



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{1}$

$$ab: 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \quad \Rightarrow \quad a^2 \cdot b^2 \cdot c^2: 2^{7+13+14} \cdot 3^{11+15+17}$$

$$bc: 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \quad \cdot 5^{14+18+12} = \frac{19}{+18} \frac{43}{+43} \frac{75}{75}$$

$$ac: 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \quad = 2^{39} \cdot 3^{43} \cdot 5^{25}$$

$c = 2^{13} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$; $a = 2^{11} \cdot 3^{11} \cdot 5^{11}$; $b = 2^{12} \cdot 3^{12} \cdot 5^{12}$; b

т.к. a, b, c - натуральные, то abc делится на кв.-т делителей $\Rightarrow$

рассмотрим каждую делитель отдельно (очевидно, что число abc делится на $2, 3, 5$ число не 11 или не 17 может быть)

2: $(abc)^2: 2^{34} \Rightarrow$ предположим, что есть такой a, b, c , что

$abc: 2^{17}$, покажем что это невозможно:

$a = 2^4 \cdot 3^{11} \cdot 5^{11}$; $b = 2^3 \cdot 3^{12} \cdot 5^{12}$; $c = 2^{10} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$

ум. задачи выш.

3: $(abc)^2: 3^{43}$ из указанного выше $\Rightarrow$

$\Rightarrow (abc)^2: 3^{44}$, покажем, что такая сст. невозможна $abc: 3^{22}$. $abc = 2^{14} \cdot 3^{22} \cdot 5^{14+17+13}$

$a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{11}$; $b = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^{12}$; $c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{13}$

ум. выполняются

5: заметим, что $ab \cdot bc: 5^{14} \cdot 5^{18} = 5^{32}$

но в то же время $a \cdot c: 5^{43}$

$\Rightarrow (abc)^2: 5^{86}$ точно $\Rightarrow abc: 5^{43}$, докажем



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Какая минимальная сумма чисел
приведя

пример:

$$a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{14}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^0$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{29}$$

условия

$$ab = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$bc = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{29}$$

$$ca = 2^{14} \cdot 3^{18} \cdot 5^{43}$$

$$\begin{array}{r} 43 \\ -14 \\ \hline 29 \end{array}$$

миним. образом
abc = 2¹⁷

минимально возможно
abc = 2¹⁷ · 3²² · 5⁴³

$$\text{Ответ: } 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

P.S. каждое значение ^{abc} является
наименьшим, потому что они удовлетво-
ряют минимальному условию. Значит,
меньше в три раза невозможно. для данного условия

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

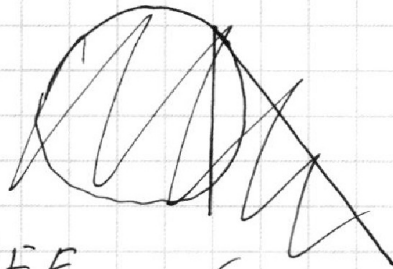
1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



~~Вписанная окружность~~



$$CD^2 = 3x \cdot 10x$$

$$CD = \sqrt{30x}$$

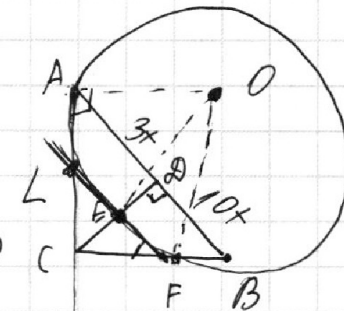
~~$\triangle CEF \sim \triangle CLF \sim \triangle CAB$~~

$AB \parallel EF$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$$

$$\frac{BD}{AB} = \frac{10}{13} \Rightarrow BD = 10x, AB = 13x \Rightarrow AD = 3x$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{\frac{1}{2} CD \cdot AD}{\frac{1}{2} CE \cdot EF} = \frac{3x \cdot \sqrt{30x}^2}{CE^2 \cdot 10x} = \frac{9x^2}{CE^2}$$



$$CD = \frac{3x \cdot \sqrt{30x} \cdot CD}{CE \cdot \frac{10x}{CD} \cdot DB} \Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{30x}$$

