



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$$

$$b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$$

$$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$$

Тогда

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 8 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 12 \\ \alpha_1 + \alpha_3 \geq 14 \end{cases}$$

$$2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 34$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 17$$

Пример

$$\begin{cases} \alpha_1 = 5 \\ \alpha_2 = 3 \\ \alpha_3 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 \geq 14 \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 20 \\ \beta_1 + \beta_3 \geq 21 \end{cases}$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq \frac{55}{2}$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 28$$

Пример:

$$\begin{cases} \beta_1 = 7 \\ \beta_2 = 7 \\ \beta_3 = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 \geq 12 \\ \gamma_2 + \gamma_3 \geq 17 \\ \gamma_1 + \gamma_3 \geq 39 \end{cases}$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 34$$

Но $\gamma_1 + \gamma_3 \geq 39 > 34$,
тогда

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 39 \\ \gamma_1 + \gamma_3 \geq 39 \end{cases}$$

Пример: $\gamma_2 = 0$

$$\begin{cases} \gamma_1 = 19 \\ \gamma_2 = 0 \\ \gamma_3 = 20 \end{cases}$$

Тогда $\min(abc) = \min(2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 3^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} \cdot 5^{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}) =$
 $= 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\text{Т.к. } \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x), \text{ а } \arccos(\cos x) = x \in [0; \pi]$$

$$\begin{cases} 5\pi - 10x = \pi - 2x; & 4\pi = 8x; & x = \frac{\pi}{2} \\ x \in [0; \pi] \end{cases}$$

~~$4\pi = 8x$~~

Ответ: $\frac{\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

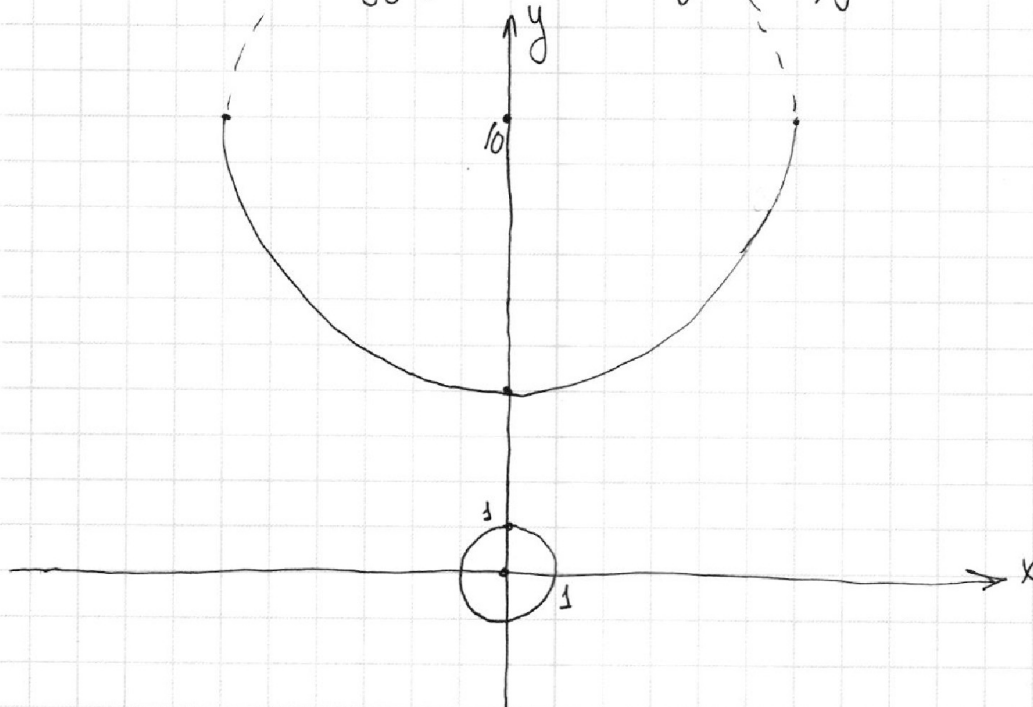
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

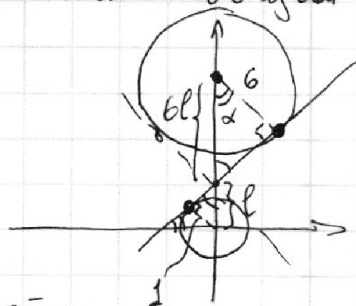
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① $\begin{cases} y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b - \text{прямая вращающаяся вокруг точки } A(0; \frac{4}{3}b) \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 10)^2 - 36) = 0 \end{cases}$ $\alpha - ?$ Эб Чрем.

