



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~ 1 - продолжение

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq \frac{1}{2}(7+13+14) = \frac{1}{2} \cdot 34 = 17$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 26 \\ + 17 \\ \hline 43 \end{array}$$

$$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq \frac{1}{2}(11+15+17) = \frac{1}{2} \cdot 43 = 21.5 \text{ и}$$

$$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 22$$

т.е. $\beta_5 \geq 0$

$$\alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5 \geq \alpha_5 + \gamma_5 \geq 43$$

$$\text{т.е. } abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

пример, когда $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

$$\alpha_2 = 4; \beta_2 = 3; \gamma_2 = 10 \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 \geq 7; \beta_2 + \gamma_2 \geq 13; \alpha_2 + \gamma_2 \geq 14 \quad \textcircled{1}$$

$$\alpha_3 = 6; \beta_3 = 5; \gamma_3 = 11 \Rightarrow \alpha_3 + \beta_3 \geq 11; \alpha_3 + \gamma_3 \geq 17; \beta_3 + \gamma_3 \geq 16 \quad \textcircled{2}$$

$$\alpha_5 = 21; \beta_5 = 22; \gamma_5 = 0 \Rightarrow \alpha_5 + \beta_5 \geq 43; \alpha_5 + \gamma_5 \geq 43; \beta_5 + \gamma_5 \geq 43 \quad \textcircled{3}$$

$$k = m = n = 1$$

$$a = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{21}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^5$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{22}$$

поскольку верно, то условия
~~на~~ ab : что надо
 bc : что надо
 ac : что надо

$$\text{выполнены, } abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

оценка и пример есть

$$\text{Ответ: } 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~ 1 - начало

$$ab : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$
~~$$ab : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$~~

$$bc : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$ac : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$

~~$$ab = k \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$bc = m \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$ac = n \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$~~

$\nu_p(x)$ - степень
вхождения простого
числа p в разложение x .

$$a = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot 5^{\alpha_5} \cdot k, \text{ где } k \nmid 2, 3, 5$$

т.е. $\alpha_2 = \nu_2(a); \alpha_3 = \nu_3(a); \alpha_5 = \nu_5(a)$

$$b = 2^{\beta_2} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\beta_5} \cdot m, \text{ где } m \nmid 2, 3, 5$$

$$c = 2^{\gamma_2} \cdot 3^{\gamma_3} \cdot 5^{\gamma_5} \cdot n, \text{ где } n \nmid 2, 3, 5$$

$$abc = 2^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 3^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} \cdot 5^{\alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5} \cdot mnk \geq$$

$$\geq 2^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 3^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} \cdot 5^{\alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5}$$

при том условии:

$$\alpha_2 + \beta_2 \geq 7; \alpha_3 + \beta_3 \geq 11; \alpha_5 + \beta_5 \geq 14$$

$$\beta_2 + \gamma_2 \geq 13; \beta_3 + \gamma_3 \geq 15; \beta_5 + \gamma_5 \geq 18$$

$$\alpha_2 + \gamma_2 \geq 14; \alpha_3 + \gamma_3 \geq 17; \alpha_5 + \gamma_5 \geq 43$$

критерий

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2-продолжение ч
то есть $ED = \frac{3x}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} = 3x \cdot \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{3}}$

$$\text{а также } ED = \sqrt{30}x - \sqrt{30}Kx = \\ = \sqrt{30}x(1-K)$$

$$\frac{3\sqrt{10}x}{2\sqrt{3}} = \sqrt{30}x(1-K)$$

$$3\sqrt{10} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{10}(1-K)$$

$$2(1-K) = 1$$

$$1-K = \frac{1}{2}$$

$$K = \frac{1}{2}$$

из подобия

$$\text{Выходит, что } S(\triangle ECF) \stackrel{\downarrow}{=} \frac{1}{4} S(\triangle BCD) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{30}x \cdot 10x = \frac{5\sqrt{30}}{4} \cdot x^2$$

$$S(\triangle ACD) = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot \sqrt{30}x = \frac{3\sqrt{30}}{2} x^2$$

$$\frac{S(\triangle ECF)}{S(\triangle ACD)} = \frac{\frac{5\sqrt{30}}{4}}{\frac{3\sqrt{30}}{2}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{5 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{S(\triangle ACD)}{S(\triangle ECF)} = \frac{6}{5}. \text{ И это ответ.}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~ 2 - продолжение 3

$$\frac{\sqrt{\frac{3}{10}} \cdot \left(1 + \frac{16}{3}\right)}{1 - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} \cdot \frac{16}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}} = \frac{\sqrt{\frac{3}{10}} \cdot \frac{19}{3}}{1 - \frac{3}{10} \cdot \frac{16}{3}} =$$

$$\frac{\sqrt{\frac{3}{10}} \cdot \left(1 + \frac{16}{3}\right)}{1 - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} \cdot \frac{16}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{3}{10}} \cdot \left(1 + \frac{16}{3}\right)}{1 - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} \cdot \frac{16}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}} = \frac{\sqrt{\frac{3}{10}} \cdot \frac{19}{3}}{1 - \frac{3}{16}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{10}} \cdot \frac{19}{13} = \sqrt{\frac{3}{10}} \cdot \frac{19 \cdot 16}{13 \cdot 3}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{3x}{ED} \Rightarrow ED = 3x \cdot \frac{13 \cdot 3 \cdot \sqrt{10}}{19 \cdot 16 \cdot \sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{\sqrt{\frac{3}{10}} + \frac{\sqrt{30}}{16}}{1 - \sqrt{\frac{3}{10}} \cdot \frac{\sqrt{30}}{16}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{10}} \cdot \frac{1 + \frac{10}{16}}{1 - \frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{3}{10}} \cdot \frac{26}{13} = 2 \sqrt{\frac{3}{10}}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{3x}{ED} \text{ (см. } \triangle AED)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~2 - продолжение 2

$$\frac{\cos(2+2\beta)}{\sin^2 \beta} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{13}} (\operatorname{ctg}^2 \beta - 1) - \sqrt{\frac{3}{13}} \cdot 2 \operatorname{ctg} \beta$$

$$\operatorname{ctg} \beta = u$$

$$\sqrt{\frac{10}{13}} (u^2 - 1) - \sqrt{\frac{3}{13}} \cdot 2u = \cancel{\sqrt{\frac{10}{13}}} \frac{\sqrt{130}}{3} (\cdot \sqrt{13})$$

$$\sqrt{10} (u^2 - 1) - \sqrt{3} \cdot 2u = \frac{13\sqrt{10}}{3}$$

$$3\sqrt{10} (u^2 - 1) - 6\sqrt{3}u - 13\sqrt{10} = 0$$

$$3\sqrt{10}u^2 - 6\sqrt{3}u - 16\sqrt{10} = 0$$

$$\cancel{D} \frac{D}{4} = (3\sqrt{3})^2 - 3\sqrt{10} \cdot (-16\sqrt{10}) =$$

$$= 27 + 48 \cdot 10 = 480 + 27 = 507 =$$

$$= 3(9 + 160) = 3 \cdot 169 = 3 \cdot 13^2$$

$$u_{1,2} = \frac{3\sqrt{3} \pm \cancel{13\sqrt{3}}}{\cancel{3\sqrt{10}}}$$

$$u = \operatorname{ctg} \beta > 0 \Rightarrow u = \frac{3\sqrt{3} + 13\sqrt{3}}{3\sqrt{10}} = \frac{16}{\sqrt{30}}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{30}}{16}$$

$$\operatorname{tg}(2+\beta) = \frac{\operatorname{tg} 2 + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} 2 \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{10} + \frac{16\sqrt{3}}{3\sqrt{10}}}{1 - \operatorname{tg} 2 \operatorname{tg} \beta} =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓ 2-ПРОДОЛЖЕНИЕ.