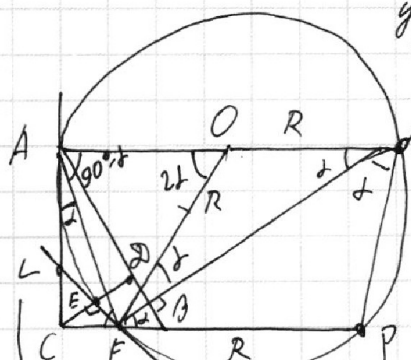
Пусть $\angle CAF = \angle$, тогда $\angle FAO = 90^\circ - \angle$,

$\angle CFA = 2\angle = \angle AOF$;

$\angle AOF = \angle = \angle CFA$

$\triangle AFH$ - углы, $\angle AFH = 90^\circ$ - внешние углы $\angle CFA$

$\angle OFH = \angle = \angle HFP$
 $OH \parallel FP$ ($AO \perp AC$, $CP \perp AC$) $\Rightarrow$



$OH \parallel FP$
 $\Rightarrow OF \parallel HP$
 $OF = OH = R$

$\Rightarrow OFHP$ - параллелограмм $\Rightarrow HP = R$.
 $AFPH$ - вписанный четырехугольник $\Rightarrow AF = HP = R$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\triangle AFO: AF = AO = FO = R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\angle = 90^\circ - \angle = 60^\circ \Rightarrow \angle = 30^\circ$$

$$\begin{aligned} \triangle CAF: CF = AC : \sqrt{3} \\ AC = \sqrt{3x \cdot 13x} = \sqrt{39}x \end{aligned} \quad \Rightarrow CF = \sqrt{13}x. \quad \Rightarrow$$

$$CB = \sqrt{10x \cdot 13x} = \sqrt{130}x.$$

$$\Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{\sqrt{13}x}{\sqrt{130}x} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

$$\triangle CEF \sim \triangle ACB \text{ (т.к. } AB \parallel CF) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{CE}{CB} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\& \text{ т.к. } CF \perp CB \text{ т.к. } CF \parallel AB.$$

$$S_{ACB} = \frac{1}{2} CB \cdot AD = \frac{1}{2} \sqrt{130}x \cdot 3x.$$

$$\& \text{ т.к. } S_{ACB} = \frac{1}{2} \cdot CB \cdot DB.$$

$$\triangle CEF \sim \triangle CDB \Rightarrow \frac{CE}{CB} = k = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\frac{S_{CEF}}{S_{CDB}} = k^2 \Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{ACB}} = \frac{S_{ACB}}{k^2 \cdot S_{CDB}} =$$

$$= \frac{AD}{k^2 \cdot DB} = \frac{3}{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 \cdot 10} = 3$$

Ответ: 3

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$\sqrt{3}$.

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x.$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}.$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right).$$

$$\sin x = \sin\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + \frac{\pi}{2}\right).$$

$$x = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n, | \cdot 5.$$

$$x = \pi - \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{5} - \frac{\pi}{2} + 2\pi n, | \cdot 5$$

$$5x - x = \frac{3\pi}{2} + \frac{5\pi}{2} + 10\pi n.$$

$$5x - x = -\frac{3\pi}{2} - \frac{5\pi}{2} + 5\pi + 10\pi n.$$

$$4x = -\pi + 10\pi n.$$

$$6x = -4\pi + 5\pi + 10\pi n, \quad 6x = \pi + 10\pi n.$$

$$1. \text{ К. } -\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2}, \text{ и } \pi$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \leq \frac{7\pi}{2} \quad | \cdot \frac{2}{\pi}.$$

$$-3 \leq \frac{1}{2} + n \leq 7$$

$$-3,5 \leq n \leq 6,5 \Rightarrow n = -3; -2; -1; 0; \dots 6.$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi k}{3} \leq \frac{7\pi}{2} \Leftrightarrow -4,5 \leq k \leq 10,5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = -4; -3; -2; -1; \dots 9; 10.$$