① Графиком будут являться две окружности:



Найдем уравнения общих внутренних касательных:



$$10 = 6 + l$$

$$l = \frac{10}{7}$$

$(-1)B(0; \frac{10}{7})$ - принадлежит касательной

Пусть α - угол из ур. касательных

$$y = kx + b \quad (k > 0), \quad y = kx + \frac{10}{7}$$

$$\cos \alpha = \frac{6}{6l} = \frac{7}{10}; \quad \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$$

$\alpha \in [0; \frac{\pi}{2})$

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{\sqrt{51}}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

Следовательно уравнение касательных имеет вид $y = \pm \frac{\sqrt{51}}{7}x + \frac{10}{7}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Изменяя $\frac{a}{3} = c$ от $-\infty$ до ∞ будем смотреть ~~максимум~~ кол-во решений

$c \in (-\infty; -\frac{\sqrt{51}}{7})$ — 4 реш

$c \in \{-\frac{\sqrt{51}}{7}\}$ — 2 реш

$c \in (-\frac{\sqrt{51}}{7};$

$c \in [-\frac{\sqrt{51}}{7}; \frac{\sqrt{51}}{7}]$ — 2 реш

$c \in (\frac{\sqrt{51}}{7}; \infty)$ — 4 реш

Ровно $\frac{a}{3}$ 4 реш ~~не~~ будут в случае $\frac{a}{3} \in (-\infty; -\frac{\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{\sqrt{51}}{7}; \infty)$

$a \in (-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{7}; \infty)$

Ответ: $(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{7}; \infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3 \log_5 2x} - 3 \\ \log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3 \log_5 y} - 3 \end{cases}$$

Пусть $\log_5 2x = a$; $\log_5 y = b$

$$\begin{cases} a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3 \\ b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ 3a^5 - 9 = 4 - 9a; 3a^5 + 9a - 13 = 0 \\ 3b^5 + 12 = -1 - 9b; 3b^5 + 9b + 13 = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $f(g) = 3g^5 + 9g$ ($g \neq 0$). Она нечетная,
т.к. $f(-g) = -(3g^5 + 9g) = -f(g)$.

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ f(a) - 13 = 0 \\ f(b) + 13 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ f(a) + f(b) = 0 \rightarrow a = -b; a + b = 0 \\ f(a) = 13 \end{cases}$$

Т.к. $a + b = \log_5 2x + \log_5 y = \log_5 2xy$ ($a \neq 0; b \neq 0$)

$$2x \cdot y = \frac{5^{a+b}}{2} = \frac{5^0}{2} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

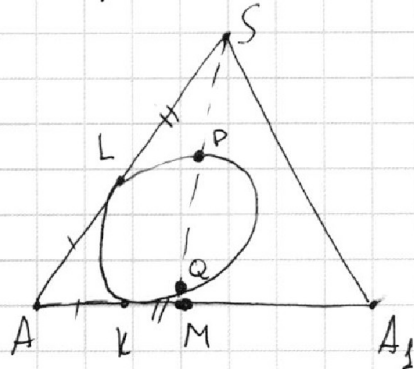
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

а) Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью:



$$KM^2 = MQ \cdot MP = MQ(MQ + QP)$$

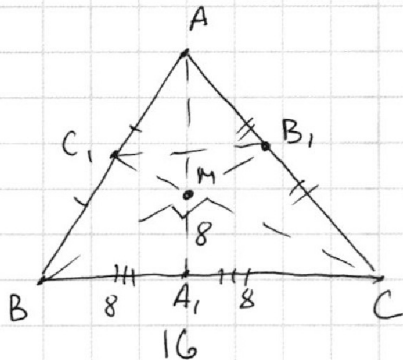
$$SL^2 = SP \cdot SQ = SP(SP + PQ)$$

Т.к. $SP = MQ$ по условию, то

$$KM = LS$$

С учетом, что $AL = AK$ получаем, что $AS = AM$. $\triangle ASM$ - р/д
след $AM = AS = 16$

Рассмотрим основание ABC :



По св-ву $MA_1 = \frac{1}{2} AM = 8 = BA_1 = A_1C$. след $\triangle BMC$ - прям.
по признаку

$$S_{BC, B_1C} = S_{ABC} - S_{AC_1B_1} = S_{ABC} - S_{ABC} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} S_{ABC}$$

$$S_{BC, B_1C} = \frac{1}{2} \sin \angle BMC \cdot BB_1 \cdot C_1C$$

$$\frac{1}{2} BB_1 \cdot C_1C = \frac{3}{4} \cdot 100$$

$$BB_1 \cdot C_1C = 150$$

$$\text{след } AA_1 \cdot BB_1 \cdot C_1C = 150 \cdot 24 = 3600$$

Ответ: 3600

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

8) Воспользуемся формулами

$$\begin{cases} V = \frac{2S_{ABC} \cdot S_{BSC} \cdot \sin \alpha}{3 \cdot BC} \\ V = \frac{1}{3} h_a \cdot S_{BSC} \end{cases}$$

