



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$$a = 2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot 5^{a_5}$$

$$b = 2^{b_2} \cdot 3^{b_3} \cdot 5^{b_5}$$

$$c = 2^{c_2} \cdot 3^{c_3} \cdot 5^{c_5}$$

чтобы выполнялись условия и
abc было наименьшим, никаких
других множителей в a, b и c
быть не должно.

$$ab \bmod 2^6 3^{13} 5^{11} \equiv 0, \text{ значит } \begin{cases} a_2 + b_2 \geq 6 \\ a_3 + b_3 \geq 13 \\ a_5 + b_5 \geq 11 \end{cases}$$

$$\text{аналогично } \begin{cases} a_2 + c_2 \geq 16; & a_3 + c_3 \geq 25; & a_5 + c_5 \geq 28; \\ b_2 + c_2 \geq 14; & b_3 + c_3 \geq 21; & b_5 + c_5 \geq 13 \end{cases}$$

сложивая ~~сложив~~ неравенства со степенями двойки,
тройки и пятёрки, получается:

$$\begin{cases} 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 36 \\ 2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 59 \\ 2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 52 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 + c_2 \geq 18 \\ a_3 + b_3 + c_3 \geq 30 \\ a_5 + b_5 + c_5 \geq 26 \end{cases}, \text{ т.к. } a, b, c \in \mathbb{N}, \\ a_2 + b_2 + c_2 \in \mathbb{Z}$$

$$a_2; b_2; c_2; a_3; \dots \geq 0, \text{ целые}$$

$$\text{добавим начальные условия: } \begin{cases} a_2 + b_2 + c_2 \geq 18 \\ a_3 + b_3 + c_3 \geq 30 \\ a_5 + b_5 + c_5 \geq 28 \end{cases}$$

$$abc = 2^{a_2 + b_2 + c_2} \cdot 3^{a_3 + b_3 + c_3} \cdot 5^{a_5 + b_5 + c_5}$$

$$\min(abc) = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}, \text{ такое возможно при } \begin{cases} a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{15} \\ b = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^0 \\ c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{13} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
□2
☒3
□4
□

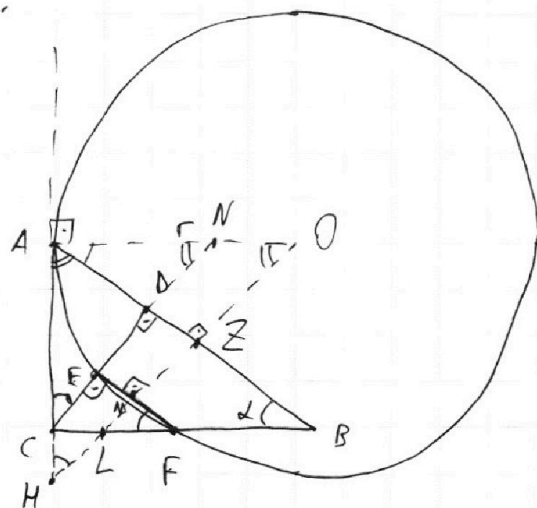
5

6
□7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N^o 2.

 $AB \parallel EF$

$$\frac{AB}{BD} = 1,4 = \frac{7}{5}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}$$

$$\angle ABC = \alpha$$

$$\angle EFC = \alpha, \text{ m.e. } AB \parallel EF$$

$$\angle CDB = 90^\circ, \angle CEF = 90^\circ, AB \parallel EF$$

$$\angle CAD = 90^\circ - \alpha, \text{ uz } \triangle ABC$$

$$\angle ACD = \angle ADC$$

$$\triangle ACB \sim \triangle CDB \text{ по 3 углам: } \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}$$

$$\frac{AB}{BD} = \left(\frac{BC}{BD} \right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 = \frac{1}{5}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{5}{7}} \quad ; \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$\tan \alpha = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\triangle ACD \sim \triangle CEF; \quad \frac{AC}{CF} = \frac{AD}{CE} = \frac{DC}{EF} = k; \quad \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = k^2$$

