



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(N) Дано: a, b, c - натуральные числа: $ab : 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$; $bc : 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$;
 $ac : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$.

Согласно определению делимости запишем ($a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow x, y, z \in \mathbb{N}$), где x, y, z - это

$$\begin{aligned} ab &= x \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \\ bc &= y \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \\ ca &= z \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} abc &= \sqrt{ab \cdot bc \cdot ac} = \sqrt{x y z} \cdot 2^{\frac{8+12+14}{2}} \cdot 3^{\frac{14+20+21}{2}} \cdot 5^{\frac{12+17+39}{2}} = \\ &= \sqrt{x y z} \cdot 2^{18} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34} = \sqrt{3 x y z} \cdot 2^{18} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34} \end{aligned}$$

$3xyz$ - полный квадрат, Примем $3xyz : 3 \Rightarrow 3xyz : 9$ (это полн. кв., т.к. числа a, b, c - натуральные). Итак $\min(3xyz) = 9$, т.е. $\sqrt{xyz} \in \mathbb{Z}$

Оценка abc : $abc \geq 2^{18} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$

Пример:

$$a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{17}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^7 \cdot 5^{12}$$

$$c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{22}$$

$$ab = 2^8 \cdot 3^{15} \cdot 5^{17} : 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

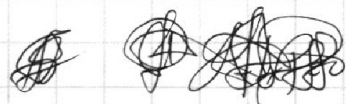
$$bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{22} : 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$ac = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} a, b, c &\text{ удовл. укл.} \\ abc &= 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39} \\ \Rightarrow \min(abc) &= 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39} \end{aligned}$$

Ответ. $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

Вариант



$$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

a-?

$$\sin^2 ax + 1 = \cos x$$

уравнение равно 1 переменной.

$$(98 - 101 + 102 - 2h + 2x)(1 - 2h + 2x)$$

$$\sin^2 x +$$

$$\sin^2 ax + 1 = \cos x$$

$$0 = 8h + 12 - x =$$

$$= 12 - x$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 12 \\ \hline 30 \\ + 30 \\ \hline 60 \\ + 15 \\ \hline 75 \end{array}$$

$$28 - 20 = 8$$

$$18 - 15 = 3$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{56} &= \frac{2}{56} \\ \frac{2}{15+20+11} &= \frac{2}{46} \\ x+y &= 12 \\ z &= 20 \\ h &= 15 \end{aligned}$$

$$20$$

$$14$$

$$\begin{aligned} x+y &= 12 \\ z &= 20 \\ h &= 15 \end{aligned}$$

$$65 + 11 \geq 2 + h + x$$

$$2 + x \geq 39$$

$$\begin{aligned} x+y &\geq 12 \\ y+z &\geq 17 \\ z+x &\geq 39 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z+x &= 39 \\ x-y &= 5 \end{aligned}$$

$$467$$

$$17+5=22$$

$$17+5+12=34$$

$$\begin{aligned} a &= 2 \cdot \frac{14 \cdot 8 - 12}{15+21-20} \cdot 3 \cdot \frac{2}{12+39-17} \cdot 5 \cdot \frac{2}{12+39-17} \end{aligned}$$

$$30+29=59$$

$$y+z=17$$

$$x+y=12$$

$$z+x=39$$

$$28 \cdot 3^{14}$$

$$28 \cdot 3^{15} \cdot 5^{12} = a8$$

$$8c = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$8c = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Поша QR-код не доступен!

☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
1	2	3	4	5	6	7	

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

На одной странице можно оформлять только одну задачу.



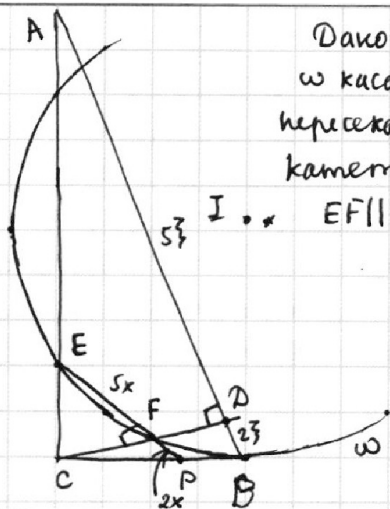
МФТИ

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2



Дано: $\triangle ABC$ - н/у, AB - гипотенуза;
ω касается стороны BC в точке B ;
пересекает высоту CD в т. Q и пересекает
катет AC в точке E .
Найти: $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$.