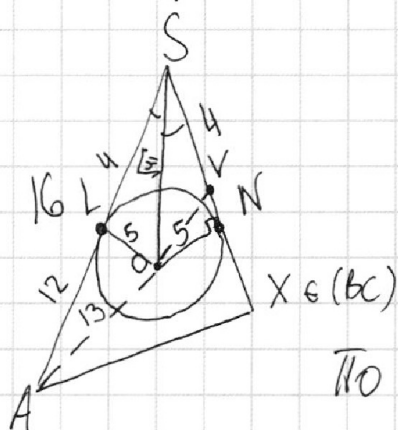
$$\frac{1}{3} h_a \cdot S_{BSC} = \frac{2 \cdot S_{ABC} \cdot S_{BSC} \cdot \sin \alpha}{3 \cdot BC}$$

h_a — высота из C на AB — медиана S_{BSC} .

$$h_a \cdot BC = 2 \cdot S_{ABC} \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{h_a \cdot BC}{2 \cdot S_{ABC}} = \frac{16 h_a}{200} = \frac{2 h_a}{25}$$

Рассмотрим плоскость



$$\frac{ON}{h_a} = \frac{AO}{OV}$$

$$\frac{ON}{h_a} = \frac{OV}{AV}$$

$$\frac{5}{h_a} = \frac{13}{OV}$$

$$\frac{5}{h_a} = \frac{OV}{AV}$$

По св-ву дуг-ов $\frac{AS}{AO} = \frac{SN}{ON}$

$$\frac{16}{13} = \frac{4 + VN}{ON}$$

$$ON =$$



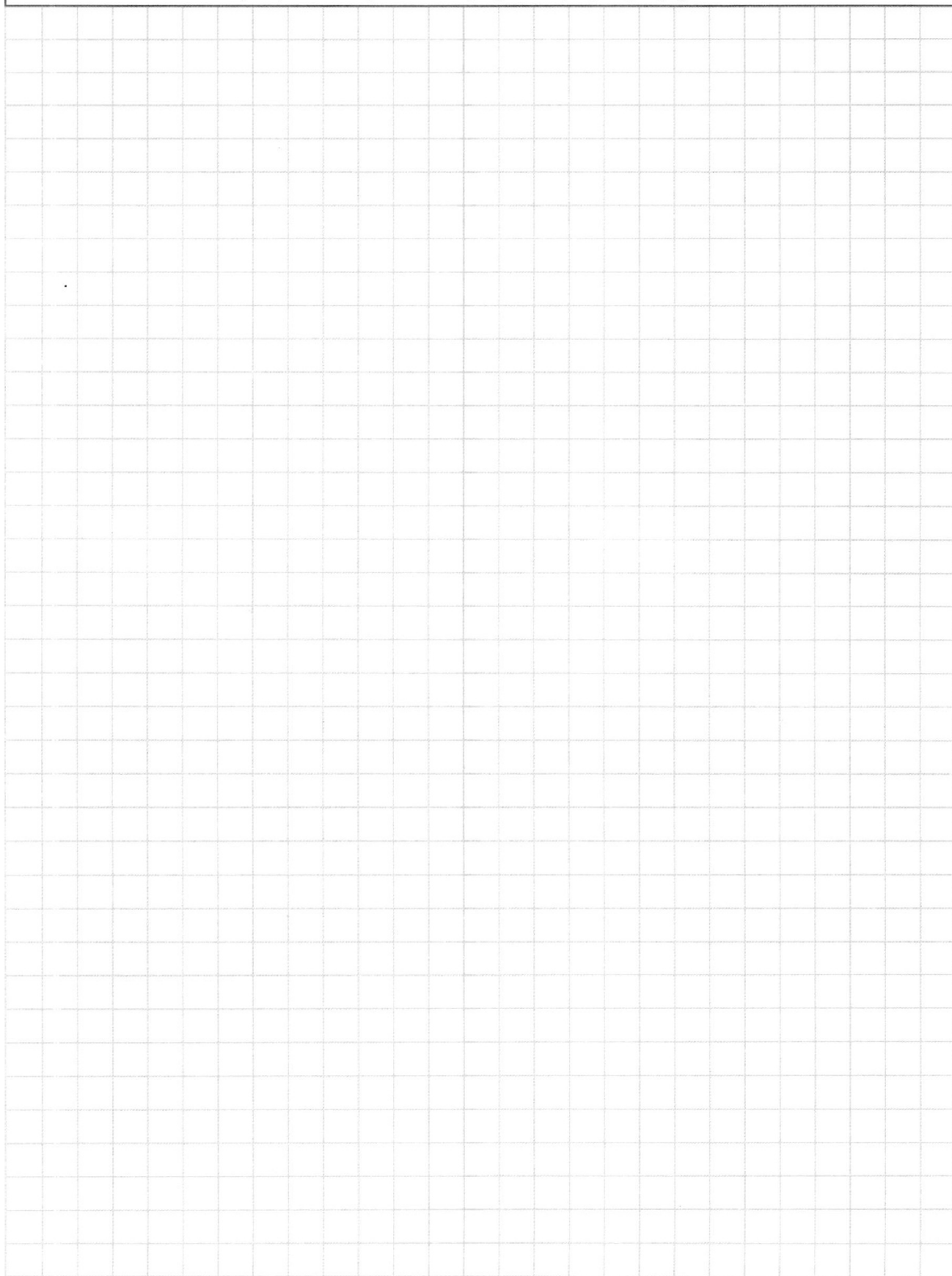
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a, b, c