ОДЗ.

$$0 \leq \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \frac{3\pi}{2} + x \leq 5\pi.$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2}.$$

и
 $\sin x$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$X = +\frac{\pi}{6} + 2,5\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$X = \pi + 2,5\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

по т.к. $-\frac{3\pi}{2} \leq X \leq \frac{\pi}{2}$, то.

$$-\frac{3\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{4} + 2,5\pi n \leq \frac{\pi}{2} \quad | \cdot \frac{2}{5\pi}$$

$$-\frac{3}{5} \leq -\frac{1}{10} + n \leq \frac{1}{5}$$

$$-0,6 \leq -0,1 + n \leq 0,2 \Rightarrow n = 0; 1.$$

$$X = -\frac{\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq \pi + 2,5\pi k \leq \frac{\pi}{2} \quad | \cdot \frac{2}{5\pi}$$

$$-0,6 \leq \frac{2}{5} + k \leq 1,4$$

$$-1 \leq k \leq 1 \Rightarrow X = -\frac{3\pi}{2}; \pi; \frac{\pi}{2}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}; -\frac{3\pi}{2}; \pi; \frac{\pi}{2}$.

$$X = \pi + 2,5\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$X = \frac{\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

по т.к. $X \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

по ① $-\frac{3\pi}{2} \leq \pi + 2,5\pi n \leq \frac{\pi}{2}$

$$-0,6 \leq 0,4 + n \leq 1,4$$

$$-1 \leq n \leq 1 \Rightarrow n = 0; \pm 1 \Rightarrow X = -\frac{3\pi}{2}; \pi; \frac{\pi}{2}$$

② $-\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k \leq \frac{\pi}{2} \quad | \cdot \frac{6}{\pi}$

$$-3,6 \leq 1 + 2,5k \leq 7,3 \quad \nearrow k = -1; 0; 1 \Rightarrow$$

$$X = \frac{\pi}{6} - \frac{10\pi}{6} = -\frac{9\pi}{6} = -\frac{3\pi}{2}$$

$$X = \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} + \frac{10\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

Ответ: $-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $-\frac{3\pi}{2}; \pi; \frac{2\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}.$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Иском. второе ур-ние; оно равносильно
совокупности
уравнений.

$$x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0$$

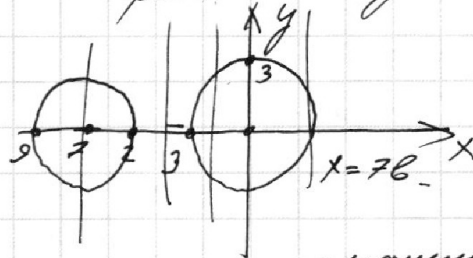
$$x^2 + y^2 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 2^2 & - \text{окружность с центром } (-7; 0) \text{ и } R_1 = 2 \\ x^2 + y^2 = 3^2 & - \text{окружность с центром } (0; 0) \text{ и } R_2 = 3. \end{cases}$$

$$x + 3ay - 7b = 0 \quad - \text{уравнение прямой}$$

Если $a = 0$, то $x = 7b$ - верт. прямая.