Решение. ω пересекает катет $\Rightarrow$ центр
I окр-ти ω и точка A лежат по
одну ст. отн. CB .
по свойству ||-ых прямых катетов.

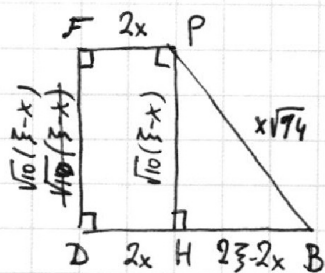
$$1) EF \parallel AB, CD \perp AB \Rightarrow EF \perp CD \Rightarrow \angle CFE = 90^\circ$$

2) Пусть $EF \cap CB = P$, по теореме о квадрате касательной для касат. PB ,
провед. из т. P к окр-ти ω имеем: $PB = \sqrt{PF \cdot PE}$.

3) Пусть $AD = 5\sqrt{3}$; Тогда по условию задачи $DB = 2\sqrt{3}$. CD - высота н/у $\triangle$ -ка,
которая провед. к гипот. н/у $\triangle CBA \Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{5\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}} = \sqrt{10} \sqrt{3}$

4) В $\triangle CFE$ и $\triangle CDA$: $\angle CFE = \angle CDA = 90^\circ$; $\angle ACD$ - общ. $\Rightarrow \triangle CFE \sim \triangle CDA \Rightarrow \frac{EF}{CD} = \frac{CF}{CA}$
В $\triangle CFP$ и $\triangle CDB$: $\angle CFP = \angle CDB = 90^\circ$; $\angle PCB$ - общ. $\Rightarrow \triangle CFP \sim \triangle CDB \Rightarrow \frac{FP}{DB} = \frac{CF}{CB}$
Тогда $\frac{EF}{AD} = \frac{FP}{DB} \Rightarrow$ если $EF = 5x$, то $FP = \frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} \cdot 5x = 2x \Rightarrow PB = \sqrt{PF \cdot PE} = \sqrt{2x \cdot 7x} = \sqrt{14}x$

5) Заметим, что CF - выс. н/у $\triangle CFP$, провед. к гип. $\Rightarrow CF = \sqrt{EF \cdot FP} = x\sqrt{10}$
Заметим, что $PFDB$ - н/у трапец. ($FP \parallel DB$), провед. в ней выс. PH к
больш. осн. ($\sqrt{3} > x$ т.к. $PE < AB$) (DB). $FD = CD - CF = \sqrt{10}(\sqrt{3} - x)$



Тогда $\triangle PFH$ - прямоугольный по построению,

$$HB = DB - DH = DB - FP = 2\sqrt{3} - 2x$$

$$PH = FD = \sqrt{10}(\sqrt{3} - x), \triangle PHB - \text{н/у} (\angle PHB = 90^\circ, \text{т.к. } PH - \text{выс.})$$

$$\Rightarrow \text{теор. Пифагора: } PB^2 = PH^2 + HB^2$$

$$14x^2 = 10(\sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3}x + x^2) + 4(\sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3}x + x^2)$$

$$14x^2 = 14(\sqrt{3} - x)^2; x^2 = (\sqrt{3} - x)^2 \quad (x - \sqrt{3} + x)(x + \sqrt{3} - x) = 0$$

$$\sqrt{3}(2x - \sqrt{3}) = 0 \quad | : \sqrt{3} \neq 0, x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} CD \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \sqrt{3} \cdot 7\sqrt{3}$$

$$S_{CFE} = \frac{1}{2} CF \cdot EF = \frac{1}{2} x\sqrt{10} \cdot 5x$$

$$(\angle CFE = 90^\circ)$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CFE}} = \frac{7}{5} \left(\frac{\sqrt{3}}{x} \right)^2 = \frac{28}{5}$$

$$\text{Ответ: } \frac{28}{5}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4

а-?, найдется значение параметра b , при котором система

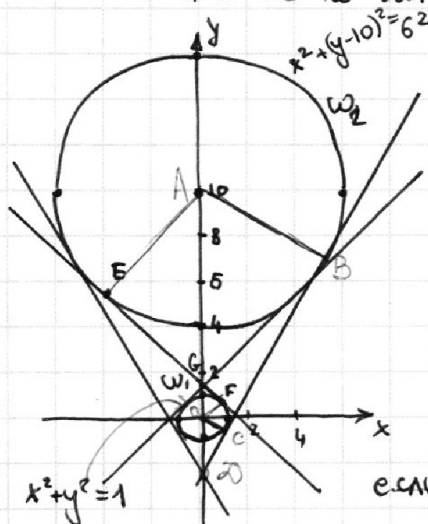
$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$
 имеет ровно 4 решения.