$$ab: 2^8 3^{14} 5^{12}$$

$$bc: 2^{12} 3^{20} 5^{17}$$

$$ac: 2^{14} 3^{21} 5^{39}$$

$$\min(a, b, c)$$

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$$

$$b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$$

$$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 8$$

$$\beta_1 + \beta_2 \geq 14$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 \geq 12$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 \geq 12$$

$$\beta_2 + \beta_3 \geq 20$$

$$\gamma_2 + \gamma_3 \geq 17$$

$$\alpha_1 + \alpha_3 \geq 14$$

$$\beta_1 + \beta_3 \geq 21$$

$$\gamma_1 + \gamma_3 \geq 39$$

$$\alpha_1 \geq 8 - \alpha_2$$

$$\alpha_2 \geq 8 - \alpha_1$$

$$\beta_2 \geq 14 - \beta_1$$

$$\gamma_2 \geq 12 - \gamma_1$$

$$\alpha_3 \geq 4 + \alpha_1, \quad \alpha_1 + 8 - \alpha_1 + 4 + \alpha_1 \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$\beta_3 \geq 6 + \beta_1, \quad 12 + \alpha_1 \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$\gamma_3 \geq 5 + \gamma_1$$

$$\alpha_1 + 4 + \alpha_1 \geq 14$$

$$\alpha_1 \geq 5$$

$$\beta_1 + 6 + \beta_1 \geq 21, \quad 2\beta_1 \geq \frac{21}{2}; \beta_1 \geq 11$$

$$\gamma_1 + 5 + \gamma_1 \geq 39$$

$$2\gamma_1 \geq 34, \gamma_1 \geq 17$$

$$\alpha_1 = 5, \quad \gamma_1 = 17$$

$$\beta_1 = 11$$

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 \geq 12 \\ \gamma_1 + \gamma_3 \geq 39 \\ \Rightarrow \gamma_2 + \gamma_3 \geq 17 \end{cases}$$

$$2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 34$$

$$2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 55$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 17$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 28$$

$$\gamma_1 + \gamma_3 = 39$$

$$2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$$

$$2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \geq 68$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 34$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2$$

$$\gamma_1 + \gamma_3 = 39$$

$$\gamma_1 = 39 - \gamma_3$$

$$\gamma_1 + \gamma_2$$

$$\gamma_1 \geq 12 - \gamma_2$$

$$39 + 29 = 68$$

$$\gamma_2 \geq 12 - \gamma_1$$

$$\gamma_3 \geq 39 - \gamma_1$$

$$51 - 2\gamma_1 \geq 17$$

$$34 \geq 2\gamma_1, \gamma_1 \leq 17$$

$$\begin{array}{r} 51 \\ -17 \\ \hline 34 \end{array}$$

$$39 - \gamma_3 + \gamma_2 \geq 12$$

$$\gamma_2 + \gamma_3 \geq 17$$

$$\gamma_2 - \gamma_3 \geq 17 - \gamma_3$$



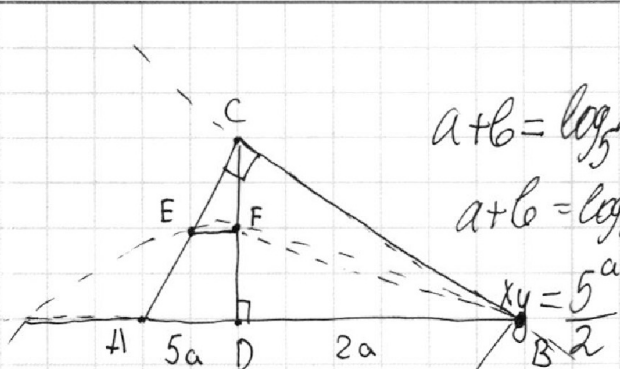
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x > 0, y > 0$$

$$x \neq 1, y \neq 1$$

$$a+b = \log_5 2xy$$

$$a+b = \log_5 2xy$$

$$xy = 5^{a+b}$$



$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\cos x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$x \in [0, \pi]$$