EF — хорда окружности, M — середина EF ; $\angle OMF = 90^\circ$

③ $OM \parallel CE$, $\angle ANC = 90^\circ - \alpha$; $\angle ODM = 90^\circ - \alpha$

$$C_L = LF$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$AO = r - \text{радиус}$$

$$OZ = \sin \alpha = r = \sqrt{\frac{2}{7}} r$$

$$MO = \frac{r}{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{7}{2}} r$$

$$ML = \frac{CL}{\sin \alpha}; \quad LF = \frac{ML}{\sin \alpha} \rightarrow CL = ML$$

$$\downarrow$$
$$\angle CMF = 90^\circ$$

$$\downarrow$$
$$M = E$$

$$\downarrow$$
$$N = 0$$

$$AN = r$$

$$\text{Ответ: } \frac{5}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 3.

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\sin x \in [-1; 1], \arccos(\sin x) \in [\arccos(1); \arccos(-1)] = [0; \pi]$$

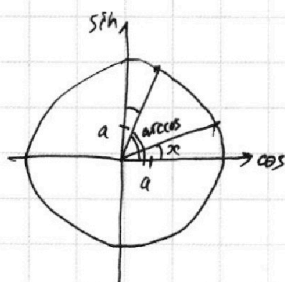
$$0 \leq 10 \arccos(\sin x) \leq 10\pi$$

$$0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$-9\pi \leq -2x \leq \pi$$

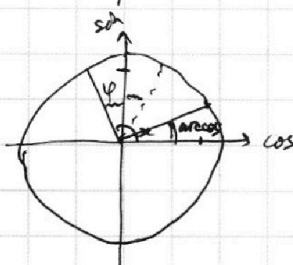
$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2}$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n, x \in \left[2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$$



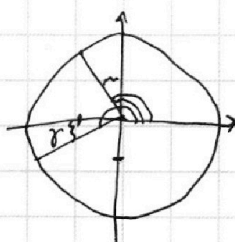
$$\arccos(\sin x) = \varphi = (x - 2\pi n) - \frac{\pi}{2}, x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right]$$

$$\varphi = x - \frac{\pi}{2} - 2\pi n$$



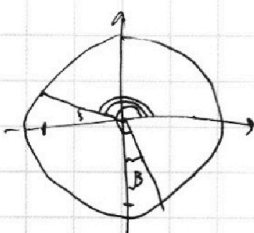
$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} + \gamma = x - \frac{\pi}{2} - 2\pi n, x \in \left[\pi + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$$

$$\gamma = x - \pi - 2\pi n$$



$$\arccos(\sin x) = \pi - \beta = \frac{5\pi}{2} - x - 2\pi n, x \in \left[\frac{3\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n\right]$$

$$\beta = x - \frac{3\pi}{2} - 2\pi n$$



~~или~~

~~$$\arccos(\sin x) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2\pi n, x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi n\right]$$~~
~~$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x - 2\pi n$$~~

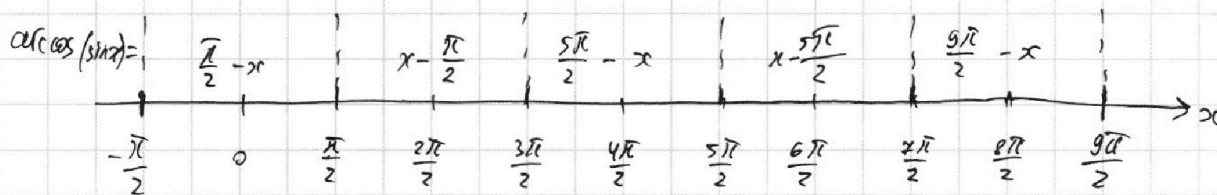
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$1) \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]: \quad 5\pi - 10x = 9\pi - 2x \quad \leftarrow \text{подстановка случаев в исходное уравнение}$$