Очевидно, что решение макс z (и мин далее)



Если $a \neq 0$, то

$$y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$$

прямая, тогда

уравнение системы

и реш, нужно, чтобы

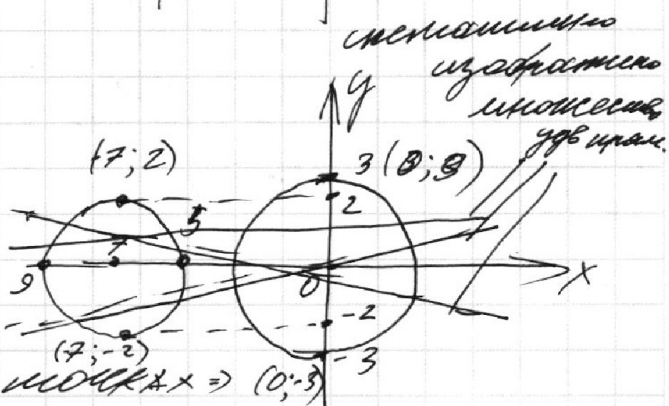
прямая пересекала

каждую окр в двух точках $\Rightarrow$

окр должны быть между крайними точками

или окр., т.е. прямая должна

касаться меньшей окружности.



должна. Выводим

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} -2 < y(-7) < 2 \\ -3 < y(0) < 3 \end{cases}$$

$$y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$$

$$\begin{cases} -2 < \frac{7}{3a} + \frac{7b}{3a} < 2 \\ -3 < \frac{7b}{3a} < 3 \end{cases}$$

прямая ос.
в одну сторону
коэффициенты
имеют знак

① Если $a > 0$

$$\begin{cases} -6a < 7 + 7b < 6a \\ -9a < 7b < 9a \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6a - 7 < 7b < 6a - 7 \\ -9a < 7b < 9a \end{cases}$$

в существуют
сим.

$$\begin{cases} 15a > 7 \\ 15a > -7 \end{cases} \Rightarrow a > \frac{7}{15} > 0 \Rightarrow a > \frac{7}{15}$$

$$\begin{cases} -9a < 6a - 7 \\ -6a - 7 < 9a \end{cases}$$

② Если $a < 0$.

$$\begin{cases} 6a < 7b + 7 < -6a \\ -9a < 7b < 9a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6a - 7 < 7b < -6a - 7 \\ 9a < 7b < -9a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9a < 6a - 7 \\ 9a < -6a - 7 \end{cases}$$

в существуют сим.

$$\begin{cases} 6a - 7 < -9a \\ 9a < -6a - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15a < 7 \\ 15a < -7 \end{cases} \Rightarrow a < -\frac{7}{15} < 0$$

$$\text{иногда } a \in (-\infty; -\frac{7}{15}) \cup (\frac{7}{15}; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -\frac{7}{15}) \cup (\frac{7}{15}; +\infty)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2 \log_6 x = \log_{36x^2} 343 - 4. \\ \log_7^4 y + 6 \log_7 y = \log_{y^2} 7^5 - 4. \end{cases}$$

$\times y$! ? на ODS;

Пусть $\log_7 6x = t$, а $\log_7 y = u$, тогда $t \neq 0, u \neq 0$. (каждому x соответствует ровно одно t , а каждому y — ровно одно u)

$$\begin{cases} t^4 - 2 \cdot \frac{1}{t} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t} - 4, & t \neq 0, \\ u^4 + 6 \cdot \frac{1}{u} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{u} - 4, & u \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^5 - 3,5t + 4t = 0 \\ u^5 + 4u + 3,5 = 0 \end{cases} \quad \text{Положим } f(a) = a^5 + 4a$$

$$\begin{cases} t^5 + 4t - 3,5 = 0 \\ u^5 + 4u + 3,5 = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} f'(a) &= 5a^4 + 4. \\ f'(a) &= 0 \end{aligned}$$

Ф-ция монотонно возрастает на $\mathbb{R} \Rightarrow$ ур-ние $f'(a) = 0$ не имеет корней.

$t^5 + 4t - 3,5 = 0$ и $u^5 + 4u + 3,5 = 0$ имеют ровно по одному корню, а т.к. $\log_7 6x = t$ и $\log_7 y = u$ — взаимно однозначные функции, то x и y существуют.