Первое уравнение системы: $y = \frac{ax + 4b}{3}$ - линейная ф-я, пр-к - прямая.

Эта ф-я задает ли-во прямых с угловым коэф a (кроме вертикаль-ной прямой), проходящих через точку $(0; \frac{4b}{3})$ (если $x=0$, то $y = \frac{4b}{3}$)

2-ое уравнение: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-10)^2 = 36 \end{cases}$ 2 окр-ли; $\omega_1(O(0;0); R_1=1)$
 равносильно $\omega_2(A(0;10); R_2=6)$
 совокупн.

ω_1 и ω_2 не им. общ. точек, потому что $AO = 10 > R_1 + R_2$



Проведем 2 общие касательные ω_1 и ω_2 , они пересекаются в точке на линии центров окружностей (точка D) и общие внутренние касательные этих двух окр.

FE - одна из внутр. касат., $EF \cap AO = G$

$d_y; d_y$ - ординаты точек G и D соотв.

если $\frac{4b}{3} \leq d_y$, то это зн. подходит усл.

Прямая с окр. пересекается не более чем в двух точках $\Rightarrow$ каждая для того чтобы было равно 4 реш.

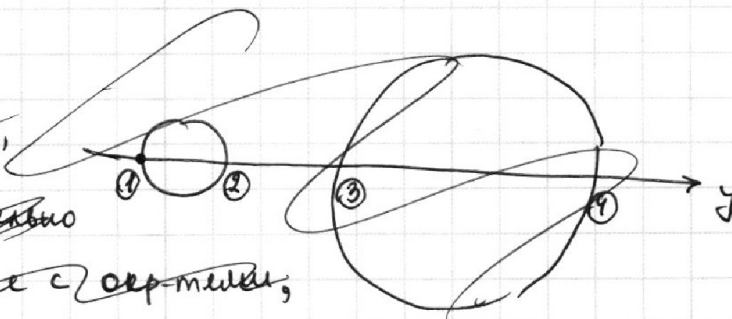
нужно, чтобы прямая, заданная $y = \frac{ax + 4b}{3}$ пересекала каждую окр. дважды.

если $d \leq \frac{4b}{3}$

возьмем $a=10^{15}$ и заметим, что

$y = \frac{10^{15}x + 4b}{3}$ обязательно

будет иметь 4 т. перес с окр-лими, потому что



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

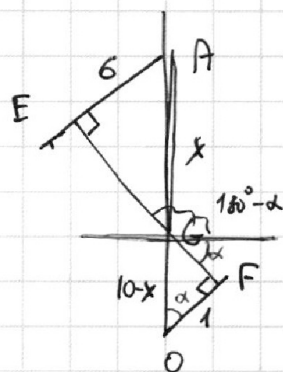
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Если прямая $y = \frac{ax+4b}{3}$ при некоторых a, b пересекает оар. ω_1 ,
то (6 2 м.), то она обязательно пересечет и оар. ω_2 в
двух точках N5 угадали.

Пусть $-k_1$ - угл. коэф. Нормаль прямой EF. Усл. задачи выполн,
если $a \in [-k_1; k_1]$



$AE \perp EF$ и $FO \perp EF$ как радиусы, перпенд. в т.кас.

$\triangle AEG \sim \triangle OFG$ т.к. $\angle E = \angle F = 90^\circ$, $\angle AGE = \angle OFG$ (как верт.)

Тогда: $\frac{x}{6} = \frac{10-x}{1}$; $x = 60 - 6x$; $x = \frac{60}{7}$
 $10 - x = \frac{10}{7}$

$\sin \alpha = \frac{GF}{OF}$ $\sin \alpha = GF = \sqrt{60^2 - OF^2} = \sqrt{\frac{100}{49} - 1} = \frac{\sqrt{51}}{7}$

$\tan \alpha = \frac{GF}{OF} = \frac{\sqrt{51}}{7} \Rightarrow k_1 = -\tan \alpha = -\frac{\sqrt{51}}{7}$

