \frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5} + 2\pi l \end{cases} k, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-2\pi; 3\pi] \\ \begin{cases} \frac{4x}{5} = \frac{2\pi}{5} + 2\pi k \\ \frac{4x}{5} = -\frac{2\pi}{5} + 2\pi l \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-2\pi; 3\pi] \\ \begin{cases} 4x = \pi + 10\pi k \\ 4x = -\pi + 10\pi l \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-2\pi; 3\pi] \\ \begin{cases} 2x = \pi + 5\pi k \\ 3x = -\pi + 5\pi l \end{cases} \end{cases}$

Омтор корней: серия 1: $-4\pi \leq \pi + 5\pi k \leq 6\pi$ $-4 \leq 1 + 5k \leq 6$

$-5 \leq 5k \leq 5$ $k \in \{-1; 0; 1\}$ $x \in \{-2\pi; \frac{\pi}{2}; 3\pi\}$

серия 2: $-6\pi \leq -\pi + 5\pi l \leq 9\pi$ $-6 \leq -1 + 5l \leq 9$ $-5 \leq 5l \leq 10$ $l \in \{-1; 0; 1; 2\}$
 $x \in \{-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi\}$ в совокупности: $x \in \{-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi\}$

Ответ: $[-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4. $5ax - 3y + 4b = 0$ (1) — уравн. прямой

$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 100 - 36) = 0$ (2)

Удого, чтобы прямая (1)

пересекла обе окружности.

Если при каком-то положении

прямой она касалась одной

и пересекала другую окр., то

ее можно сдвинуть (в отве-

чаем за сдвиг прямой), и усло-

вия будут выполнены. Удого

иногда случает, когда пересе-

чение с окружностями $\Delta \leq 2$.

1) окр. есть и общие касательные

с коэф. наклона $k_1, -k_1, k_2, -k_2$ (а от-

вечаем за коэф. наклона, потому

имеем его допустимые значения).

Очевидно $|k_1| > |k_2|$. Пусть $5ax - 3y + 4b = 0$

$3y = 5ax + 4b$ $y = \frac{5}{3}x + \frac{4}{3}b$. При $|\frac{5}{3}| > |k_2|$

3) итак же b (рис. (а)), при $|\frac{5}{3}| \in [k_2, |k_1|]$

4) итак же b (рис. (б)), при $|\frac{5}{3}| \leq k_2$ итак же

b не удовл. условию, т.к. при увеличении

коэф. наклона с одной окружностью

коэф. наклона с другой увеличивается,

т.к. $k_1, -k_1$ — коэф. наклона общих касательных, у которых окру-

жности лежат по разные стороны от них. (рис. (б)). Найдём

уравн. общ. касательных: $kx + by + m = 0$ — прямая S

$\rho(O_1; S) = 1$ $\frac{|m|}{\sqrt{k^2 + b^2}} = 1$

$\rho(O_2; S) = 6$ $\frac{|10b + m|}{\sqrt{k^2 + b^2}} = 6$

решим: $\sqrt{3}x + y + 7 = 0$

$-\sqrt{3}x + y + 7 = 0$

$\sqrt{57}x + 7y - 10 = 0$

$-\sqrt{57}x + 7y - 20 = 0$

(как найти:

$m = 1$

$10b = 5$

$k^2 + b^2 = 1$

$m = -1$

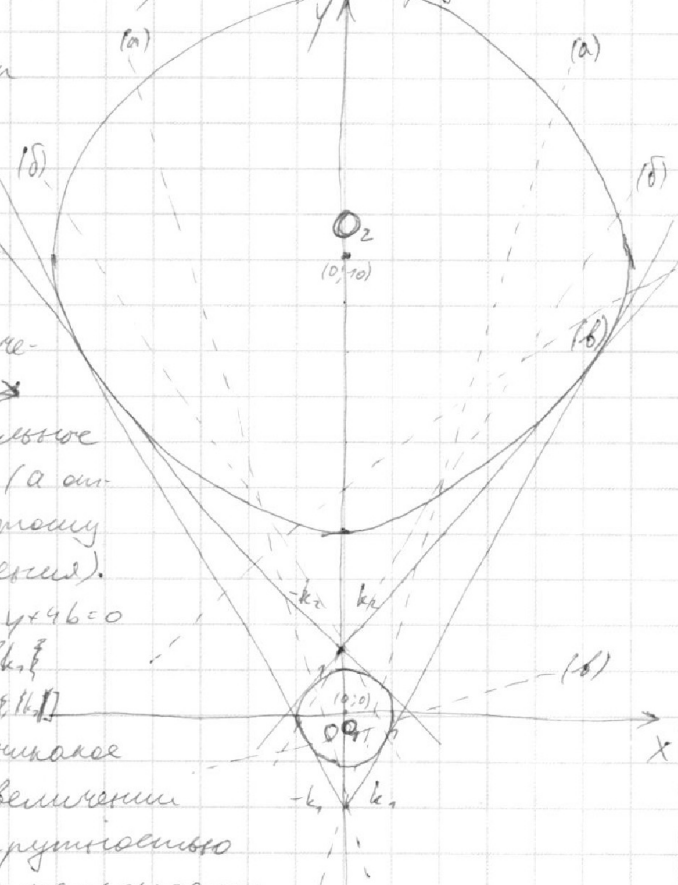
$10b = 7$

$k^2 + b^2 = 1$, подставить на те же коэф.)

(2): $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 100 - 36) = 0$

$[x^2 + y^2 = 1 - \text{окруж.}]$

$[x^2 + (y - 10)^2 = 36 - \text{окруж.}]$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y = \sqrt{3}x - 1$$

$$y = -\sqrt{3}x - 1$$

$$y = \frac{\sqrt{57}}{3}x + \frac{10}{3}$$

$$y = -\frac{\sqrt{57}}{3}x + \frac{10}{3}$$

$$\sqrt{3} > \frac{\sqrt{57}}{3}$$

$$|a| > \frac{\sqrt{57}}{3}$$

$$3 > \frac{\sqrt{57}}{3} \Rightarrow k_1 = 3, k_2 = \frac{\sqrt{57}}{3}$$

$$|a| > \frac{3\sqrt{57}}{3}$$

$$a \in (-\infty; -\frac{3\sqrt{57}}{3}) \cup (\frac{3\sqrt{57}}{3}; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -\frac{3\sqrt{57}}{3}) \cup (\frac{3\sqrt{57}}{3}; +\infty)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5. ур-е относительно x : $\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{2x} 625 - 3$

$\log_5(2x) > 0$, обратимости на x : $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\log_5^4(2x) - \frac{4}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3 \log_5 2x} - 3 \quad (\log_{2x} 625 = \frac{1}{3} \cdot 4 \log_{2x} 5)$$

$$\log_5(2x) = a \quad a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3 \quad || \cdot a \quad (a \neq 0, \text{ т.к. } x \neq \frac{1}{2})$$

$$a^5 - 3 = \frac{4}{3} - 3a \quad a^5 + 3a - \frac{7}{3} = 0 \quad a=0 \text{ не является решением,}$$

миним. корней не найдем

ур-е относительно y : $\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_y \frac{1}{5} - 3$ ограничения: $\begin{cases} y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$

$$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3 \log_5 y} - 3 \quad \log_5 y = b \quad b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3 \quad || \cdot b$$

$$(b \neq 0 \text{ т.к. } y \neq 1) \quad b^5 + 4 = -\frac{1}{3} - 3b \quad b^5 + 3b + \frac{7}{3} = 0 \quad b=0 \text{ не является реше-}$$