$$\cos x \in [0, 1]$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)$$

$$x \in [0, \pi]$$

$$5\pi - 10x = \pi - 2x$$

$$\cos x \in [-1, 1]$$

$$4\pi = 8x$$

$$x = \frac{4\pi}{8}, \frac{\pi}{2}$$

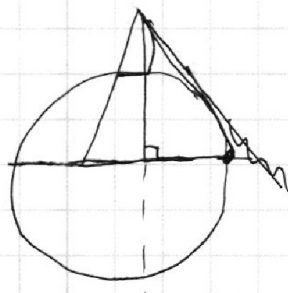
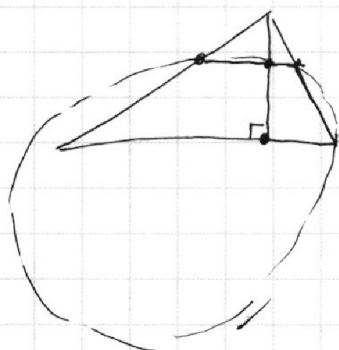
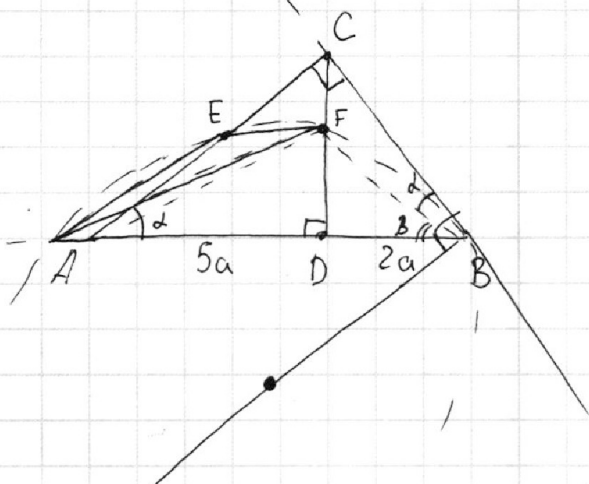
$$\arccos(\cos x) = x$$

$$x \in [0, \pi]$$

$$\log_5 2 = a$$

$$\log_5 \frac{1}{2} = a$$

$$b = \log_5 2$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a = ?$ $\exists b$ Чреш.

$$ax + 4b = 3y$$

$$x^2 + (y^2 - 20y + 100) = 36$$

$$x^2 + (y - 10)^2 = 36$$

$$3y = ax + 4b$$

$$y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$$

$$y = kx + \frac{10}{7}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + k^2x^2 + \frac{20}{7}kx + \frac{100}{49} = 1$$

$$(k^2 + 1)x^2 + \frac{20}{7}kx + \frac{51}{49} = 0$$

$$y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$y = \frac{\sqrt{51}}{7}x + \frac{10}{7}$$

$$y =$$

$$\begin{array}{r} 75 \\ 2 \\ 24 \\ \times 150 \\ \hline 120 \\ + 24 \\ \hline 3600 \end{array}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + \frac{51}{49}x^2 + \frac{20\sqrt{51}}{49}x + \frac{100}{49} = 1$$

$$100x^2 + 20\sqrt{51}x + 51 = 0$$

$$(10x + \sqrt{51})^2 = 0$$

25.

$$\begin{array}{r} 3^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \\ 150 \\ \times 24 \\ \hline 60 \\ + 30 \\ \hline 3600 \end{array}$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{10}} = \frac{5}{7}$$

$$10 - \frac{10}{7} = \frac{60}{7}$$

$$\frac{60}{7} - \frac{10}{7} = \frac{50}{7}$$

$$\sin \alpha = \frac{6 \cdot 7}{60} = \frac{7}{10}$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$$

150

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$$

$$a = -b$$

$$f(a) + f(b) = 0$$

$$\frac{1}{5^4}$$

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \frac{4}{3} \cdot \log_{2x} 5 - 3$$

$$f(b) + 13 = 0$$

$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3$$

$$a = \log_5 2x$$

$$b = \log_5 y$$

$$\log_5^4 y + 4\log_5 y = -\frac{1}{3}\log_5 3$$

$$f(a) - 13 = 0$$

$$f(b) + 13 = 0$$

$$3a^5 - 9 = 4 - 9a$$

$$a \neq 0$$

$$b \neq 0$$

$$\log_5 y + 4\log_5 y$$

$$\log_5 y \neq 0$$

$$y \neq 1$$

$$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} + \frac{1}{3\log_5 y} + 3 = 0$$

$$3a^5 + 9a - 13 = 0$$

$$3b^5 + 12 + 1 + 9b = 0$$

$$ab = \log_5 xy > 0$$

$$3b^5 + 9b = -13$$

$$3b^5 + 13 + 9b = 0$$

$$a + b = \log_5 2xy$$

$$3\log_5^5 y + 12 + 1 + 9\log_5 y = 0$$

$$3(a^5 + b^5) + 9(a + b) = 0$$

$$5^{a+b}$$

$$3\log_5^5 y + 9\log_5 y + 13 = 0$$

$$(a^5 + b^5) + 3(a + b) = 0$$

$$\frac{5^{a+b}}{2} = xy$$

$$\log_5^5 y$$

$$3a^5 + 9a - 13 = 0$$

$$(a + b)(a^4 - ab^3 + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$b^4 + \frac{4}{b} + \frac{1}{3b} + 3$$