Ответ: $[-\frac{\sqrt{51}}{7}; \frac{\sqrt{51}}{7}]$.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$N5 \left\{ \begin{aligned} \log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 &= \log_{8x^3} 625 - 3 \\ \log_5^4 y + 4 \log_y 5 &= \log_{y^3} 0,2 - 3 \end{aligned} \right.$$

(*)

ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x > 0 \\ 2x \neq 1 \end{cases}$$

$8x^3 > 0$ - следует из усл. $2x > 0$

$8x^3 \neq 1$ - следует из усл. $2x \neq 1$

$$y > 0$$

$$y \neq 1$$

$y^3 > 0$ - следует из усл. $y > 0$

$y^3 \neq 1$ - следует из усл. $y \neq 1$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \in (0; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty) \\ y \in (0; 1) \cup (1; +\infty) \end{cases}$$

Пусть $a = \log_5(2x) \Rightarrow \frac{1}{a} = \log_{2x}(5)$; $\log_{8x^3}(625) = \frac{4}{3} \log_{2x} 5 = \frac{4}{3a}$

$b = \log_5(y)$; $\log_y 5 = \frac{1}{b}$; $\log_{y^3} 0,2 = -\frac{1}{3} \log_y 5 = -\frac{1}{3b}$; $a, b > 0$ $x y = 5^a \cdot 5^b = 5^{a+b}$

Система примет вид:

$$\begin{cases} a^4 - 3 \cdot \frac{1}{a} = \frac{4}{3a} - 3 & (1) \\ b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3 & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим для начала уравнение (2).

$$b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3 \quad | \cdot 3b > 0$$

$$b^5 + 12 = -1 - 9b$$

$$b^5 + 9b + 13 = 0 \quad \text{т.е. уравнение } b^5 + 9b + 13 = 0 \text{ не имеет решений}$$

Ну и получается, что не существует такого b , чтобы равенство а) выполнялось. $\Rightarrow$ у системы (*) решений нет вообще.

Ответ: таких пар x, y , удовлетворяющих одновременно обоим равенствам не существует.

$$\begin{cases} b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3 \\ a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^4 + \frac{13}{3b} + 3 = 0 \quad | 3b \neq 0 \\ a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0 \quad | 3a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^4 + a^4 + \frac{13}{3}(a+b) = 0; \quad (b^2 - a^2)(b^2 + a^2) + \frac{13}{3}(a+b) \frac{1}{ab} = 0;$$

$$(a+b)((b-a)(a^2+b^2) + \frac{13}{3ab}) = 0;$$

$$\begin{cases} f(a+b) = 0 \\ g((b-a)(a^2+b^2)) = -\frac{13}{3ab} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5. Продолжение (условия на a, b : $ab \neq 0$)

$$\begin{cases} a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0 \\ b^4 + \frac{13}{3b} + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1) a^4 + b^4 + 6 - \frac{13}{3} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left[\frac{b-a}{ab} > 0 \right] \mid \cdot (a^2 b^2) > 0 \Rightarrow \boxed{ba(b-a) > 0} \end{cases}$$

м.к. $ab \neq 0$

$$2) a^4 - b^4 - \frac{13}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 0; (a-b)(a+b)(a^2+b^2) - \frac{13}{3} \cdot \frac{a+b}{ab} = 0;$$

$$\frac{(a+b)}{ab} \left(\frac{13}{3} + (b-a)ab(a^2+b^2) \right) = 0 \Rightarrow \boxed{a+b=0} \text{ единств. случай.}$$

> 0 м.к. $\frac{13}{3} > 0, a^2+b^2 > 0$ м.к. $ab \neq 0, (ab \neq 0)$
 $(b-a)(ab) > 0$

Найдем ли такие a, b , что $a+b=0$?

Р-и ур-ние $\textcircled{*}$ при $b \leq 0$; заменим обе части ур. на $b \geq 0$

$$b^5 + \frac{13}{3}b \cdot \frac{1}{b} + 3b = 0; \quad 3b^5 + 13 + 9b^2 = 0$$

$$f_1(b) = 3b^5; \quad f_2(b) = 9b \text{ на } (-\infty; 0); \quad 13 = \text{const} \rightarrow f(b) = 3b^5 + 9b + 13 \text{ на } (-\infty; 0).$$

$$\text{Пример } f(-2) = -3 \cdot 32 + 13 - 9 \cdot 2 < 0; \quad f(4) = 13 - 9 - 3 > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ корень b_0 есть у ур-ния на $(-2; -1)$ т.к. $f(x)$ возр. и непрерывна на этом от.