нием, миним. корней не найдем

$$(a^5 + 3a - \frac{7}{3} = 0) \quad (1) \quad (b^5 + 3b + \frac{7}{3} = 0) \quad (2) \quad (a+b) \neq 0 \quad a^5 + b^5 + 3(a+b) = 0 \quad (a+b) \neq 0 \quad a^5 + b^5 + 3(a+b) = 0 \quad (a+b) \neq 0$$

$$(b^5 + 3b + \frac{7}{3} = 0) \quad (2)$$

$$[a+b \neq 0] \quad (3) \text{ Заметим, что если } a^5 + 3a = \frac{7}{3},$$

$$f_1(a) = a^5 + 3a - \frac{7}{3} \quad f_1'(a) = 5a^4 + 3 > 0 \Rightarrow \text{монотонно возр.} \Rightarrow y \text{ ур-е}$$

$$(1) \text{ один корень, а н-во } f_2(b) = b^5 + 3b + \frac{7}{3} \quad f_2'(b) = 5b^4 + 3 > 0 \Rightarrow \text{монотонно}$$

$$\text{возр.} \Rightarrow y \text{ ур-е (2) один корень. Заметим, что если } c - \text{корень}$$

$$(1), \text{ то } c^5 + 3c - \frac{7}{3} = 0 \Rightarrow c^5 + 3c = \frac{7}{3} \Rightarrow (-c)^5 + 3(-c) = -\frac{7}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-c)^5 + 3(-c) + \frac{7}{3} = 0 \Rightarrow -c - \text{корень (2)} \Rightarrow \text{единственно возможные}$$

значения a и b таковы, что $a+b=0$.

$$0 = a+b = \log_5(2x) + \log_5 y = \log_5(2xy) \quad 0 = \log_5 1 \Rightarrow \log_5(2xy) = \log_5 1$$

$$2xy = 1 \quad xy = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

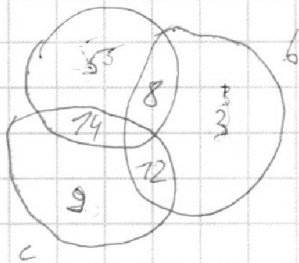
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

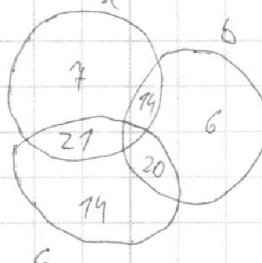


7. ~~1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100.~~

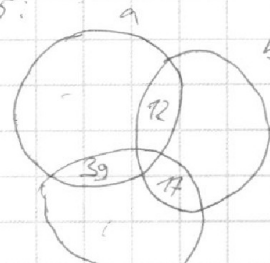
2:



3:



5:



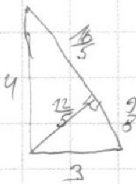
~~2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100.~~

$$a = 2^5 3^4 5^-$$

$$b = 2^3 3^6 5^-$$

$$c = 2^9 3^{14} 5^-$$

$$2^{14} \cdot 3^{27} \cdot 5^{39}$$



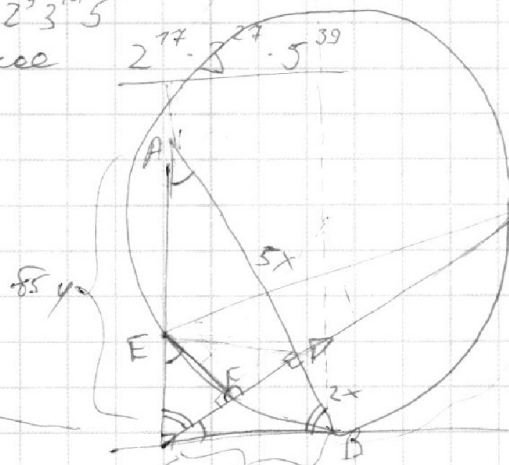
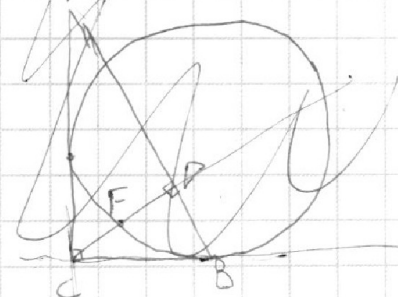
$$16 - \frac{144}{25}$$