$$8x = -4\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2} \quad (+)$$

$$2) \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]: \quad 10x - 5\pi = 9\pi - 2x$$

$$12x = 14\pi$$

$$x = \frac{7}{6}\pi \quad (+)$$

$$3) \quad x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]: \quad 25\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$8x = 16\pi$$

$$x = 2\pi \quad (+)$$

$$4) \quad x \in \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]: \quad 10x - 25\pi = 9\pi - 2x$$

$$12x = 34\pi$$

$$x = \frac{17}{6}\pi \quad (+)$$

$$5) \quad x \in \left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]: \quad 45\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$8x = 36\pi$$

$$x = \frac{9}{2}\pi \quad (+)$$

$$\text{Ответ: } x \in \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{7}{6}\pi; 2\pi; \frac{17}{6}\pi; \frac{9}{2}\pi \right\}$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.

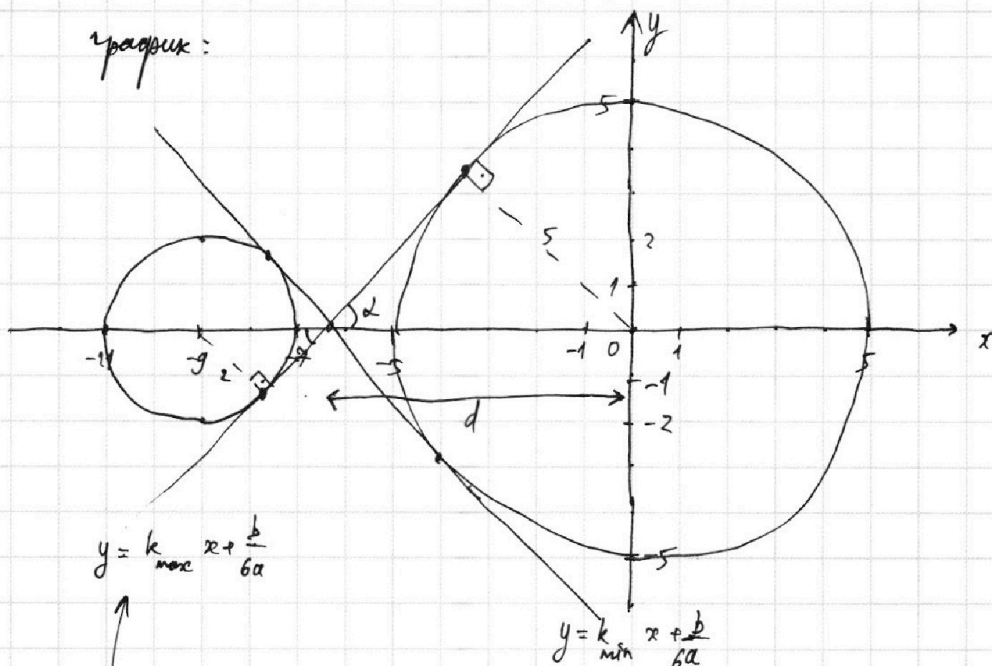
① $\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \end{cases}$

② $\begin{cases} (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$

②: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ x^2 + y^2 + 18y + 77 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ x^2 + (y + 9)^2 = 2^2 \end{cases}$

график:



①: $6ay = b - 5x$

$y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$ — прямая с наклоном $-\frac{5}{6a} = k$

когда прямая пересекает обе окружности — 4 решения

крайние случаи: прямая касается обеих окружностей

при $k \geq k_{\max}$ или $k \leq k_{\min}$ нельзя подобрать b , чтобы было 4 решения.