$$\frac{AE}{\sin \beta} = \frac{EF}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \frac{EF}{\sin(90^\circ - \alpha - 2\beta)}$$

$$\frac{AE}{\sin \alpha} = \frac{CE}{\sin \beta}$$

$$\frac{EF}{CE} = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \beta}{\sin(90^\circ - \alpha - 2\beta)} \cdot \frac{EF}{CE} = \frac{\sin \beta}{\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \cos(\alpha + 2\beta)}$$

$$\sin^2 \alpha \cos(\alpha + 2\beta)$$

$$\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin^2 \beta}{\cos(\alpha + 2\beta)}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{3}{13}}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{10}{13}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{3}{10}}$$

$$\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{\sqrt{130}} \Rightarrow \frac{\sin^2 \beta}{\cos(\alpha + 2\beta)} = \frac{3}{\sqrt{130}}$$

$$\frac{\cos(\alpha + 2\beta)}{\sin^2 \beta} = \frac{\sqrt{130}}{3}$$

$$\cos(\alpha + 2\beta) = \cos \alpha \cos 2\beta - \sin \alpha \sin 2\beta =$$

$$= \sqrt{\frac{10}{13}} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) - \sqrt{\frac{3}{13}} (2 \sin \beta \cos \beta)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

12 - нана 10

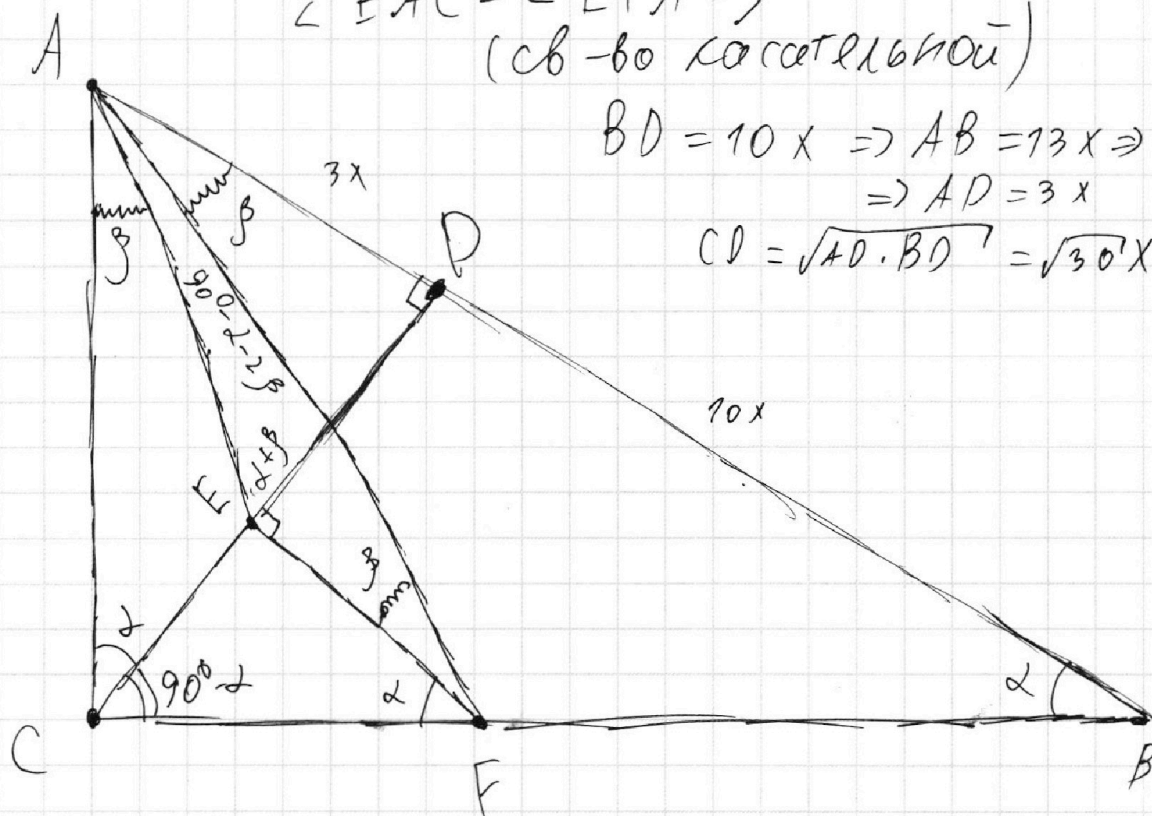
$$\angle EAC = \angle EFA \Rightarrow$$

(св-во касательной)

$$BD = 10x \Rightarrow AB = 13x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD = 3x$$

$$CD = \sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{30}x$$



$$\angle CAF = 90^\circ - \alpha - \beta \Rightarrow \angle EAF = 90^\circ - \alpha - 2\beta$$

$$BC = \sqrt{CD^2 + DB^2} = \sqrt{30x^2 + 100x^2} = \sqrt{130}x$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{130}} = \sqrt{\frac{3}{13}} \quad \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{3}{10}}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{10}{13}}$$

$$\triangle CEF \sim \triangle DBF \Rightarrow \exists k; EF = 10kx$$

$$CE = \sqrt{30}kx$$

$$CF = \sqrt{130}kx$$

по т-ме sin-ов в

треугольниках $\triangle AEF$ и $\triangle ACE$:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~3 - продолжение 2

$$-\frac{5\pi}{2} = 6x$$

$$x = -\frac{5\pi}{12}$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{12} < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow \text{не на}$$

краях в этом случае решением
нет.

Мы перебрали все случаи и
получили корни:

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{11\pi}{6} \\ x = \pi \\ x = \frac{\pi}{6} \end{array} \right. \leftarrow \text{это ответ.}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~3 - продолжение 1

$$-\frac{4\pi}{3} \in [-2\pi; -\pi) \Rightarrow \text{нам подходит } x = \frac{11\pi}{6}$$

$$3) \frac{\pi}{2} - x \in [-\pi; 0) \Rightarrow \frac{\pi}{2} - x + \pi \in [0; \pi) \Rightarrow$$

$$\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{3\pi}{2} - x$$

$$\frac{15\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$6x = 6\pi$$

$$x = \pi \Rightarrow \frac{\pi}{2} - x = -\frac{\pi}{2} \in [-\pi; 0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ нам подходит $x = \pi$

$$4) \frac{\pi}{2} - x \in [0; \pi) \Rightarrow \arccos(\sin x) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) =$$
$$= \frac{\pi}{2} - x$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$6x = \pi$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

$$\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \in [0; \pi) \Rightarrow \text{нам подходит } x = \frac{\pi}{6}$$

$$5) \frac{\pi}{2} - x \in [\pi; 2\pi] \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2} - x - \pi\right) \in [0; \pi] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x - \pi$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x - 5\pi = \frac{3\pi}{2} + x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3 - начало

$$\frac{3\pi}{2} + x = 5 \arccos(\sin x) \in [0; 5\pi]$$

$$x \in [-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$$

$$(\frac{\pi}{2} - x) \in [-3\pi; 2\pi]$$

1) $(\frac{\pi}{2} - x) \in [-3\pi; -2\pi]$ имеет $\cos$ как $\frac{\pi}{2} - x$

$$(\frac{\pi}{2} - x + 3\pi) \in [0; \pi] \Rightarrow \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x + 3\pi$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x + 15\pi = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$6x = \pi + 15\pi$$

$$x = \frac{16\pi}{6} = \frac{8\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{2} - \frac{8\pi}{3} = \frac{3\pi - 16\pi}{6} = -\frac{13\pi}{6}$$