Т.е. нашлось b_0 : $b^4 + \frac{13}{3b} + 3 = 0$. Возьмем $a_0 = -b_0$ и заметим, что ур-ние $a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0$ становится тождеством при b_0 : $b_0^4 \neq \frac{13}{3}b + 3 = 0$

Т.е. $a+b=0$ возможно! Других вариантов, к сожалению, нет.

$$xy = 5^{a+b} = 5^0 = 1.$$

Ответ: 1

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

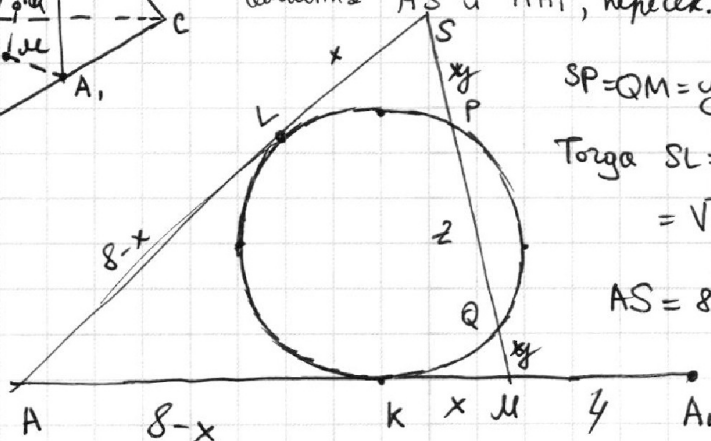
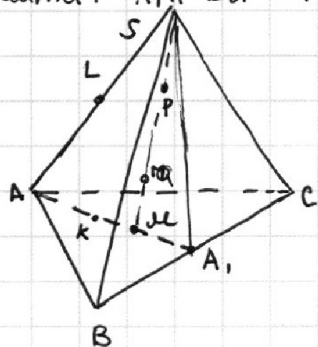
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7 Дано: $SABC$ - треугольная пирамида; AA_1, BB_1, CC_1 - медианы $\triangle ABC$; M - т. пересечения медиан $\triangle ABC$; Ω кас. $[AS]$ в т. L ; Ω кас. $(ABC) = K$; $K \in AM$; $\Omega \cap [SM] = P, Q$; $SP = MQ$; $S_{ABC} = 100$; $SA = BC = 16$

а) Найти: $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = ?$

Пусть: $[SM]$ содержит P для определения

P -м сечение Ω т.т. AKS . Это окр., которая касается AS и AA_1 , пересек. SM в P и Q



$$SP = QM = y; PQ = z$$

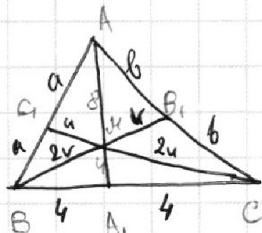
$$\text{Тогда } SL = \sqrt{SP \cdot SQ} = \sqrt{y(y+z)} = \sqrt{MQ \cdot MP} = KM,$$

$$AS = 8 \Rightarrow AL = 8 - x = AK \quad (\text{отр. кас.})$$

$$\text{Тогда } AM = 8 - x + x = 8;$$

$$MA_1 = \frac{8}{2} = 4$$

(медианы $\triangle$ дел. т. перес. пополам - вот и 2:1, считая от верш.)

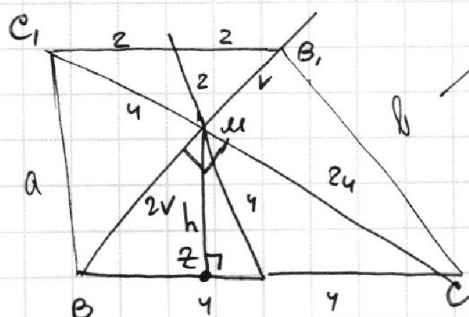


$$CM = u \Rightarrow MC = 2u;$$

$$BM = 2v \Rightarrow MB_1 = v$$

в $\triangle$ -е MB_1C : $MA_1 = BA_1 = AC \Rightarrow \angle BMC = 90^\circ$,

Тогда по теор. Пифагора: $MB^2 + MC^2 = 4v^2 + 4u^2 = 8^2$; $u^2 + v^2 = 16$



$$a = \sqrt{u^2 + 4v^2}; b = \sqrt{v^2 + 4u^2}$$

$S_{BMC} = \frac{1}{3} S_{ABC}$ (медианы делит $\triangle$ на 6 равновеликих)

$$\frac{1}{2} BM \cdot MC = \frac{100}{3}; \quad \frac{200}{3} = 4uv \Rightarrow \begin{cases} uv = \frac{50}{3} \\ u^2 + v^2 = 16 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N7. Продолжение.