из-за симметрии графика относительно Ox , $k_{\min} = -k_{\max}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\operatorname{tg} \alpha = k_{\max}$$

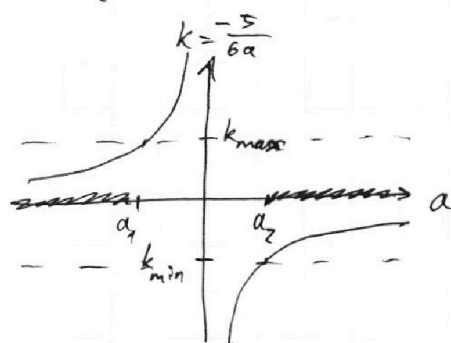
$$\sin \alpha = \frac{5}{d} = \frac{2}{9-d}; \quad 45-5d = 2d; \quad 7d = 45; \quad d = \frac{45}{7}$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{\frac{45}{7}} = \frac{7}{9}; \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{7}{4\sqrt{2}} = k_{\max}; \quad k_{\min} = -\frac{7}{4\sqrt{2}}$$

$$-\frac{5}{6a_1} = k_{\max}; \quad 42a_1 = -20\sqrt{2}; \quad a_1 = -\frac{10\sqrt{2}}{21}$$

$$-\frac{5}{6a_2} = k_{\min}; \quad 42a_2 = 20\sqrt{2}; \quad a_2 = \frac{10\sqrt{2}}{21}$$



$$k_{\max} < k < k_{\min}$$

$$\begin{cases} a < a_1 \\ a > a_2 \end{cases}$$

$$a \in \left(-\infty; -\frac{10\sqrt{2}}{21}\right) \cup \left(\frac{10\sqrt{2}}{21}; +\infty\right)$$

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{10\sqrt{2}}{21}\right) \cup \left(\frac{10\sqrt{2}}{21}; +\infty\right).$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} \log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} (11)^{-2} - 5 \\ \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{(0,5y)^5} (11)^{-13} - 5 \end{cases}$$

$$\textcircled{1}: \quad \log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} x} - 5$$

$$x > 0, \quad x \neq 1; \quad t = \log_{11} x$$

$$t^5 - 6 = -\frac{2}{3} - 5t$$

$$3t^5 + 15t = 16$$

$$\textcircled{2}: \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} = -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} - 5$$

$$0,5y > 0, \quad 0,5y \neq 1; \quad p = \log_{11} (0,5y)$$

$$p^5 + 1 = -\frac{13}{3} - 5p$$

$$3p^5 + 15p = -16$$

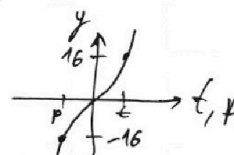
$$\begin{cases} 3t^5 + 15t = 16 \\ 3p^5 + 15p = -16 \end{cases}, \quad \begin{matrix} t = \log_{11} x \\ p = \log_{11} (0,5y) \end{matrix}$$

$3t^5 + 15t$ и $3p^5 + 15p$ — возрастающие функции, симметричные относительно OY .

$$\begin{aligned} t &= -p \\ t + p &= 0 \end{aligned}$$

$$\log_{11} (x \cdot 0,5y) = 0, \quad 0,5xy = 1; \quad xy = 2$$

Ответ: 2



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

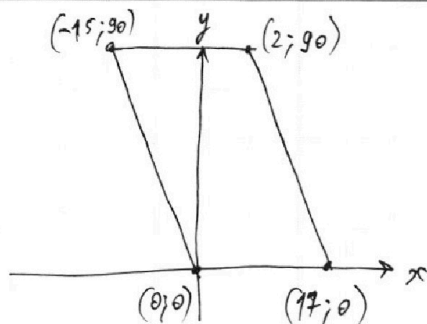
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6.