т.р. в 7-м классе
решение нет

$$x = \frac{8\pi}{3} \text{ подходит.}$$

2) $(\frac{\pi}{2} - x) \in [-2\pi; -\pi]$

$$\frac{\pi}{2} - x + 2\pi \in [0; \pi] \Rightarrow \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$6x = \pi + 10\pi = 11\pi$$

$$x = \frac{11\pi}{6} \quad \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{11\pi}{6} = \frac{3\pi - 11\pi}{6} = -\frac{8\pi}{6} = -\frac{4\pi}{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4 - продолжение 3

короче ~~не~~ необходимо и достаточно,
чтобы $\left| \frac{1}{3a} \right| < \frac{5}{2\sqrt{6}}$ ($a \neq 0$ т.к. $a=0$
что р-рек)

$$|a| > \frac{2\sqrt{6}}{15}$$

это ответ.

$$a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15} \right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty \right)$$

р.с. строго ~~больше~~ ^{меньше} т.к. ~~иначе~~ ^{при р-ве} чтобы

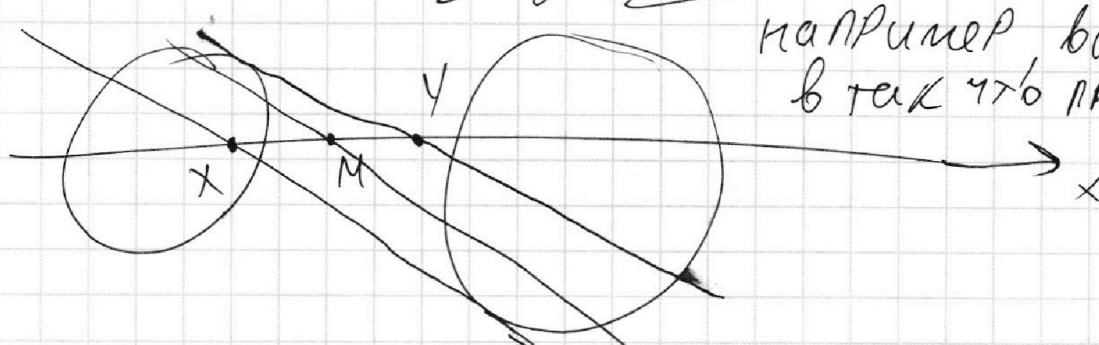
прямая пересекала обе окружности

надо, чтобы она была общей вн. кас-ой $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ имелось лишь 2 р-а. $2 \leq 4$.

А вот при строгом пер-ве мы

точно найдём искомое $\forall$ (из
соображений непрерывности) и ~~короче~~
~~это ~~очевидно~~~~ очевидно).



например, возьмём
в так что прямая

пересечёт ОХ в точке М.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

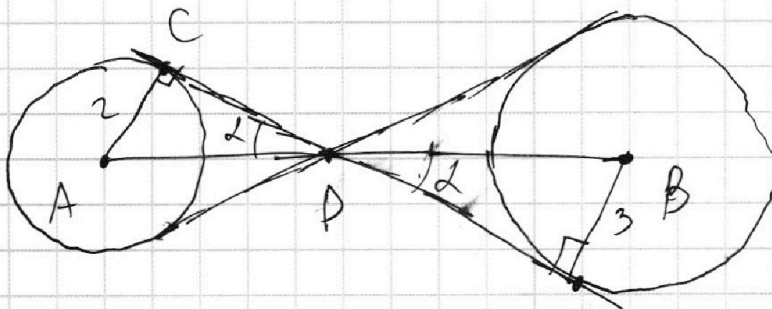
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~4-продолжение 2
у них одинаковы ^{по модулю} углы наклона к
ней поскольку центры обеих этих
окружностей лежат на прямой „ $y=0$ “.
найдем же этот угол.



$$AB = 4 = AD + DB = \frac{2}{\sin \alpha} + \frac{3}{\sin \alpha}$$

$$\frac{5}{\sin \alpha} = 4 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{5}{4}$$

$$\alpha - \text{острый} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{49-25}{49}}} = \frac{5}{\sqrt{49-25}} =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{24}} = \frac{5}{\sqrt{6} \cdot 2} = \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$\text{так как } a \neq 0 \Rightarrow x = -3a y + 4b (=)$$

$$\Rightarrow y = \frac{x - 4b}{-3a} = \frac{4b - x}{3a}$$

т.е. модуль $\tan$ угла наклона этой

прямой по отношению к ^{горизонтальной} оси Ox ~~равен~~ $= \left| \frac{1}{3a} \right|$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~ 1- продолжение
но не в праве (меняя b) выбрать
наклон к оси Oy .

частный случай: $a = 0 \Rightarrow 3a = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x = 7b \Leftrightarrow (2))$$

4-х решений быть у системы
не может, т.к. прямая вида „ $x = c$ “
пересечь одновременно обе окружности
в x -плоскости не может $\Rightarrow$ 2-х-ий
не найдем. Т.е. $a = 0$ не V. далее
сделаем $a \neq 0$.

Чтобы мы могли подобрать
положение прямой $x = 3ay + 7b$
(меняя только b при фикс. a)
необходимо и достаточно, чтобы
угол $\sqrt{\tan^{-2} a}$ наклона прямой
 $x = 3ay + 7b$ по отношению к
прямой „ $y = 0$ “ был строго меньше
по модулю, чем тот угол γ между
касательной 2-х окружностей (любой
из них).

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

~7 - начало.

Будем решать графически.

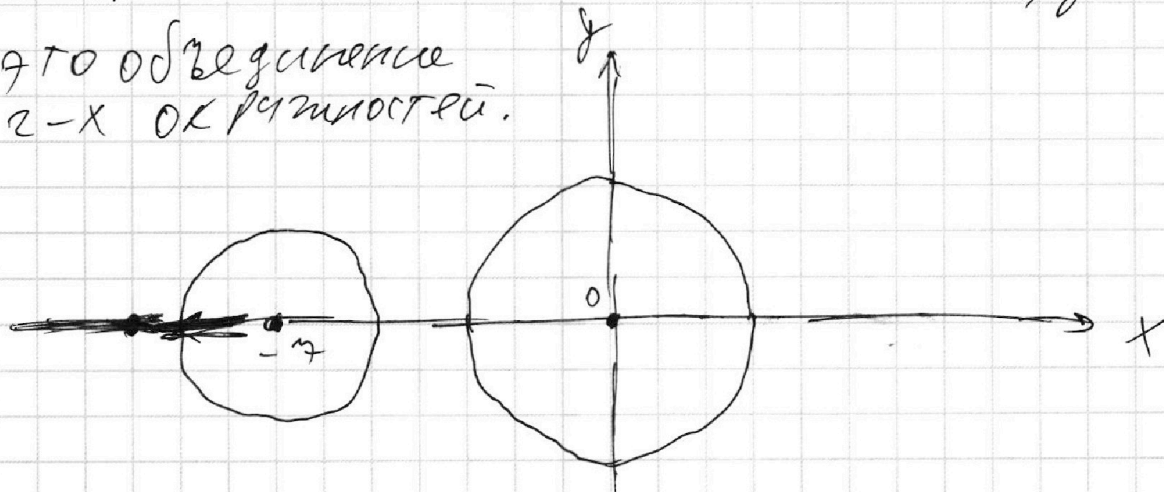
$$\begin{cases} x = -3a y + 7 & (1) \end{cases}$$

$$(x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 2^2 \\ x^2 + y^2 = 3^2 \end{cases}$$

нарисуем это на плоскости x, y
это объединение
2-х окружностей.