Заметим, что $f(t) = t^5 + 4t - 3,5$ и $\ell(u) = u^5 + 4u + 3,5$ — функции.

$$f(t) = 0 \text{ и } \ell(u) = 0 \text{ равносильны.}$$

$$-t^5 - 4t + 3,5 = 0 \Leftrightarrow t^5 + 4t + 3,5 = 0 = \ell(t) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ что корни каждого из уравнений по модулю равны и

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

и произведем лог по знаку y , и это единственное решение.
т.е. $y = -t \Rightarrow \log_7 6x = -\log_7 y$.

$$7. \text{Е} \quad \log_7 6x + \log_7 y = 0 \quad \forall x$$

$$\log_7 (6xy) = 0 \Rightarrow 6xy = 1, \text{ т.е. } xy = \frac{1}{6}.$$

и это единственное возможное значение xy (в других случаях оно не xy).

Ответ: $\frac{1}{6}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2
□

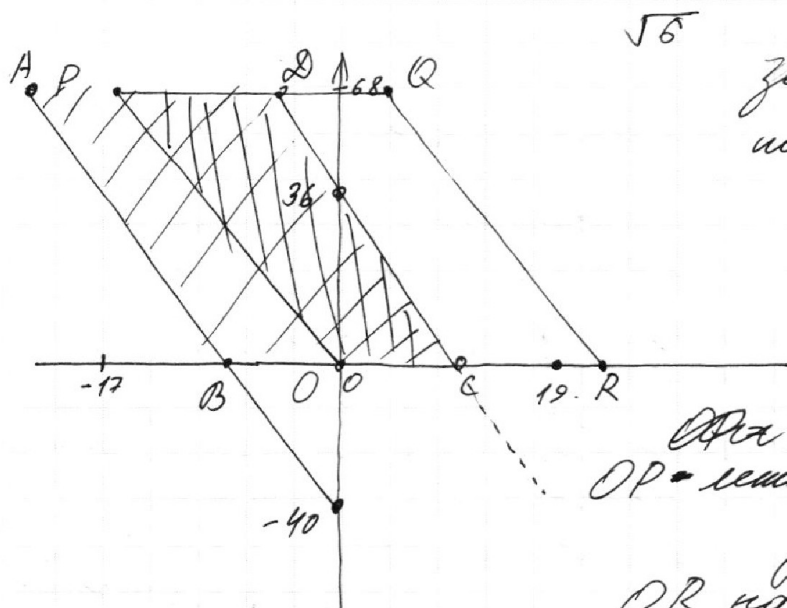
3
□

4

5
□6
☒7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



зафиксировать $A(x_1, y_2)$
40+

mona $4x_2 + y_2 = 4x_1 + y_1$

$$y_2 = -4x_2 + 40 + 4x_1 + y_1$$

прямая, явл.

множеством
точек В.

ОР = величина прямой

$$y = \text{[scribbled out]} - 4x$$

OR na. $y = \text{---} - 4x + 76$

PQ на $y=68$

OR на $y=0$.

Заделивши, чие

$$y_2 = -4x_2 + 40 + 4x_1 + y_1$$

и $y = -4x + 76$. и $y = -4x$ наклонные по-
одным углом, а т.к. в левом вращении
на- мма, то. необходимо вычисление такого:

$$0 \leq 40 + 4x_1 + 4x_2 \leq 276$$

$$-40 \leq 4x_1 + y_1 \leq 36, \text{ i.e. } \begin{cases} y_1 \leq 36 - 4x_1 \\ y_1 \geq -40 - 4x_1 \end{cases}$$

На повороте прямой можно быть на прямой всегда $y = -4x + c$, где $c \in \mathbb{Z}$ левши. $\frac{68}{4} + 1 = 17 + 1 = 18$ точек, оказалось.

лишь рассматривая, каково может А
задать систему множеств В, и наоборот.
~~Выводимое~~ $\{ \text{символы} \}$ $\{ \text{символы} \}$
(символы) $KD \cdot K.A(y_i x_1) \in$, $y_1 \in [0; 68]$ KH . $\{ \text{символы} \}$ $\{ \text{символы} \}$

Вывод: $\forall x_1 \in [0; 68] \exists y_1 \in [0; 70]$

3629436-48A → X₁ ∈ O.4.14

P.5 $A \equiv B$ (в условии ~~а~~ что это никак не сказано).