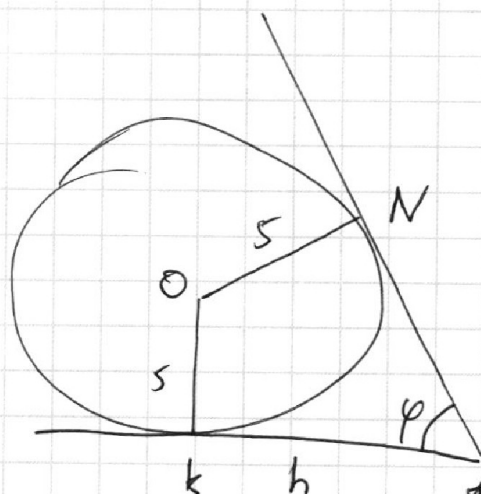
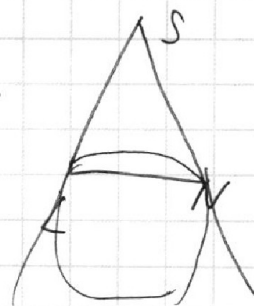
$$\begin{cases} uv = \frac{50}{3} \\ u^2 + 2uv + v^2 - \frac{100}{3} = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} uv = \frac{50}{3} \\ (u+v)^2 = \frac{148}{3} \end{cases} \quad \begin{matrix} u+v \\ u>0, v>0 \end{matrix}$$

$$S_{uv} = 150$$

Произв. грани пирамиды: $S_{uv} \cdot 12 = 150 \cdot 12 = 1800$.

б) Оар. касс. грани $\Rightarrow SN = SL = 4 \Rightarrow x = 4$.

Р-м сечение шар сферой пл-стью $KMNKNZ$



, $(ZKN) \perp$ ребру BC по
послр.

Тогда O лежит в этой пл.

$$KZ = kZ = h =$$

$$= \frac{2u \cdot 2v}{BC} = \frac{200}{8} =$$

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{OK}{KZ} = \frac{5}{\frac{25}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$= \frac{50}{3 \cdot 2} = \frac{25}{3} \text{ (выс. н/у } \triangle BCM)$$