(2) - это (при фикс. a) какая-то
прямая ~~иногда~~, у которой мы
меняя b можем выбрать точку
пересечения с Ox (она всегда есть)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 - продолжение 2

для этих x и y верно, что

$$\log_7(6x) + \log_7(y) = a + b = 0$$

$$\log_7(6xy) = 0$$

$$6xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{6}$$

если бы в условии не было сказано,

что натуральные x и y $\exists$, то и так

был бы пример, но у нас по усл.

известно, что $\exists x, y : \dots$

$$\text{а из этого} \dots \Rightarrow xy = \frac{1}{6}$$

значит $xy = \frac{1}{6}$ единственно

возможное значение xy

$$\text{ответ: } xy = \frac{1}{6}$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(β) : ~~а~~ покажем, что $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 \geq 0$ -5-продолжение

тогда это будет означать, что
такого не бывает (вс м. случая β)

1) $a = -b$: $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + a^4 \geq 0$ это верно ($a^4 \geq 0$)

2) $a > -b$, тогда $a^5 > (-b)^5 = -b^5$
 $(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) > 0$

$a > -b \Rightarrow a+b > 0 \Rightarrow$ разделим на $(a+b) > 0$ получим
 $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 > 0$

3) $a < -b \Rightarrow a^5 < (-b)^5 \Rightarrow a^5 + b^5 < 0$
 $(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) < 0$
 делим на $(a+b) > 0$
 $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 > 0$

все случаи разобрались, везде м.т.д.

значит $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 \geq 0$

значит оно не м.д. равно (-4)

значит $a+b=0$. То есть если некоторые
 x и y удовл. ~~на~~ условию задачи, то

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a = \log_7(6x)$ ~ 5 - начало
 $b = \log_7(y)$, $a \neq 0$ и $b \neq 0$
попробуем найти все возможные
значения $(a+b) = \log_7(6xy)$
так мы сможем найти все
значения xy т.к. $xy = 7^{a+b} \cdot \frac{1}{6}$

$$\begin{cases} a^4 - \frac{2}{a} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{a} - 4 \\ b^4 + \frac{6}{b} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{b} - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^4 = \frac{1}{a} \left(2 + \frac{3}{2} \right) - 4 = \frac{1}{a} \cdot \frac{7}{2} - 4 \\ b^4 = \frac{1}{b} \left(\frac{5}{2} - 6 \right) - 4 = -\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{b} - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^5 = \frac{7}{2} - 4a \\ b^5 = -\frac{7}{2} - 4b \end{cases}$$

$$a^5 + b^5 = -4(a+b)$$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 4) = 0$$

$$\begin{cases} a+b=0 \quad (1) \\ a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 = -4 \quad (2) \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

-6- продолжение 5

$$= 18 \cdot 18 \cdot 20 + 17 \cdot 17 \cdot 3 \cdot 19 =$$

~~17 \cdot 18 \cdot 20 + 17~~

$$= 17 \cdot 18 \cdot 20 + 18 \cdot 20 + 17 \cdot 17 \cdot 3 \cdot 19 =$$

$$= 17 \cdot 17 \cdot 20 + 17 \cdot 20 + 18 \cdot 20 + 17 \cdot 17 \cdot 3 \cdot 19 =$$

$$= 17^2 (20 + 3 \cdot 19) + 17 \cdot 20 + 18 \cdot 20 =$$

$$= 17^2 (20 + 57) + 20 \cdot 35 =$$

$$= 17^2 \cdot 77 + 700 =$$

$$= 289 \cdot 77 + 700$$

$$\begin{array}{r} 66 \\ \times 289 \\ \hline 1713 \\ + 2023 \\ \hline \end{array}$$

$$56 + 6 = 62$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ + 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

короче ответ: $(289 \cdot 77 + 700)$

но я попробую ниже посчитать:

$$\begin{array}{r} 66 \\ \times 289 \\ \hline 1713 \\ + 2023 \\ \hline 2312 \\ + 2023 \\ \hline 25143 \end{array}$$

$$25143 + 700 = \del{25} 25843$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6 - продолжение 4

тогда было бы $\exists x_0, y_0$:

$$4x_0 + y_0 = 40$$

$$-4x_0 - y_0 = 40 \Rightarrow 0 = 80 \text{ противоречие}$$

при фиксированном $y_1 \hookrightarrow$

$\hookrightarrow x_1: A(x_1, y_1)$ - внутри $OPQR$

ровно $(2 + m(y_1))$ штук $\leftarrow$

тогда всего пар точек:

$$\sum_{y_1=0}^{68} m(y_1) \cdot (m(y_1) + 2)$$

(поскольку их ²⁰ при $y_1: 4$ и 19 иначе)

а это поскольку условие на x_1 :

$$x_1 \in [-10 + \frac{1}{4}y_1; 9 + \frac{1}{4}y_1]$$

то есть всего пар точек:

чисел из $[0; 68)$: они: 4 всего:

18 штук $(0, 1 \cdot 4, 2 \cdot 4, \dots, 15 \cdot 4, 16 \cdot 4, 17 \cdot 4)$

а остальных: $69 - 18 = 51 = 17 \cdot 3$

$$\sum_{y_1=0}^{68} (m(y_1) \cdot (m(y_1) + 2)) = 18 \cdot (18 \cdot 20) + 51 \cdot 17 \cdot 19 =$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

№6-продолжение 3

$$-6 \leq 4 \Delta x - y_1 - 40 \leq 0$$

$$-2 \leq 4 \Delta x - y_1 \leq 40$$

$$-2 \Delta x + y_1 \leq 4 \Delta x \leq 40 + \Delta x$$

$$-7 + \frac{1}{4} y_1 \leq \Delta x \leq 10 + \frac{1}{4} y_1$$

выбор на отрезке

$$\left[-7 + \frac{1}{4} y_1; 10 + \frac{1}{4} y_1\right]$$

или

точек при $y_1 \div 4$ и 12 при $y_1 \div 4$

$$m(u) = \begin{cases} 17, u \div 4 \\ 12, u \div 4 \end{cases}$$

тогда число подходящих $\Delta x = m(y_1)$

т.е. всего пар точек:

$$\sum m(y_1) \leftarrow \text{штук.}$$

$x_1, y_1: A(x_1, y_1)$ внутри OPR

поскольку фиксируя $A(x_1, y_1)$

мы имеем $m(y_1)$ подходящих в

никая пара точек тут

дважды не была посчитана, т.к.