$$a^5 + 3a + b^5 + 3b = 0$$

$$a = -b$$

$$5^0 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}$$

$$a(a^4 + 3) = -b(b^4 + 3)$$

$$a = b \rightarrow \log_5 2x$$

$$f(a) = -f(b)$$

$$a = b$$

$$f(x) = x(x^4 + 3) = x^5 + 3x$$

$$f(a) + f(b)$$

$$a^5 + b^5 + 3(a + b)$$

$$x(x^4 + 3) = 0$$

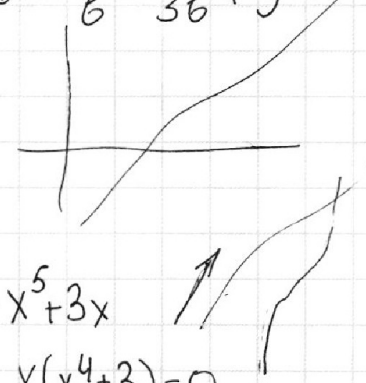
$$f(a) + f(b) = 0$$

$$f(a) = -f(b)$$

$$x \sim -x$$

$$f(x) = x^5 + 3x$$

$$f(-x) = -x^5 - 3x = -(x^5 + 3x)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$ab: 2^8 3^4 5^{12}$$

$$\overbrace{abc}^{14} = 2^{14}$$

$\min(a, b, c)$

abc

$$b_c: 2^{12} 3^{20} 5^{17}$$

$$8+12+14=34$$

abc : $2^{14} \underline{3^{21}} 5^{39}$

20

$$ac: 2^{14} 3^{21} 5^{39}$$

328 17 5

27240m

$$a=19 \quad c=20$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2$$

$$abc =$$

$$2^{17} \quad 3^{28} \quad 5^{39}$$

$$abc = \overset{17}{2} \cdot \overset{28}{3} \cdot \overset{39}{5}$$

$$17 + 17 + 39 = 29 + 39 = 68$$

34

асъз ас

539

abc: $2^{14} 3^{21} 5^{39}$

2¹⁴

$$a = 5^{19}$$

abc^2

$$ab = k \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$b_c = p \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$ac = 9 \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$a_p = \sqrt{k_p q_p} \sqrt{3k_p q_p} \cdot 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^7$$

$$c_k = \sqrt{3kpg} \cdot 2^{19} \cdot 3^{13} \cdot 5^{22}$$

$$a^2 b^2 c^2 = k p q \cdot 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$$

$$abc = \sqrt[k]{k p q} \cdot 2^{17} \cdot 5^{34} \cdot \sqrt[2^3]{2^3} \cdot 3^{27}$$

$$6q \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} = \sqrt{3kpq} \cdot 2^{17} \cdot 5^{34} \cdot 3^{24}$$

$$695^5 = \sqrt[5]{3Kpg} \cdot 2^3 \cdot 3^6$$

$$a = 5^{19} \cdot 2^7 \cdot 3^2$$

$$b =$$

$$C = 520.912$$

$$b = \frac{\sqrt{3Kpq} \cdot 23.36}{q \cdot 55}$$

$$2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$d_1 + d_2 + d_3 = k$$

$$d_1 + d_2 \geq 8$$

$$d_2 + d_3 \geq 12$$

$$d_1 + d_3 \geq 14$$

$$\underline{d_1 + d_2 + d_3 \geq 17}$$

Пример:

$$d_1 = 5$$

$$d_2 = 3$$

$$d_3 = 9$$

$$b_1 + b_2 + b_3 \geq \frac{55}{2} = 27,5$$

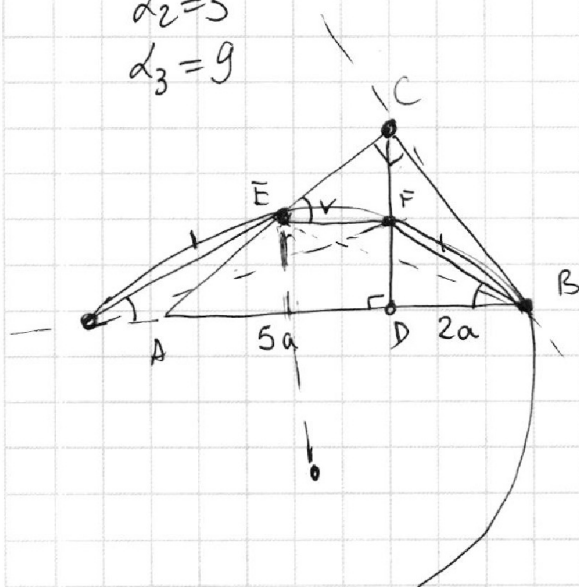
$$b_1 + b_2 + b_3 = 28$$

Пример. 7 7 14 29

~~Всего~~ 7+7 68

$$7 + 19$$

$$19 + 7 = 26$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

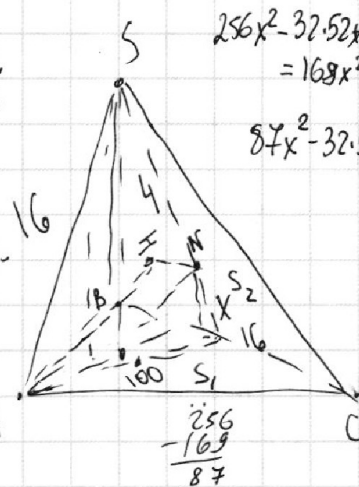
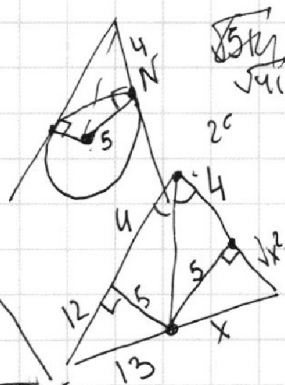
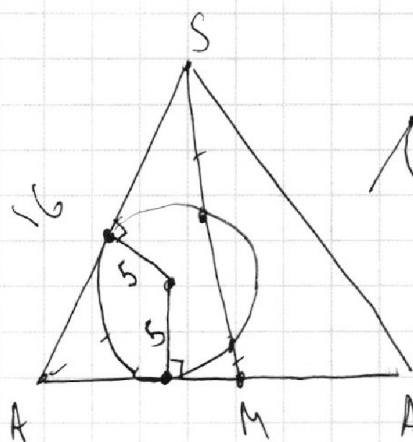
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$256x^2 - 32 \cdot 52x + 52^2 = 169x^2 - 169 \cdot 25$$

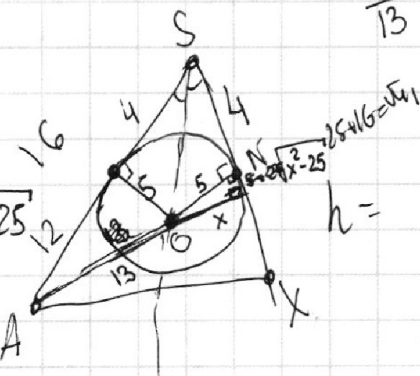
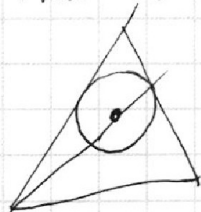
$$87x^2 - 32 \cdot 52x$$

$$\frac{16}{13} = \frac{4 + \sqrt{x^2 - 25}}{x}$$

$$\frac{16}{4 + \sqrt{x^2 - 25}} = \frac{13}{x}$$

$$16x = 52 + 13\sqrt{x^2 - 25}$$

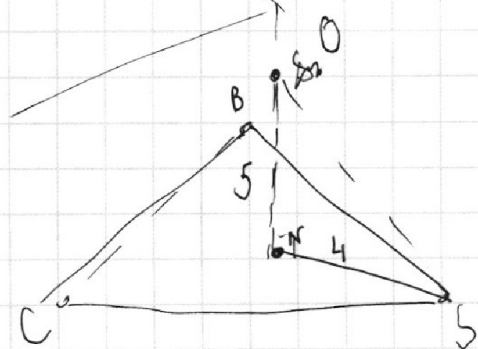
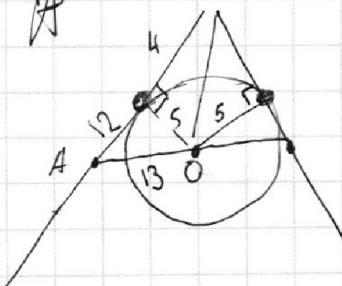
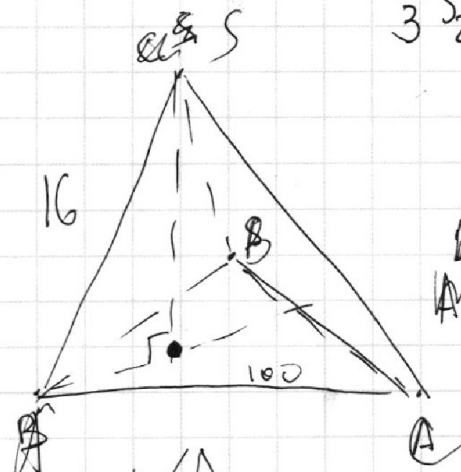
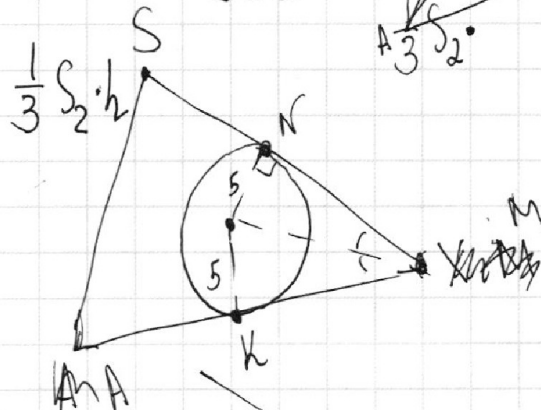
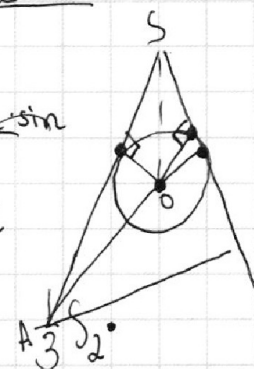
$$256x^2 - 16 \cdot 2 \cdot 52 + 52^2 = 169x^2 - 169$$