$$9 - \frac{144}{25} <$$

$$= \frac{225 - 144}{25} = \frac{81}{25}$$

$$56 + 25 = 81$$

2. A



$$S_{APC} = \frac{5}{7} S_{ABC}$$

$$\text{MAGO } EF:AD, CF:FD, CE:EA$$

$$3. \cos x \sin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\cos x \sin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{20}$$

$$\frac{\pi - 2x}{20} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad (1)$$

$$\cos x = \sin(\frac{\pi - 2x}{20}) \quad (2)$$

$$(1): \pi - 2x \in [-5\pi, 5\pi]$$

$$-2x \in [-6\pi, 4\pi]$$

$$2x \in [-4\pi, 6\pi]$$

$$x \in [-2\pi, 3\pi]$$

$$x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$a = \sin x$$

$$a \in [-1, 1]$$

$$\frac{\pi - 2x}{20}$$

$$\cos x = \sin(\frac{\pi}{20} - \frac{x}{5})$$

$$\cos x = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{20} + \frac{x}{5})$$

$$\cos x = \cos(\frac{2\pi}{5} + \frac{x}{5})$$

$$\frac{4x}{5} = \frac{2\pi}{5} + 2\pi k$$

$$4x = 2\pi + 10\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{2} k$$

$$x = -\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{5} + 2\pi k$$

$$\frac{6x}{5} = -\frac{2\pi}{5} + 2\pi k$$

$$6x = -2\pi + 20\pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} k$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) -2 \leq \frac{7}{2} + \frac{5}{2}k \leq 3 \quad -4 \leq -1 + 5k \leq 6 \quad -5 \leq 5k \leq 5 \quad -7 \leq k \leq 7$$

$$k = -1, 0, 1$$

$$x = -2\pi, \frac{\pi}{2}, 3\pi$$

$$2) -2 \leq -\frac{1}{3} + \frac{5}{3}k \leq 3 \quad -6 \leq -1 + 5k \leq 9 \quad -5 \leq 5k \leq 10 \quad -7 \leq k \leq 2$$

$$k = -1, 0, 1, 2$$

$$x = -2\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, 3\pi$$

$$x = -2\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 3\pi$$

$$-2\pi \checkmark \quad -\frac{\pi}{3} \checkmark \quad \frac{\pi}{2} \checkmark \quad \frac{3\pi}{2} \checkmark \quad 3\pi \checkmark$$

$$5\pi \quad -\frac{3\pi}{2}$$

$$(1) \quad 2x - 3y + 46 = 0$$

$$(2) \quad (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0$$

$$(0; 10)$$

$$(2): \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 20y + 100 - 36 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 20y + 100 - 36 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 20)^2 = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 20)^2 = 36 \end{cases}$$

$$kx + ly + m = 0$$

$$- \text{общ. кас.}$$

$$\frac{|10l + m|}{\sqrt{k^2 + l^2}} = 6$$

$$\frac{|m|}{\sqrt{k^2 + l^2}} = 1$$

$$l = 0,5 \quad m = 7 \quad k = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 7 = 0$$

$$x$$

$$\sqrt{3}x + y + 7 = 0$$

$$-\sqrt{3}x + y + 7 = 0$$

$$\sqrt{3}x - y - 7 = 0$$

$$-\sqrt{3}x - y - 7 = 0$$

$$\frac{\sqrt{57}}{10}x + \frac{7}{10}y - 7 = 0$$

$$\frac{\sqrt{57}}{10}x + \frac{7}{10}y - 7 = 0$$

$$y = kx + b$$

$$y = kx + b$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 7 = 0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 7 = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - 7 = 0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - 7 = 0$$

$$|m| = 7$$

$$|l| = \frac{7}{10}$$

$$m = -7 \quad l = \frac{7}{10}$$

$$k = \frac{\sqrt{57}}{10}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{5}x + 7y - 20 = 0 \quad y = -\frac{\sqrt{5}}{7}x + \frac{20}{7}$$