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AB \perp AC, \angle A = 90^\circ, \angle B = 45^\circ$$

но $AB \perp AC$, но $AB \perp AC$ означало бы, что $AB \perp AC$, что невозможно.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 68 \end{cases}$$

система линейных уравнений

$$\begin{cases} y_1 \leq 36 - 4x_1 \\ y_1 \leq 40 - 4x_1 \end{cases}$$

$$y_1 \in [0; 68] - \text{длина}$$

заданная точка x_1 и y_1 , что множество $OPQR$

заданная точка x_1 и y_1 , что множество $OPQR$ (назовем его $ABCD$) - замкнутое множество.

замкнутое множество $ABCD$ - замкнутое множество. Но т.к. $A(x_1; y_1) \in OPQR$, то точка должна удовлетворять двум условиям, входящим в пар. $PD \subset O$ (внутри учитывая и точки на границе). двойная проверка.

DC - лежит на прямой $y = 36 - 4x$.

$$D: 68 = 36 - 4x \quad x = -8$$

$$D(-8; 68)$$

$$C: 0 = 36 - 4x \quad x = 9$$

$$D(9; 0), C(9; 0)$$

внутри этой области: $18 \cdot 18 = 324$ точек A каждая из которых

$$\Rightarrow \text{всего пар. } (A; B) = 18^2 \cdot 18 = 324 \cdot 18 = 6832$$

Ответ: 6832 пар



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$x^2 + y^2 = 3^2$$

$$(x^2 + 14x + 49) - 49 + y^2 + 45 = 0$$

$$(x+7)^2 + y^2 = 2^2$$

$$x^2 + y^2 = 3^2$$

$$8 + 10 = 18$$

$$\sqrt{5}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ \times 18 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ 180 \\ \hline 324 \end{array}$$

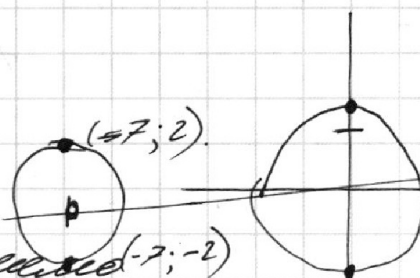
$$y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$$

$$\text{если } a = 0$$

$$\text{то } x = 7b$$

Чрез точку невозможна

Верхняя точка



Иногда упр. можно

3 реал. прямая должна
решать.

$$\begin{cases} -2 < y(-7) < 2 \\ -3 < y(0) < 3 \end{cases}$$

$$0, 4, 8, -6, 8$$

$$\frac{7}{4} + 1, \frac{8}{4} + 1$$

$$\text{Пусть } (\log_2 6x) = t$$

$$t^4 - 2 \cdot \frac{1}{t} = \frac{3}{2t} - 4$$

$$u^4 + 6 \frac{1}{u} = \frac{5}{2} \frac{1}{u} - 4$$

$$\begin{cases} t^5 + 4t - 3,5 = 0 \\ u^5 + 4u + 3,5 = 0 \end{cases}$$

$$5t^4 + 4 = 0$$

$$t^4 = -\frac{4}{5} \phi$$

$$t^4 = -\frac{4}{5} \phi$$

$$\log_2 y = t$$

$$-t = u$$

$$\log_2 y = -\log_2 6x$$

$$\log_2 (6y) = 0$$

$$6yx = 1$$

$$yx = \frac{1}{6}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Шерковеев

$$ab = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$$

$$bc = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$$

$$ac = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ + 11 \\ + 17 \\ \hline 43 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ + 18 \\ + 32 \\ + 43 \\ \hline 75 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \overline{) 38} \\ 19 \end{array}$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{44}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^0$$