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ - продолжение 2.

Выясняем $A(x_1, y_1)$. Посчитаем число подходящих $B \Rightarrow$ посчитаем Δx , подходящее по условию:

$$\begin{cases} y_1 + 40 - 4\Delta x \in [0; 68] \\ 4x_1 + 4\Delta x \geq -y_1 - 40 + 4\Delta x \\ 4x_1 + 4\Delta x \leq -y_1 - 40 + 4\Delta x + 19.4 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

~~$y_1 \in [0; 68]$~~

$$\begin{cases} 0 \leq y_1 + 40 - 4\Delta x \leq 68 \\ 4x_1 + y_1 \geq -40 - \text{это верно, т.к. } 4x_1 + y_1 \geq 0 \\ 4x_1 + y_1 \leq -40 + 19.4 - \text{это верно, т.к.} \end{cases}$$

$$4x_1 + y_1 \leq 19.4 \text{ (т.к.)}$$

изначально A - внутри $OPQR \Rightarrow x_1 \leq -\frac{1}{4}y_1 + 9$

$$0 \leq y_1 + 40 - 4\Delta x \leq 68$$

то есть ~~критерий~~ условие подхождения

Δx не зависит от x_1 (главное,

чтобы $A(x_1; y_1)$ ~~лежало~~ ^{лежало} ~~было~~ ^{было} ~~внутри~~ ^{внутри} $OPQR$)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

^{№6 - продолжение}
~~вероятно, под числом пар точек~~
~~подразмевается не упорядоченное число~~
~~пар. Посчитаем упорядоченное, по道理~~
~~(и именно на 1, т.к. мы ВСЕ посчитали~~
~~2 раза. А совпасть с B не может~~
~~т.к. $\Delta x = \Delta y = 0$ не подходит~~
~~под условие $4\Delta x + \Delta y = 40$~~
~~Р-им как-то - то A внутри OPR.~~

посчитаем ~~попробуем~~ число
подходящих к ней в пары B
 $A(x_1, y_1) \quad B(x_1 + \Delta x, y_1 + 40 - 4\Delta x)$
$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 \in [0; 68] \\ x_1 \geq -\frac{1}{4} y_1 \\ x_1 \leq -\frac{1}{4} y_1 + 19 \end{array} \right\} \text{ верно } \Rightarrow A \text{ лежит внутри } OPR$$

~~или так~~

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 + 40 - 4\Delta x \in [0; 68] \\ x_1 + \Delta x \geq -\frac{1}{4}(y_1 + 40 - 4\Delta x) \\ x_1 + \Delta x \leq -\frac{1}{4}(y_1 + 40 - 4\Delta x) + 19 \end{array} \right.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

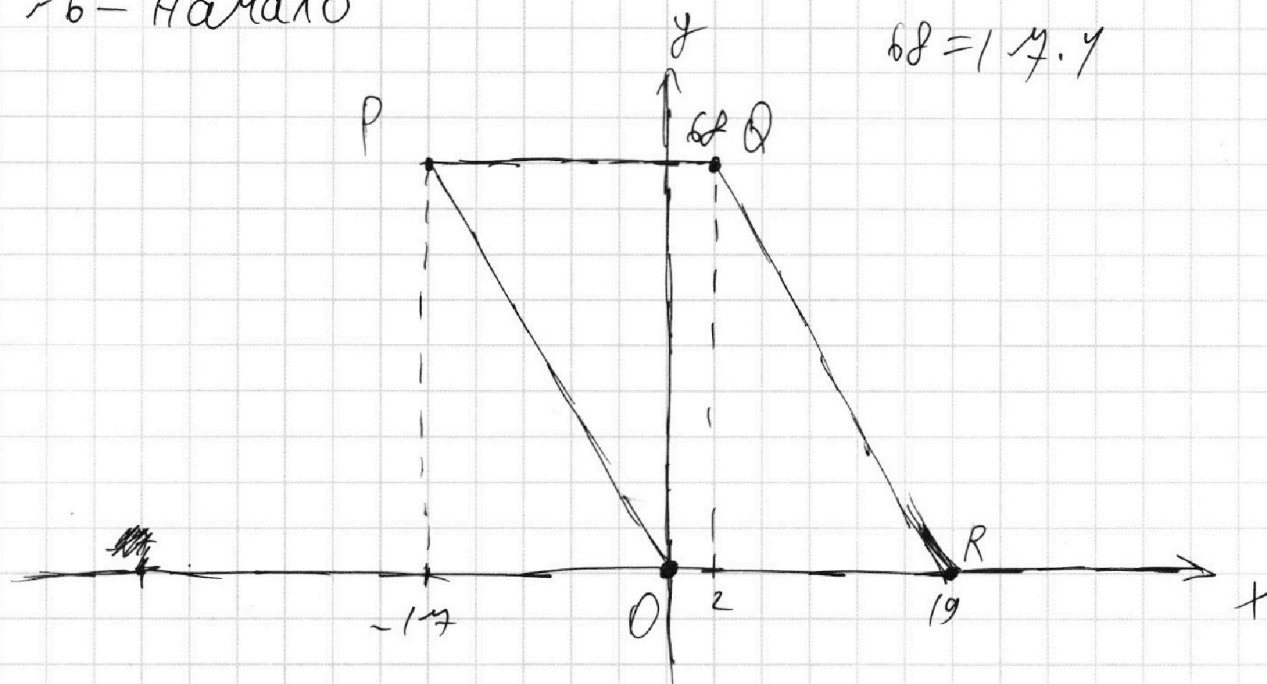
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6 - Начало

$$68 = 17 \cdot 4$$



$$x_2 - x_1 = \Delta x \in \mathbb{Z}; y_2 - y_1 = \Delta y \in \mathbb{Z}$$

$$A(x_1; y_1)$$

$$B(x_1 + \Delta x; y_1 + \Delta y)$$

$$4\Delta x + \Delta y = 40$$

$$\Delta y = 40 - 4\Delta x$$

$$B(x_1 + \Delta x, y_1 + 40 - 4\Delta x)$$

прямая OR имеет
уравнение: $y = -\frac{1}{4}x$

$$y = -\frac{1}{4}x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}y$$

$$OR: y = -\frac{1}{4}(x - 19) = -\frac{1}{4}x + 19 \cdot \frac{1}{4}$$

$$x = -\frac{1}{5}y + 19$$

Найдём критерий того, что точка $S(x_0; y_0)$
лежит внутри $OPQR$:

$$\begin{cases} y_0 \in [0; 68] \\ x_0 \geq -\frac{1}{4}y_0 \\ x_0 \leq -\frac{1}{4}y_0 + 19 \end{cases}$$

$\Rightarrow S$ внутри $OPQR$

(внутри = внутри или
на границе)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