$$-\sqrt{5}x + 7y - 20 = 0 \quad y = \frac{\sqrt{5}}{7}x + \frac{20}{7}$$

$$101 > \frac{3\sqrt{5}}{7}$$

$$161 \quad 3y = -\frac{3\sqrt{5}}{7}x + \frac{30}{7}$$

$$3y = \frac{3\sqrt{5}}{7}x + \frac{30}{7}$$

а можно ли бить
3 ринга? норма 10+0

$$a \in (-\infty; -\frac{3\sqrt{5}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{5}}{7}; +\infty)$$

$$5. \log_5^4 2x - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x} 625 - 3$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$$\log_5^4 2x - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3 \log_5 2x} - 3$$

$$\log_{8x} 625 = \frac{1}{3} \log_{2x} 5^4$$

$$= \frac{4}{3} \log_{2x} 5 =$$

$$t = \log_5 2x \quad t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3t} - 3$$

$$t^5 - 3 = \frac{4}{3} - 3t \quad t^5 + 3t - \frac{13}{3} = 0 \quad t^5 + 9t - 13 = 0$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{25} = \frac{1}{50} \quad \frac{1}{25} + \frac{9}{15} = \frac{14}{25} \quad \frac{1}{625 \cdot 5} + \frac{9}{5} = \frac{625 + 9 \cdot 1}{625 \cdot 5}$$

$$t^5 + 9t - 13 = 0 \quad \text{нет экстр.} \rightarrow t^2 + \frac{3}{t} = \frac{13}{3t} = 0$$

$$\log_5^4 2x \rightarrow 4 \text{ корень между } 1 \text{ и } 2$$

$$\log_5 2x \in [1, 2] \quad 2x \in [5, 25] \quad x \in [2.5; 12.5]$$

$$\frac{293}{32} + \frac{27}{2} = \frac{293 + 27 \cdot 16}{32}$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 16 \\ \hline 162 \\ + 27 \\ \hline 432 \\ - 32 \\ \hline 400 \\ - 96 \\ \hline 304 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 625 \\ \hline 5 \\ \hline 3725 \end{array}$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$

$$\frac{625 \cdot 5}{1024} + \frac{45}{4} = \frac{625 \cdot 5 + 45 \cdot 256}{1024}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 32 \\ \hline 64 \\ + 32 \\ \hline 1024 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 256 \\ \hline 11520 \\ + 185 \\ \hline 11705 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 130 \quad 260 \quad 13000 \\ \quad \quad \quad 260 \\ \quad \quad \quad 52 \\ \hline 13372 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 71520 \\ + 3136 \\ \hline 74656 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3^4 y + 4 \log_4 5 = \log_4 \frac{4}{3} - 3 \quad \log_3^4 y + 4 \log_4 \frac{4}{3} =$$

$$\log_3^4 y + \frac{4}{\log_3 y} = \log_3^4 y + 4 \log_4 5 = -\frac{1}{3} \log_4 5 - 3$$

$$\log_3^4 y + \frac{4}{\log_3 y} = -\frac{1}{3 \log_3 y} - 3$$

$$t^4 + \frac{4}{t} = -\frac{1}{3t} - 3$$

$$f' = t^4 + 9 > 0$$

$$t^5 + 4 = -\frac{1}{3} - 3t$$

$$t^5 + 3t + \frac{13}{3} = 0$$

$$t^5 + 9t + 13 = 0$$

$$t_x^5 + 9t_x - 13 = 0$$

$$t_x \rightarrow a \quad a \in [1; 2]$$

$$\log_5 (xy)$$

$$\log_5 2xy$$

$$t_y^5 + 9t_y + 13 = 0$$

$$t_y \rightarrow b \quad b \in [-2; -1]$$

$$a^5 + 9a + b^5 + 9b = 0$$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + (a+b)9 = 0$$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 9) = 0$$

$$\text{если } a+b=0, \text{ то } \log_5 2x + \log_5 y = \log_5 2xy = 0 \Rightarrow 2xy = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xy = \frac{1}{2}$$