уравнение левой стороны
параллелограмма: $y = -6x$,
 $y \in [0; 90]$

правой: $y = -6x + 104$,
 $y \in [0; 90]$

точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$: $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$

$$y_2 = (48 + 6x_1 + y_1) - 6x_2$$

при фиксированной точке A , $y_2 = -6x_2 + k$, $k = 48 + 6x_1 + y_1$

на такой прямой 0; 15 или 16 точек с целыми
координатами, которые попадают в параллелограмм

15 если k не делится на 6, 16 если делится

из уравнений сторон параллелограмма $k \in [0; 104]$, $k \in \mathbb{Z}$

$$n = 6x_1 + y_1 = k - 48$$

↑
15 или 16 точек B

$$n \in [-48; 56]$$

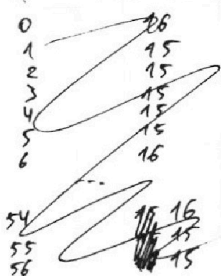
$$y_1 = n - 6x_1, y_1 \in [0; 90] \rightarrow n \in [0; 104] \rightarrow n \in [0; 56]$$

$k = n + 48$, 48 делится на 6

если n делится на 6, то 16 точек B , иначе 15.

$$\sum \text{количество } B = 16 \cdot 10 + 15 \cdot 5 \cdot 9 + 15 \cdot 2 =$$

$$= 160 + 130 + 675 = 865$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

при каждом n , A лежит на прямой $y_1 = n - 6x_1$,

16 или 15 точек A по такой же правилу.

n	кол-во B	кол-во A	вариантов пар $A; B$
0	16	16	256
1	15	15	225
2	15	15	225
3	15	15	225
4	15	15	225
5	15	15	225
6	16	16	256
...	...	...	...
54	16	16	256
55	15	15	225
56	15	15	225

$$\begin{aligned} \sum \text{вариантов} &= 256 \cdot 10 + 9 \cdot 5 \cdot 225 + 225 \cdot 2 = \\ &= 2560 + 450 + 10125 = 13135 \end{aligned}$$

$y_2 = -6x_2 + n + 48 \rightarrow$ ~~B всегда выше~~ B на прямой,
которая выше, чем прямая A .
 $\downarrow$
 нет пар $(A; B), (B; A)$,
 сумму делить не надо

Ответ: 13135

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt[10]{1.} \quad a = 2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot 5^{a_5}; \quad b = 2^{b_2} \cdot 3^{b_3} \cdot 5^{b_5}; \quad c = 2^{c_2} \cdot 3^{c_3} \cdot 5^{c_5}$$

$$ab: 2^6 3^{13} 5^{11} \rightarrow a_2 + b_2 \geq 6; a_3 + b_3 \geq 13; a_5 + b_5 \geq 11$$

$$bc \rightarrow b_2 + c_2 \geq 14; b_3 + c_3 \geq 21; b_5 + c_5 \geq 13$$

$$ac \rightarrow a_2 + c_2 \geq 16; a_3 + c_3 \geq 25; a_5 + c_5 \geq 28$$

$$abc = 2^{a_2+b_2+c_2} \cdot 3^{a_3+b_3+c_3} \cdot 5^{a_5+b_5+c_5}$$

$$2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 36$$

$$abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

$$2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 59$$

$$2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 52$$



$$S_{ABC} = S_{ADC} +$$

$$a_2 + c_2 + b_2 \geq \max\left(\frac{36}{2}; a_2 + b_2; b_2 + c_2; a_2 + c_2\right) = 18 + S_{BCD} =$$

$$a_3 + b_3 + c_3 \geq 30$$

$$a_5 + b_5 + c_5 \geq 28$$

$$abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28} = S_{ADC} + \frac{k}{\tan \alpha} S_{CEF} =$$