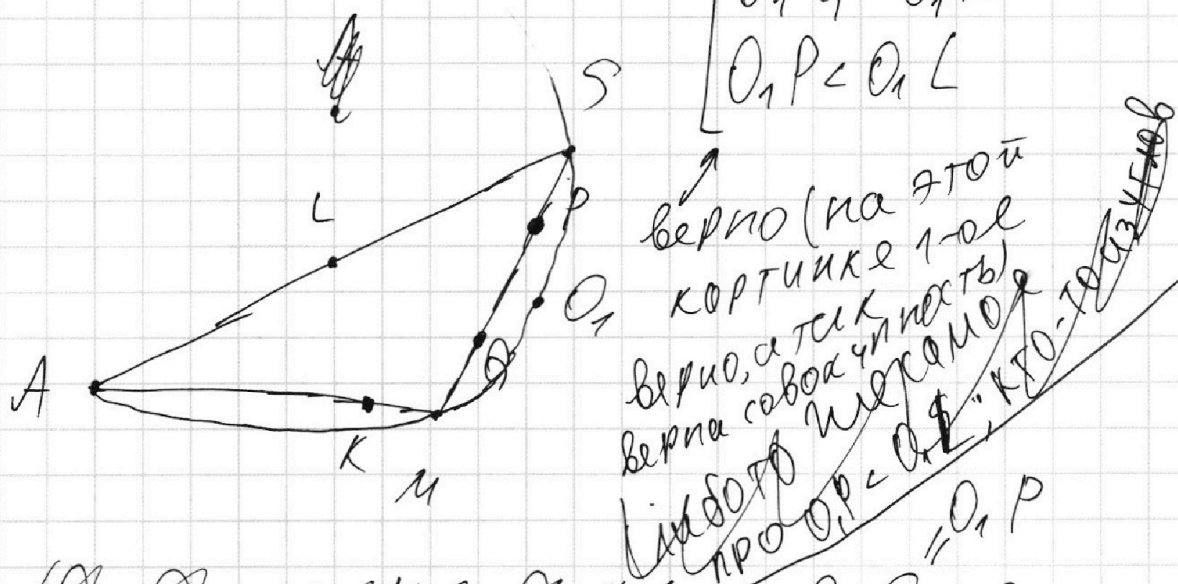
7 - продолжение 2

хотелось бы показать, что такого м.б.

$$AO^2 = \cancel{AK^2 + KO^2} = AL^2 + LO^2$$

$$AO_1^2 + O_1O^2$$

а у того же м.б. потому, что
- пер к LP и



верно (на этой
картинке 1-ое
верно, а так
верна совокупность)
лишнее
про $O_1P < O_1L$
 $= O_1P$

$$\cancel{O_1Q < O_1M \leq O_1K} \quad \text{но } O_1Q = O_1K = O_1L$$

противоречие. Значит $AM = AS = 10$

$$\text{тогда } MA_1 = BA_1 = A_1C = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle BMC = 90^\circ \text{ (т.к. в } \triangle BMC \text{ медиана = } \\ = \frac{1}{2} \text{ стороны, к которой её провели)}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

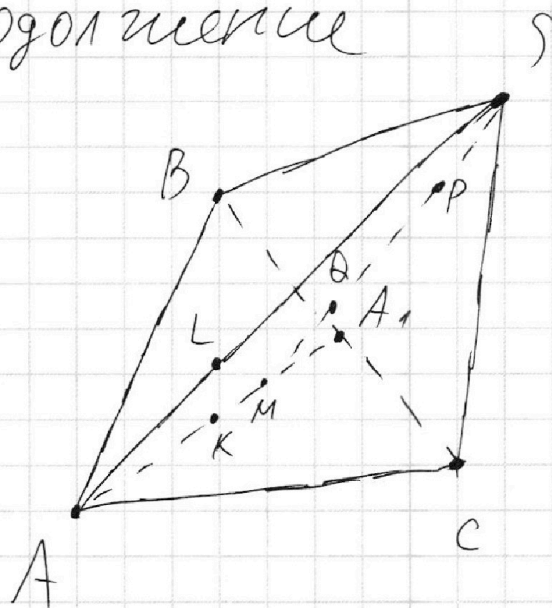
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~7 - продолжение



спроецируем O_1 на AS (плоскость). Пусть
получим точку O_1 . Тогда $OL \perp AS \Rightarrow O_1L \perp AS$
 $OK \perp AA_1 \Rightarrow O_1K \perp AA_1$ и O_1 - центр окр-и,
описанной около LKP .

$O_1K \perp AA_1$; $O_1L \perp AS$ и $O_1K = O_1L \Rightarrow$

$\Rightarrow AO_1$ - бис-са $\angle SAM$.

также O_1 - на с-перек PO ~~и~~ (вл-а
 ASM) $\Rightarrow$ на с-перек SM

если ~~если~~ SM не PO то $O_1 \in$
 $\in$ с-перк PO и бис-са $\angle SAM \Rightarrow$ лежи на
середине дуги ^{SM} опис. окр-и около $\angle SAM$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

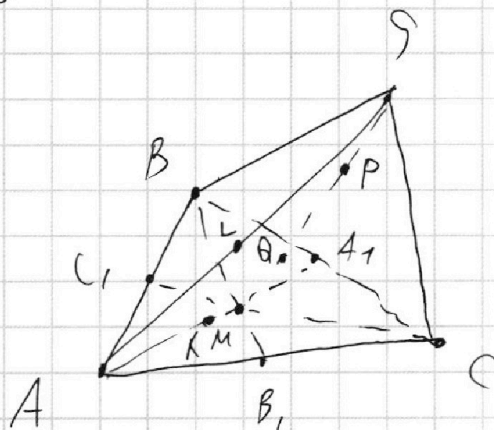
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



~ 7 - на 10



$$S(\triangle ABC) = 60 \quad SA = BC = 10 \Rightarrow BA_1 = A_1C = 5$$

$$SL^2 = SP \cdot SQ \quad (\text{ст. касат. точки } L \text{ к сфер. по } OKP \text{ и опис. окр. } LPO)$$

$$SP = MQ \Leftrightarrow \text{центр } POK = \text{центр } SM.$$

Далее влиять не будет, кто ближе к M:

Пусть $Q \Rightarrow$ пусть берз $PO \hookrightarrow Q$ ближе к M

$AL = AK$ т.к. касательные к сфере из A.

$$SL = 10 - x \Rightarrow AL = AK = x$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot AB \cdot BM \cdot CM$$

пусть O — центр Σ (он не отмечен) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ при проецировании на ABC это K, а AS — это L.

$$OK \perp ABC \Rightarrow OK \perp AA_1 \text{ и } OK \perp AS \text{ и } OL = AK$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

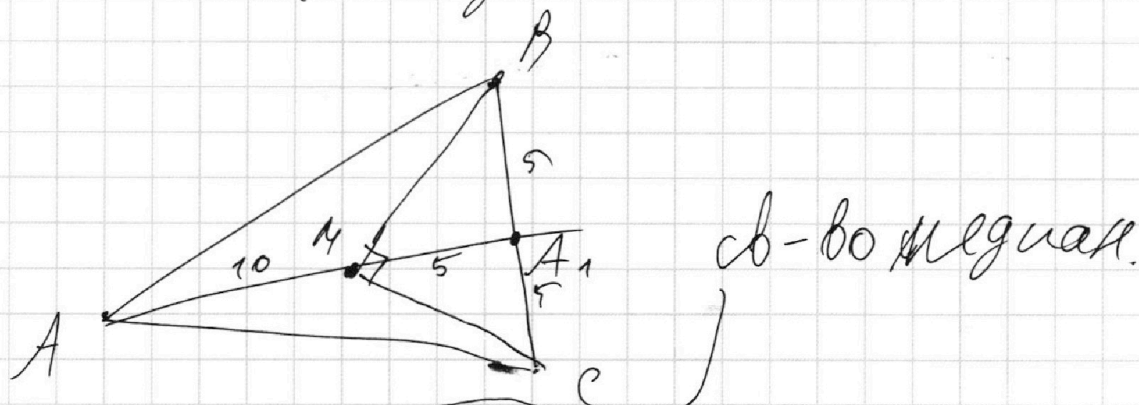
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