cos Тогда $\varphi = 2 \arctg \frac{3}{5}$ — это и есть линейный угол
двугр угла

Ответ: а) 1800

$$\text{б) } 2 \arctg \frac{3}{5}$$



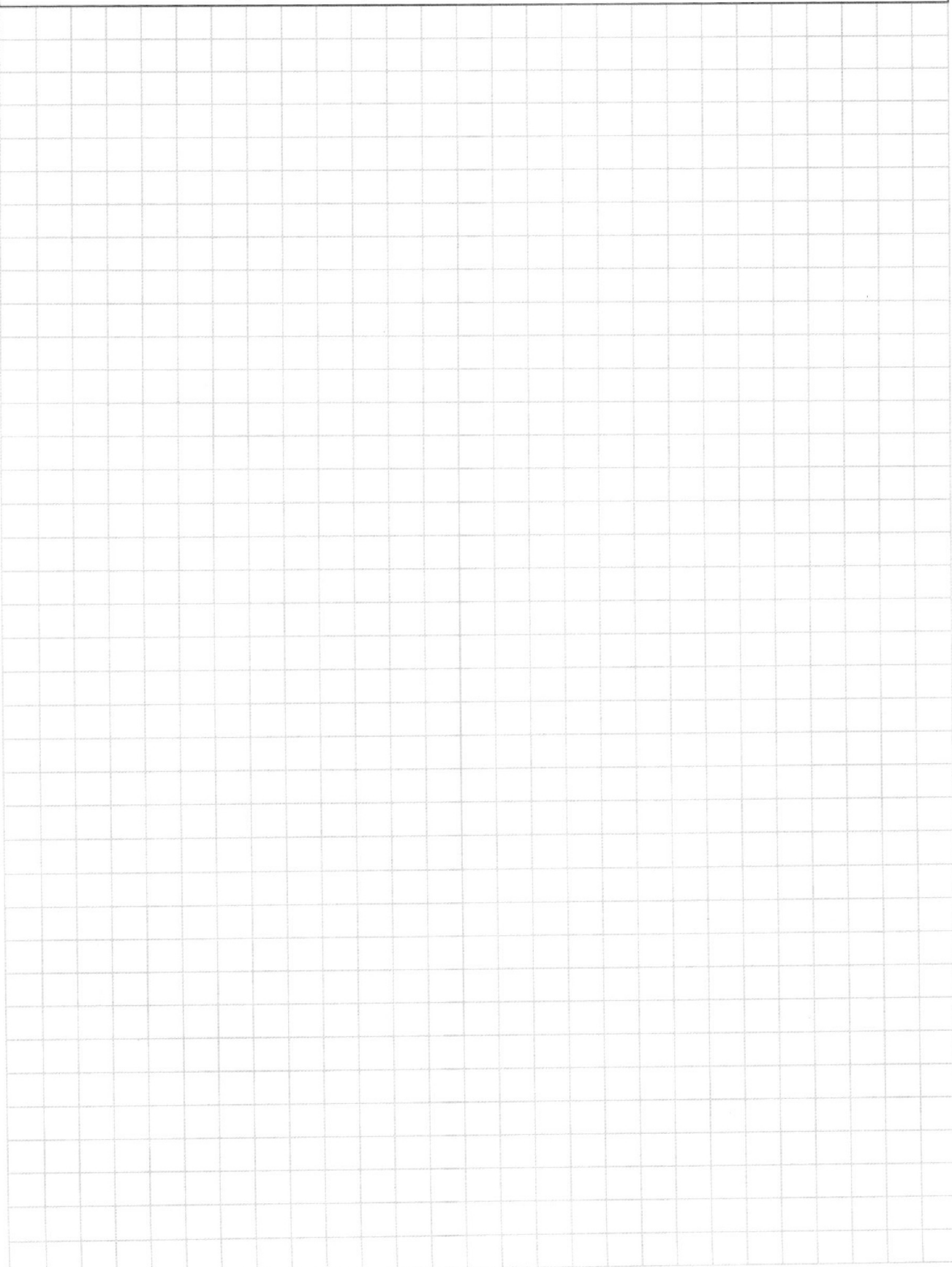
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$14+20+21 = 55$
 $\frac{45}{2}$
 $\frac{24+21}{2} = 22.5$
 $4+6+8 = 18$
 $4+10+10.5 = 24.5$
 27.5

$d(x) = ?$
 $68/2$
 $17+$
 $12+17+39$
 $29+39 = 28+40$
 68
 6
 $f = d\sqrt{4}$
 $2d \cdot 3d = \sqrt{10x - 10d}$
 4
 $5d$
 $3d$
 $2d$
 $d\sqrt{4}$
 $7d \sin \alpha + d\sqrt{4} = 7x \sin \alpha$
 $d(7 \sin \alpha + \sqrt{4}) = 7x \sin \alpha$

$$ab = k \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$bc = n \cdot 2^{12} \cdot 3^{30} \cdot 5^{17}$$

$$ac = m \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$abc = \sqrt{knm} \cdot 2$$

$$\sqrt{knm} \cdot 2^{4+6+7} \cdot 3^{7+15+\frac{21}{2}}$$

$$ab = 2^8$$

$$bc = 2^{12}$$

$$ac = 2^{14}$$

$$a^2 \cdot 2^{12} = 2^8 \cdot 2^{14}$$

$$a^2 = 2^{(4+7-12)/2}$$

$$a = 2^5$$

$$(2x-2d)^2 + (\sqrt{10x-10d})^2 = (d\sqrt{4})^2$$

$$4x^2 + 4d^2 - 4dx + 10x^2 + 10d^2 - 20xd = 4d^2$$

$$14x^2 - 24dx - 7d^2 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x \quad \text{вернее}$$

$$\arcsin t: t \in [-1; 1]; \arcsin \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$-5\pi \leq 10 \arcsin(\cos x) \leq 5\pi; \quad -5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi; \quad -3\pi \leq -2x \leq 7\pi; \quad x \in \left[-\frac{7\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\cos x \quad 10 \quad 1 \leq \cos x \leq 1$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$\arcsin(\cos x) + \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2}; \quad \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x.$$