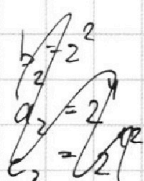
$$= S_{ADC} + \frac{k \cdot AB}{k^2 S_{CEF}} S_{CEF}$$

$$AB \parallel EF$$

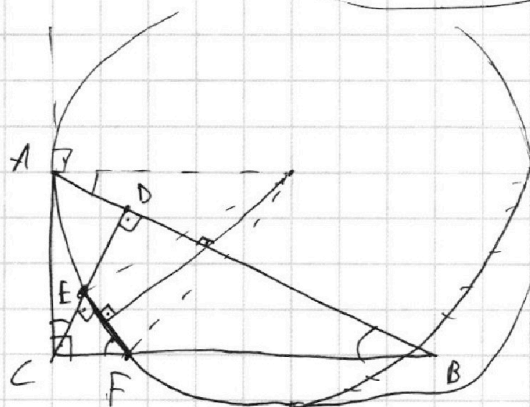
$$\frac{AB}{DB} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}$$

$$AD = \frac{2}{5} DB$$



Р2.



$$\frac{BC}{CF} = \frac{DC}{EC} = \frac{DC}{\tan \alpha \cdot EF} =$$

$$= k \cdot \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$\angle CDB = 90^\circ = \angle CEF$$

$$\angle ACD = \alpha; \angle CAD = 90^\circ - \alpha; \angle ECF = 90^\circ - \alpha; \angle EFC = \alpha; \angle ABC = \alpha$$

$$\triangle ADC \sim \triangle CEF; \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} =$$

$$\triangle ACB \sim \triangle CDB; \frac{AB}{CB} = \frac{CB}{BD}; \frac{AB}{BD} = \left(\frac{CB}{BD}\right)^2 = \frac{49}{25}; \cos \alpha = \frac{5}{7} = \frac{BD}{CB}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2. прог.

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{49-25}{49}} = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

№3.

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\sin x \in [-1; 1]$$

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$\arccos(\sin x) \in [\arccos(1); \arccos(-1)]$$

$$\arccos(\sin x) \in [0; \pi]$$

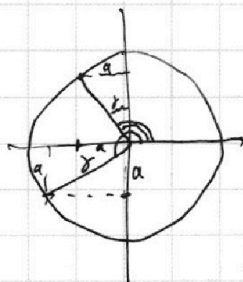
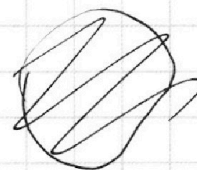
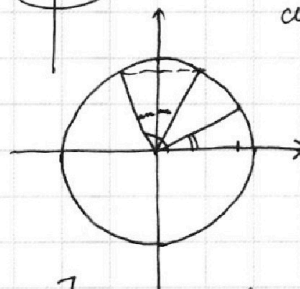
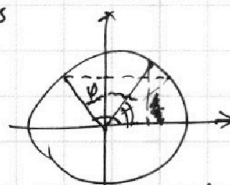
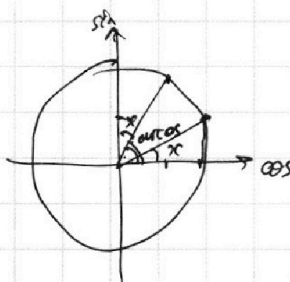
$$x \in \left[0 + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]: \arccos = \frac{\pi}{2} - x$$

$$x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right]:$$

$$\arccos = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \varphi$$

$$\varphi = x - \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos = x - \frac{\pi}{2}$$



$$\varphi = x - \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos = \frac{\pi}{2} + \varphi$$

$$= x - \frac{\pi}{2}$$

$$x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$$

$$0 \leq 10 \arccos \leq 10\pi$$

$$0 \leq 9\pi - 2x \leq 9\pi$$

$$-9\pi \leq -2x \leq \pi$$

$$\frac{9\pi}{2} \geq x \geq -\frac{\pi}{2}$$

$$\arccos = \pi - \beta$$

$$\beta = x - \frac{3\pi}{2}$$

$$\arccos = \frac{5\pi}{2} - x$$

$$x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi(n+1)\right]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