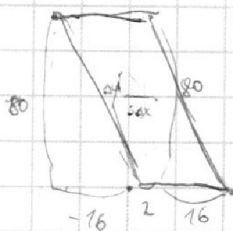
$$\text{если } a+b \neq 0 \quad a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2 - ab(a^3 + b^3) + 9 =$$

$$= (a^2 + b^2)^2 - ab(a^2 + b^2 + ab) + 9 = (a^2 + b^2)^2 - ab(a^2 + b^2) - a^2b^2 + 9$$

$$xy = \frac{1}{2}$$

$$-a^2b^2 \quad \text{PA} \quad \frac{9ab(a+b)^2}{[-7; -4] \quad \mathbb{R}[-7; 7]}$$

6.



$$5AX + 4Y = 45$$



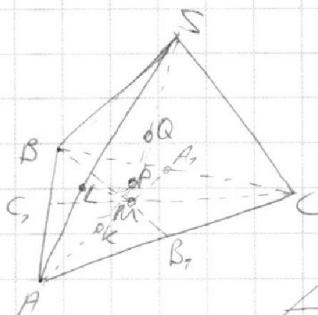
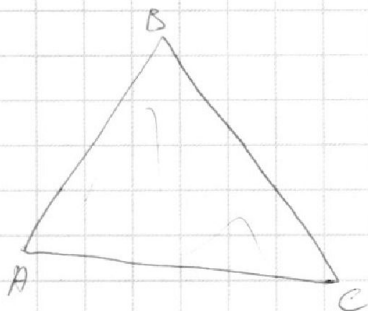
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

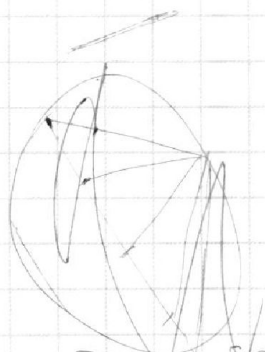
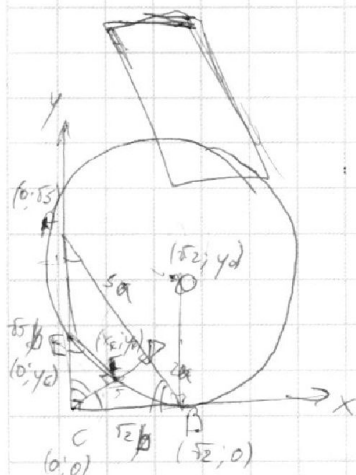
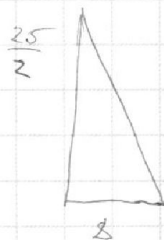
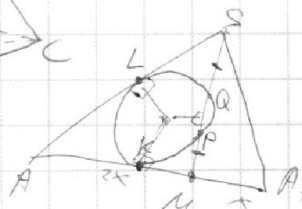
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$100 = \frac{7}{2} \cdot 16 - h_A$$
$$\Rightarrow h_A = 2.5$$



$$x_F, y_F, y_E, y_0$$

$$AB: \frac{x}{15} + \frac{y}{15} = 1 \quad \sqrt{5}x + \sqrt{2}y - \sqrt{10} = 0 \quad \{\sqrt{5}, \sqrt{2}, -\sqrt{10}\}$$
$$CD: \{k, l, m\} \quad \sqrt{5}k + \sqrt{2}l - \sqrt{10}m = 0 \quad k = \sqrt{5}, l = \sqrt{2}$$
$$EF: \quad m = 0 \quad -\sqrt{2}x + \sqrt{5}y = 0$$

$$y_0^2 = 2 + y_0^2 - 2y_0y_0 + y_0^2$$

$$\sqrt{y_0^2 - 2y_0y_0 + y_0^2} = 2$$