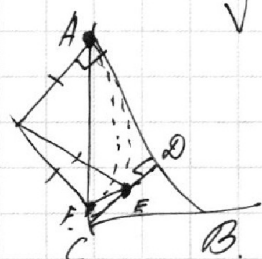
$$a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{42}$$

$$43 - 24 = 19$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ + 18 \\ \hline 32 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 324 \\ + 18 \\ \hline 92 \end{array}$$



$$\sqrt{2} \cdot \frac{5\pi}{2} - \frac{1}{4} = \frac{10 \cdot 12.79}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\frac{5\pi}{2} - \frac{1}{4} = \frac{10 \cdot 12.79}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\sqrt{3}$$

$$\sin \cos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{3\pi}{2} \approx 4.71$$

$$5$$

$$\frac{3\pi}{2} \approx \frac{9}{2} \approx 4.5$$

$$\sin \cos(\sin \cos(\sin x)) = \cos(\frac{3\pi}{2} + x)$$

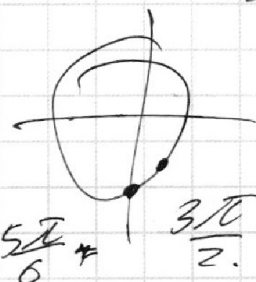
$$\sin x = \sin x$$

$$\sin x = \sin(x + 2\pi k)$$

$$\sin x = \cos(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5})$$

$$\sin x = \cos(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} - \frac{\pi}{2})$$

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} - \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x = \pi - \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{5} + \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 324 \\ \times 18 \\ \hline 2592 \\ 648 \\ \hline 5832 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ \times 18 \\ \hline 2592 \\ 648 \\ \hline 5832 \end{array}$$