$$x = \frac{2S_{ABC} \sin \angle C}{3}$$

$$\frac{2S_{ABC} \sin \angle C}{3}$$

$$V = \frac{2S_1 S_2 \sin \angle C}{3BC}$$



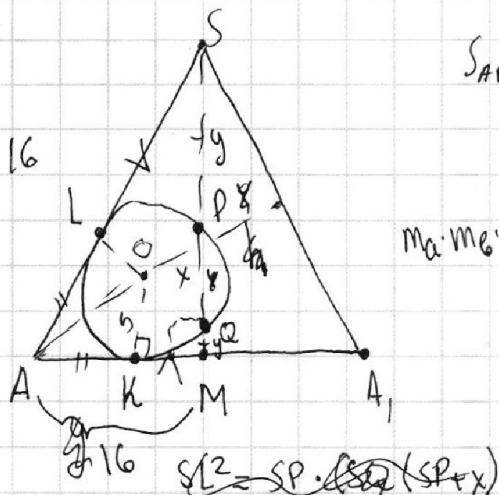
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

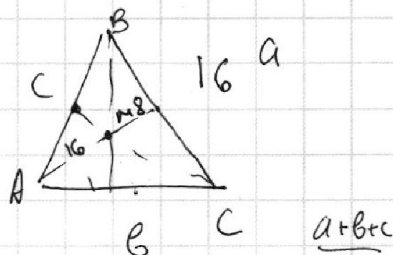
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{ABC} = 100$$

$$m_a \cdot m_b \cdot m_c =$$



$$\frac{1}{8} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

$$S_{\triangle ABC}$$

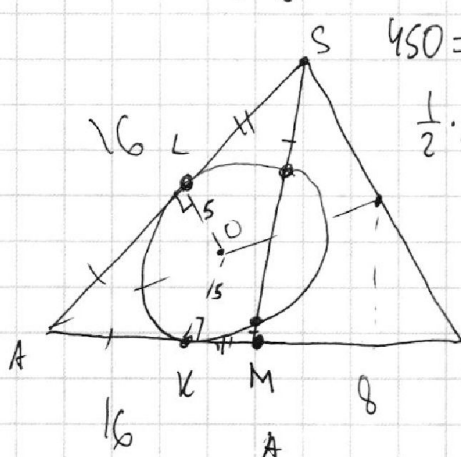
$$p(p-a)(p-b)(p-c) = 100$$

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$$

$$100$$

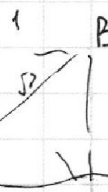
$$SL^2 = y \cdot (y+x)$$

$$KM^2 = y \cdot (y+x)$$



$$450 = 24(m_a m_b) + m_b m_c$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$



$$50 = \frac{1}{2}$$

$$S = 100$$

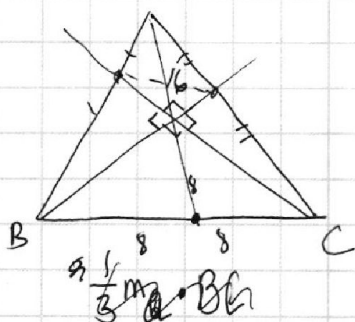
$$\frac{100}{6}$$

$$m_a = 24, m_b = 24$$

$$\frac{2}{3} m_b m_c$$

$$\frac{3}{4} S = \frac{1}{2} m_b m_c$$

$$m_b m_c =$$



$$\frac{100}{6}$$

$$\frac{1}{8} m_b m_c = \frac{100}{6}$$

$$m_b m_c = 100$$

$$m_b m_c = 50$$

$$\frac{1}{2} C \cdot m_b = 50$$

$$450 = 24m_a + 24m_b + m_b m_c$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} m_b \cdot \frac{2}{3} m_c + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} m_a \cdot \frac{2}{3} m_c + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} m_a \cdot \frac{2}{3} m_b = 100$$

$$\frac{2}{9} (m_b m_c + m_a m_c + m_a m_b) = 100$$

$$\frac{2}{9} (m_b m_c + 24m_c + 24m_b) = 100$$