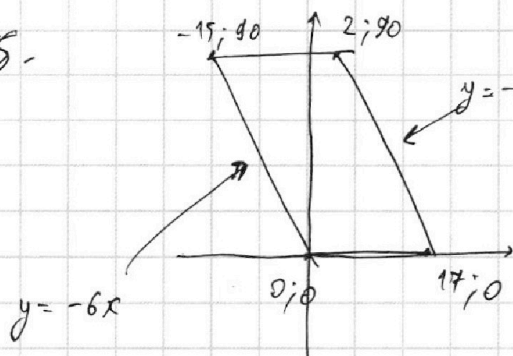
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

реш.



$$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$$

Зафиксируем $A(x_1; y_1)$

$$6x_2 + y_2 = 48 + 6x_1 + y_1$$

$$y_2 = (48 + 6x_1 + y_1) - 6x_2$$

на $y = -6x + k : \leq 16$ точек с целыми координатами.
 $y \in [0; 90]$

$k = 0 : 16$

$k \in [1; 6] : 15$

$k \in [7; 12] : 14$

$k \in [13; 18] : 13$

$k \in [19; 24] : 12$

$k \in [25; 30] : 11$

$k \in [31; 36] : 10$

$k \in [37; 42] : 9$

$k \in [43; 48] : 8$

$k \in [49; 54] : 7$

$k \in [55; 60] : 6$

$k \in [61; 66] : 5$

$k \in [67; 72] : 4$

$k \in [73; 78] : 3$

$k \in [79; 84] : 2$

$k \in [85; 90] : 1$

$k \bmod 6 = 0 : 16$ точек

$k \bmod 6 \neq 0 : 15$ точек

$k = 48 + 6x_1 + y_1$

$k \in [0; 104]$

$6x_1 + y_1 \in [-48; 56] = n$

$y_1 = n - 6x_1 \rightarrow n \in [0; 104] = [0; 56]$

$n \bmod 6 = 0 : 10$ точек

$n \bmod 6 \neq 0 : 15$ точек

n кол-во точек

0 16

1 15

2 15

3 15

4 15

5 15

6 16

7 15

8 16

9 15

10 15

$\Sigma = 16 \cdot 10 + 15 \cdot 5 + 15 \cdot 2 =$

$= 160 + 75 + 30 = 265$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 15 \\ \hline 225 \\ + 450 \\ \hline 675 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10125 \\ + 2560 \\ \hline 12685 \\ + 450 \\ \hline 13135 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1675 \\ + 190 \\ \hline 865 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1125 \\ + 900 \\ \hline 2025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 15 \\ \hline 225 \\ + 450 \\ \hline 675 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1675 \\ + 190 \\ \hline 865 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 16 \\ \hline 256 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a_2 - b_2 \geq 2; a_2 + b_2 \geq 6; a_2 = 4; b_2 = 2; c_2 = 12$$

$4 + 2 + 12 = 12 + 6 = 18$

$$a_3 - b_3 \geq 4; a_3 + b_3 \geq 13; a_3 = 9; b_3 = 4; c_3 = 17$$

$17 + 9 = 20 + 6 = 26$
 $26 + 4 = 30$

$$a_5 - b_5 \geq 28 - 13 = 15; a_5 + b_5 \geq 11; a_5 = 15; b_5 = 0; c_5 = 13$$

$15 + 13 = 28$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 5. 1) $\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = \log_x 3 \frac{1}{121} - 5$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6 \log_{11} 11}{\log_{11} x} = \frac{-2}{3} \log_x 11 - 5$$

$$t = \log_{11} x, \quad x > 0, x \neq 1$$

$$t^4 - \frac{6}{t} = \frac{-2}{3 \cdot t} - 5 \quad / \cdot 3t, t \neq 0, x \neq 1$$

$$3t^5 - 18 = -2 - 15t$$

$$3t^5 + 15t - 16 = 0$$

2) $\log_{11}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} = \log_{(0,5y)} 3 (11^{-13}) - 5$

$$p = \log_{11} (0,5y)$$

$$p^4 + \frac{1}{p} = \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} - \frac{13}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} p} - 5 \quad / \cdot 3p$$