$$\frac{\pi}{2} - 2x$$

$$f(x) = \arccos x; \quad g(x) = \arcsin x; \quad f(x) + g(x) = \frac{\pi}{2} \text{ если } x \in [0; 1].$$

$$\text{если } x \in (0; 1), \text{ то } \arcsin x + \arccos x = \pi/2 \quad \arcsin x = (\pi - \arccos x)$$

$$\arcsin x$$

$$\arccos$$

$$\text{если } \cos x \in [0; 1], \text{ то используем следующие равенства: } \cos(\arccos x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)$$

$$\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x) = \pi - 2x; \quad \arccos(\cos x) + \frac{\pi}{2} = 2x$$

$$\arccos x + \frac{\pi}{2} - \pi = \arcsin x$$

$$\text{если } x \in (0; \frac{\pi}{2}):$$

$$\arccos x \in -\frac{\pi}{2};$$

$$5\pi + \arccos$$

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$-5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi; \quad -6\pi \leq -2x \leq 4\pi; \quad -2\pi \leq x \leq 3\pi$$

$$\text{если}$$

$$2x + 10 \arcsin(\cos x) = \pi$$

$$f(x)$$

$$\arcsin$$

$$\arcsin x \text{ возрастает на}$$

$$\cos x. \text{ на интервале}$$

$$2x + 10 \arcsin(\cos x) = \pi$$

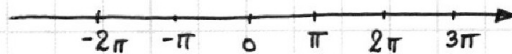
$$f(x) = 2 + 10 \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} \sin x =$$

$$= 2 + 10 \frac{|\sin x|}{\sin x}$$

$$f(x) = 2x + 10 \arcsin(\cos x)$$

Ищем произв.

$$\text{крит. точки } \sin x = 0; \quad x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$



Значения в крив. т:

$$f$$

$$y = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$y = 12\pi - 15\pi$$

$$y = 12\pi$$

$$12 \cdot \pi - 15\pi = 24 - 15 = 9$$

$$y = kx + b$$

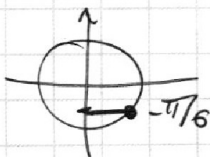
$$\begin{cases} -3\pi = k\pi + b \\ 9\pi = 2k\pi + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3\pi - 9\pi = -k\pi \\ b = -3\pi - k\pi \end{cases}$$

$$k = 12$$

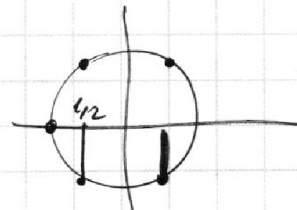
$$b = 9\pi - 12\pi = -3\pi$$

$$\pi = 12x - 15\pi; \quad 16\pi = 12x; \quad x = \frac{4\pi}{3}$$



$$\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - x$$

$$x = \pi - \frac{4\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$$





На одной странице можно оформить **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

Решение которой представлено на странице:

☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
1	2	3	4	5	6	7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Поня QR-кода недоступна!

МФТИ

$$\log_5(2x) - 3 \log_5 x = \log_5 8 \Rightarrow 625 - 3$$

$$(\log_5(y) + 4 \log_5 5 = \log_5 0.2 - 3$$

$$\log_5(2x) - \frac{3}{4} \log_5(2x) = \frac{3}{4} \log_5(2x) - 3$$

$$\log_5(y) + \frac{\log_5(y)}{4} = -\frac{3}{4} \log_5 y - 3$$

$$\left\{ \begin{aligned} a^{\frac{1}{4}} - \frac{a}{3} &= \frac{3}{4}a - 3 \\ b^{\frac{1}{4}} + \frac{b}{4} &= -\frac{3}{4}b - 3 \end{aligned} \right.$$

$$36^5 + 128 = -36^5 + 128 + 6^2 + 96 = 0$$

$$36^5 + 6^2 + 96 + 12 = 0$$

$$-3 + 1 - 9 + 12 //$$

$$(b^4 - a^4) + \frac{b}{4} + \frac{a}{8}$$

$$\frac{a}{3} \quad \frac{b}{4} + \frac{a}{8}$$

$$a^4 + b^4 + 6 + \left(\frac{36}{13} - \frac{36}{13} \right) = 0$$

$$\frac{2}{3}$$

$$\frac{36}{13} - \frac{36}{13} < 0$$

$$\frac{a}{4} > \frac{1}{8}$$

$$\frac{b-a}{2} > 0$$

$$(b-a)((b-a)^2$$

$$SP =$$