7 - ~~продолжение~~ продолжение 3



$$S(\triangle BMC) = \frac{1}{3}(S_{\triangle}(ABC)) = 20$$

$$BM \cdot MC \cdot \frac{1}{2} = 20$$

$$BM \cdot MC = 40$$

$$AM \cdot BM \cdot CM = 10 \cdot 40 = 400$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot AM \cdot BM \cdot CM =$$

$$= \frac{27}{8} \cdot 400 = \frac{27}{2} \cdot 100 = 27 \cdot 50 =$$

$$= 20 \cdot 50 + 7 \cdot 50 = 1000 + 350 = 1350$$

Ответ: (на а) $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 1350$

8) $SN = SL = 3 \Rightarrow AL = 7 = AK$

$$SP \cdot SQ = 3^2$$

$SP + SQ = SM$ (свойство касательных к окружности из одной точки)

$SM = SP + SQ \geq 2\sqrt{SP \cdot SQ} = 6 \Rightarrow SM \geq 6$

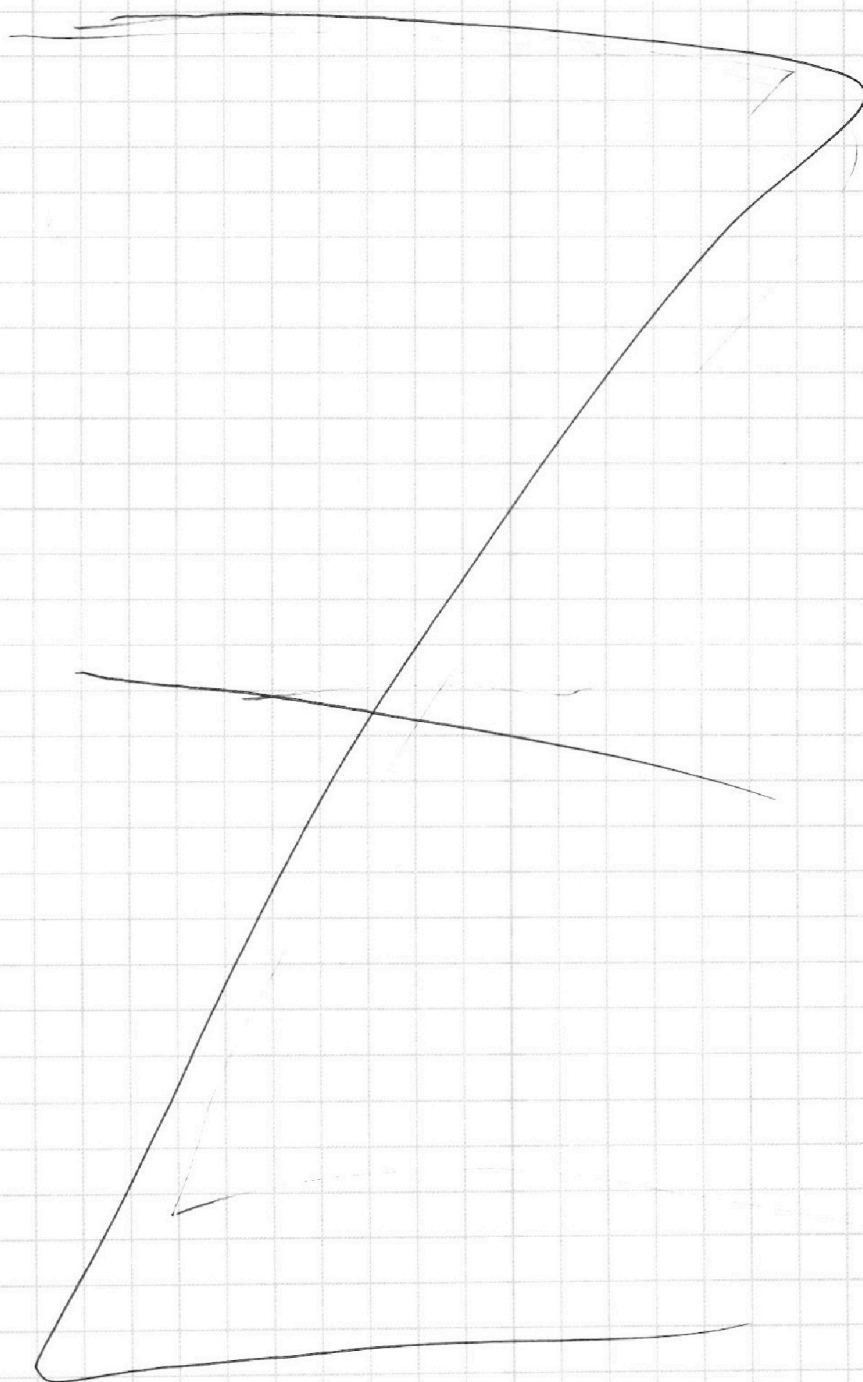
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~ 1 - Черновик

~~$ab: 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$~~
 ~~$bc: 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{13}$~~
 ~~$ac:$~~

~~$a: \text{только на } 2, 3, 5$~~
 ~~$b: \text{только на } 2, 3, 5$~~
 ~~$c: \text{только на } 2, 3, 5$~~

$$abc = \frac{ab \cdot bc}{b} \geq \frac{(2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14})(2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{13})}{b} \geq$$

$$\geq 2^7 \cdot 3^{11} \quad \text{КРЧ. Очев}$$

$19+18=32$
 $32+43=75$

$11+15=26$
 $17+26=30+13=43$

$$abc = \sqrt{ab \cdot bc \cdot ac} \geq \sqrt{2^{7+13+14} \cdot 3^{11+15+17} \cdot 5^{14+18+43}}$$

~~$\sqrt{\cdot kmn} =$~~ $+1 v_3$ $+1 v_5$

$$= \sqrt{2^{37} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75} \cdot k \cdot m \cdot n} \geq$$

$$\geq \sqrt{2^{37} \cdot 3^{44} \cdot 5^{76}} = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$$

пример 561:

~~$ab = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$~~
 ~~$bc =$~~

$a = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{15}$
 $b =$
 $c =$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1
☒

2
☒

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 12$$

Черновик

Черновик.

$$\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi \cdot 3 + \pi}{6} = \frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☒	☒	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

начало

черновик

$$a^4 - \frac{2}{a} = \frac{3}{2}a - 4$$

$$343 = 3^5 ?$$

$$\frac{343}{3} = 114 \frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1 \ 1 \\ 1 \ 2 \ 1 \\ 1 \ 3 \ 3 \ 1 \\ 1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} a^4 - \frac{2}{a} = \frac{3}{2}a - 4 \\ b^4 + \frac{6}{b} = \frac{5}{2}b - 4 \end{cases}$$

$$a+b = ?$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$\begin{cases} a^4 = \left(\frac{3}{2} + 2\right) \cdot \frac{1}{a} - 4 = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{a} - 4 \\ b^4 = \left(\frac{5}{2} - 6\right) \cdot \frac{1}{b} - 4 = -\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{b} - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^5 = \frac{7}{2} - 4a \\ b^5 = -\frac{7}{2} - 4b \end{cases}$$

$$(a+b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = -4(a+b)$$

$$(a-b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = -4(a-b)$$

$$a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 = -4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