$$\text{Черновик}$$
$$(20-2)^3 = 8000 -$$

$$- 6 \cdot 400 + 12 \cdot 20 - 8 =$$

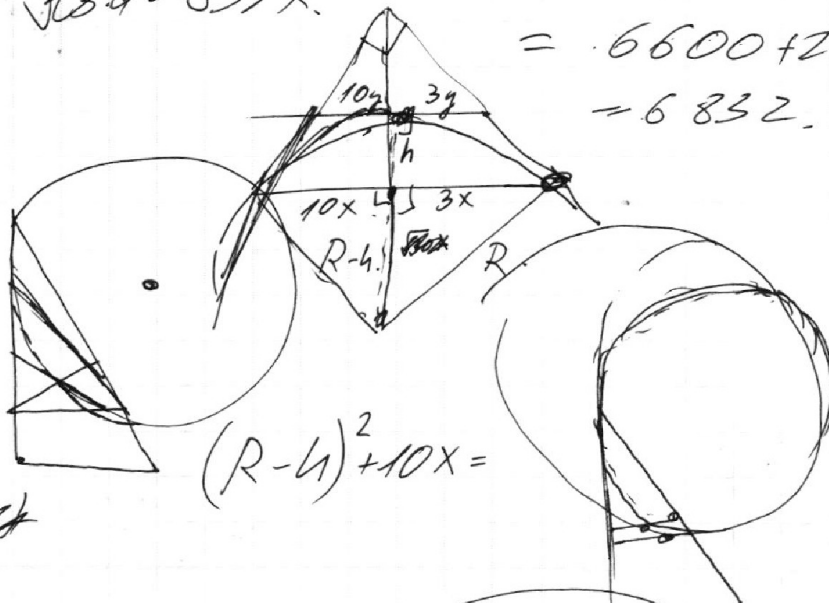
$$= 8000 - 2400 +$$

$$+ 240 - 8 =$$

$$= 6600 + 240 - 8 =$$

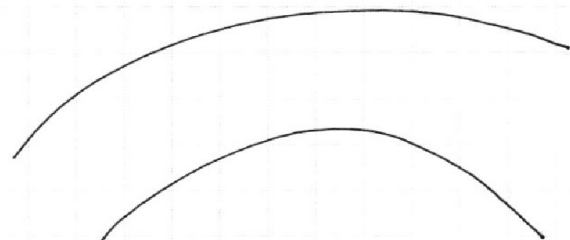
$$= 6832.$$

$$AC = \sqrt{324} \sqrt{39} x.$$

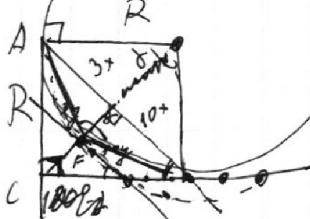


$$(R-h)^2 + 10x =$$

$$A+B=$$



$$R^2 = CE \cdot (CE + 2R).$$



$$R^2 = 3x \cdot 13x.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{1}{2}$

$$\frac{5\pi}{3}$$

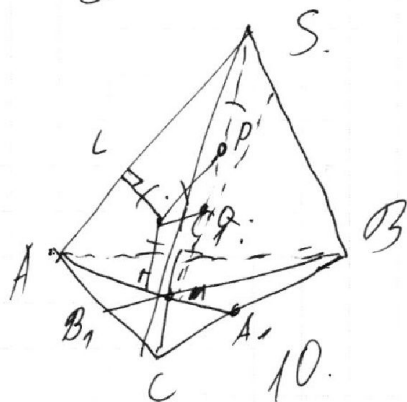
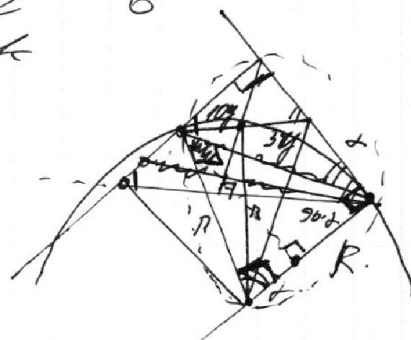
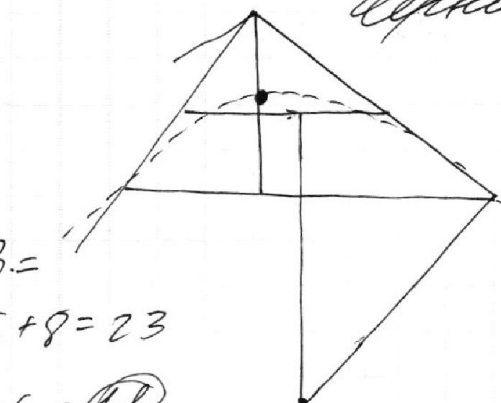
$$\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = 10\pi$$

Черновик

$$4 + 4 + 5 \cdot 3 =$$

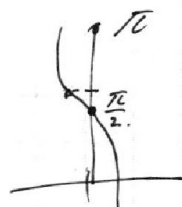
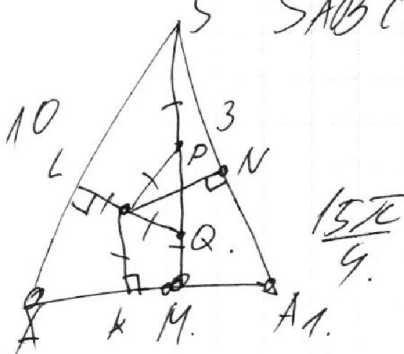
$$= 15 + 8 = 23$$

$$5 + 6 = 11$$



$$\angle ABC = 60^\circ$$

$$\angle ABC = 60^\circ$$



$$\frac{5\pi}{2}$$

$$\frac{3\pi}{2} + \pi$$

$$\frac{7\pi}{2}$$

$$-1. \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$5\pi$$

$$\frac{15\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{14\pi}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-\frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{13\pi}{4}$$

$$\frac{3\pi}{4} + \frac{6\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$$

$$\frac{9\pi}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{5\pi}{4}$$

$$\frac{5\pi}{4} + \frac{6\pi}{4} = \frac{11\pi}{4}$$