$$3p^5 + 3 = -13 - 15p$$

$$3p^5 + 15p + 16 = 0$$

$$t = -p$$

$$\log_{11} x + \log_{11} (0,5y) = 0$$

$$\log_{11} (0,5xy) = 0$$

$$0,5xy = 1; \quad xy = 2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

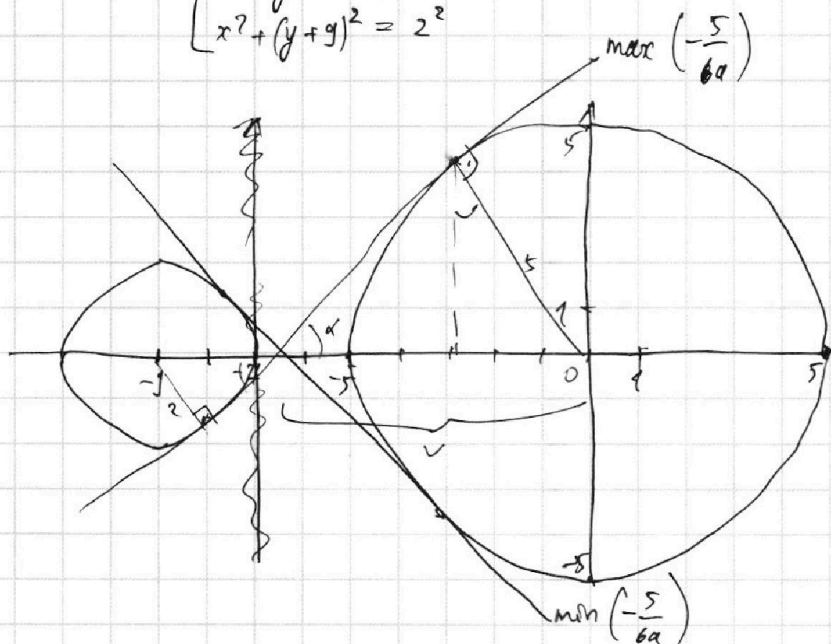
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 4.

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ x^2 + (y+9)^2 = 2^2 \end{cases}$$



$$\frac{21^{10} - 49}{32}$$

$$5x + 6ay - b = 0: \quad 6ay = b - 5x; \quad y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{4\sqrt{2}} = \frac{5}{4\sqrt{2}}; \quad 45 - 5V = 2V; \quad 7V = 45; \quad V = \frac{45}{7}$$

$$\sin \alpha = \frac{7}{9}; \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{49}{81}} = \sqrt{\frac{32}{81}} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

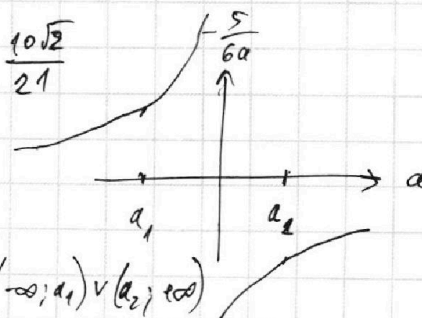
$$\tan \alpha = \max\left(-\frac{5}{6a}\right) = \frac{7 \cdot 9}{9 \cdot 4\sqrt{2}} = \frac{7}{4\sqrt{2}}$$

$$\min\left(-\frac{5}{6a}\right) = -\frac{7}{4\sqrt{2}}$$

$$-\frac{5}{6a_1} = \frac{7}{4\sqrt{2}}; \quad 42a_1 = -20\sqrt{2}; \quad a_1 = -\frac{10\sqrt{2}}{21}$$

$$-\frac{5}{6a_2} = -\frac{7}{4\sqrt{2}}; \quad a_2 = \frac{10\sqrt{2}}{21}$$

$$a \in \left(-\frac{10\sqrt{2}}{21}, \frac{10\sqrt{2}}{21}\right)$$



$$a \in (-\infty; a_1) \cup (a_2; +\infty)$$