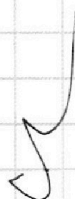
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

~ 2
AB || EF

$$BD = 10x$$

$$\frac{AB}{10x} = 1,3$$

$$AB = 13x$$

$$AD = 3x$$

$$\frac{S(\triangle ACD)}{S(\triangle AEF)}$$

$$CD = \sqrt{30}x$$

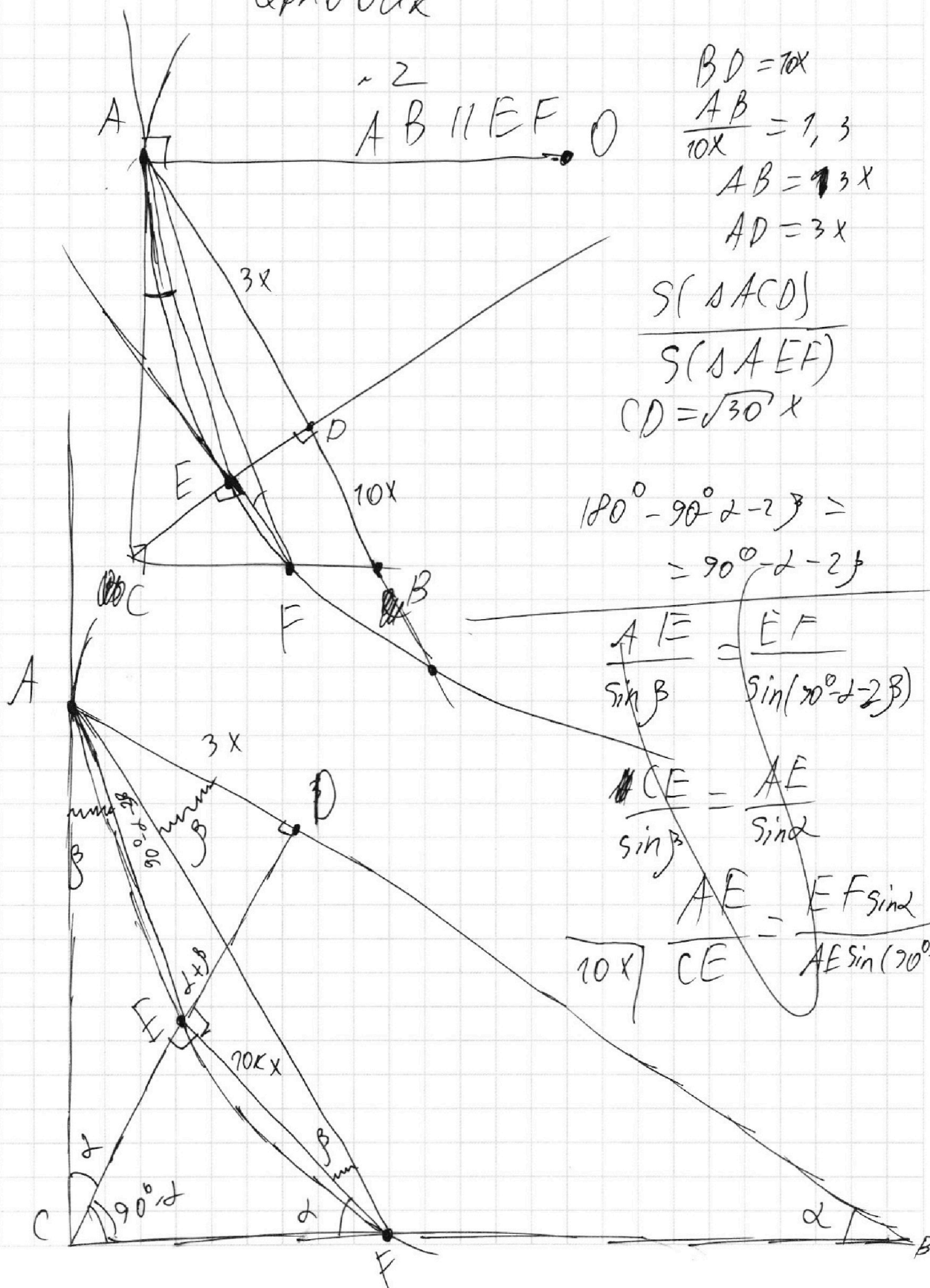
$$180^\circ - 90^\circ - 2\beta =$$

$$= 90^\circ - 2\beta$$

$$\frac{AE}{\sin \beta} = \frac{EF}{\sin(90^\circ - 2\beta)}$$

$$\frac{CE}{\sin \beta} = \frac{AE}{\sin \alpha}$$

$$\frac{AE}{10x} = \frac{EF \sin \alpha}{AE \sin(90^\circ - 2\beta)}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$\frac{3\pi}{2} + x = 5 \arccos(\sin x) \in [0, 40\pi]$$

+++++

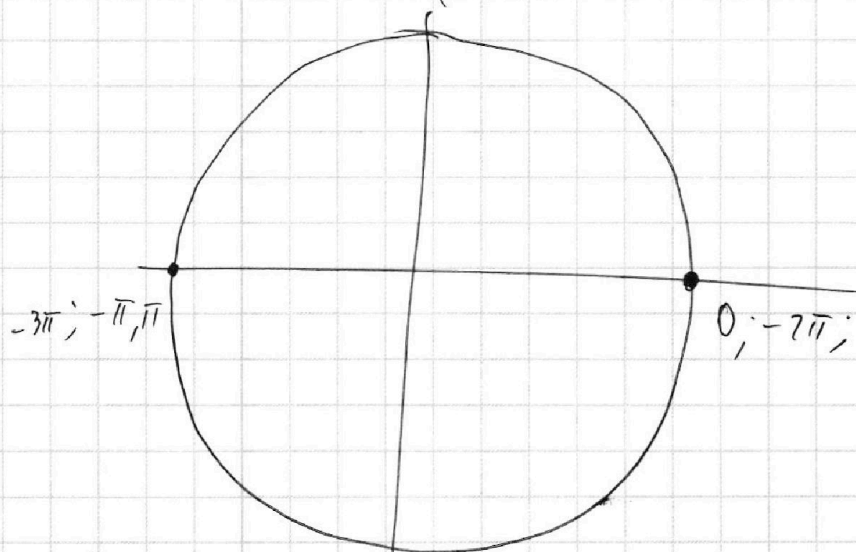
~~1111~~

$$\frac{3\pi}{2} + x = 5 \arccos(\sin x) \in [0, 40\pi] \in [0, 5\pi]$$

$$x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right] \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \in [-3\pi, 2\pi]$$

$$5 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x))$$

$$5 \arccos(\sin x) = 5 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x))$$



$$a) \frac{\pi}{2} - x \in [-3\pi, -2\pi] \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2} - x + 3\pi\right) \in [0, \pi] \Rightarrow$$

$$= \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x + 3\pi$$