



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5.1

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$ab: 2^9 3^{10} 5^{10} \quad \text{т.е. } ab = k \cdot 2^9 3^{10} 5^{10}$$

$$bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13} \quad \text{т.е. } bc = t \cdot 2^{14} 3^{13} 5^{13}$$

$$ac: 2^{15} 3^{18} 5^{30} \quad \text{т.е. } ac = p \cdot 2^{15} 3^{18} 5^{30}$$

Тогда можно записать следующие системы неравенств.

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 9 & (5) \\ a_2 + c_2 \geq 19 \\ b_2 + c_2 \geq 14 \end{cases} \quad \begin{cases} b_3 + a_3 \geq 10 & (2) \\ b_3 + c_3 \geq 13 \\ a_3 + c_3 \geq 18 \end{cases} \quad \begin{cases} a_5 + b_5 \geq 10 & (3) \\ b_5 + c_5 \geq 13 \\ a_5 + c_5 \geq 30 \end{cases}$$

где $a_i; b_i; c_i$ - это степень i которая входит

в a, b , или c соответственно.

$$\text{т.к. } a, b, c \in \mathbb{N} \quad \text{то } a_i; b_i; c_i \geq 0 \text{ и } i \in \mathbb{Z}.$$

~~$$b_2 \geq 2, \quad c_2 - b_2 \geq 10.$$~~

~~$$c_3 - a_3 \geq 3.$$~~

~~$$2c_2 \geq 24$$~~

~~$$2c_3 \geq 21$$~~

мин решаем

этих нерав.

~~$$(a_2, b_2, c_2) =$$~~

~~$$a_2 \geq 7$$~~

~~$$c_3 \geq 10,5$$~~

т.е. мин c_3 может быть равно 11

~~$$b_3 \geq 2,5$$~~

~~$$a_3 \geq 7,5$$~~

~~$$(7; 2; 12)$$~~

~~$$b_2 \geq 2$$~~

(2) можно из нерав.

$$2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 41$$

$$\text{т.к. } a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{N}$$

$$\text{значит то } (a_3; b_3; c_3) =$$

$$a_3 + b_3 + c_3 \geq 20,5$$

$$\text{мин значение суммы } a_3 + b_3 + c_3 \geq 21$$

$$= (7, 3, 11)$$

логично.



1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

③ можно 3 пераб. :

$$2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 26,5$$

$$a_5 + b_5 + c_5 \geq 13,25$$

$$\text{т.е. } a_5 + b_5 + c_5 \geq 13$$

$$\text{т.е. } a_5 + b_5 + c_5 \geq 13$$

Заметим, что одну из

$$(a_5; b_5; c_5) =$$

$$(10; 0; 20)$$

однако заметим, что есть такое пераб.

$$a_5 + c_5 \geq 30 \quad \text{т.к. все в целых пераб. числах}$$

и можно сразу ограничить, что $a_5 + b_5 + c_5 \geq 30$ и мин. значение равно 30.

② можно 3 пераб.:

$$2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 42$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 21$$

$$\text{мин значение } 21 \text{ при } (a_2; b_2; c_2) = (7; 7; 12)$$

$$\text{поэтому } abc = 2^{7+7+12} \cdot 3^{10+10+20} \cdot 5^{7+3+11} = 2^{26} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

и.н. жор.

или мин жор. $a_i \neq b_i + c_i$

$$\text{Ответ: } 2^{26} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 2

Дано:

$\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$)

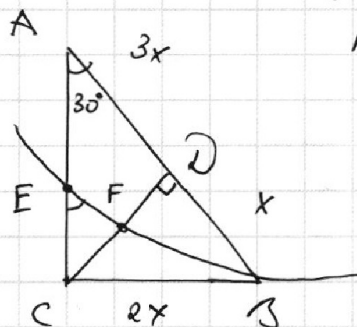
$AB \parallel EF$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{1}$$

CD - высота.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$$

Решение:



из теоремы о отрезках
в треугольнике $\triangle$
 ACB и высоте CD :

$$AC = \sqrt{AD \cdot AB} =$$

$$2x\sqrt{3}$$

$$CB = \sqrt{CD \cdot CA} =$$

$$2x$$

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB} =$$

$$x\sqrt{3}$$

$$\text{Пусть } DB = x \Rightarrow AD = 3x \Rightarrow AB = 4x$$

заменим, что $2CB = AB \Rightarrow$ в т. $\triangle ABC$

$$\angle CAB = 30^\circ \text{ и } \angle CBA = 60^\circ$$

т.к. $EC \parallel AB$ и $4x$ -мк $AEFB$ вписан в $\square$.
и $AE \parallel FB$

и $AB \parallel EF$ $AEFB$ - трапеция, которая равнобедренная.

тогда $\angle EAB = \angle FBA = 30^\circ \Rightarrow FB$ - биссектр.

$$\angle CBD \quad (\angle CBD = 60^\circ \quad \angle FBD = \frac{1}{2} \angle CBD = 30^\circ)$$

$$\Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{FD}{DB} \Rightarrow \frac{CF}{FD} = \frac{CB}{DB} = \frac{2}{1} \quad CF = 2FD.$$

$$FD = \frac{CF}{2}$$

т.к. $FE \parallel AB$ то.

$$\angle EFL = \angle ADC = 90^\circ = \angle ACB.$$

$$\angle CEF = \angle CAB = 30^\circ$$

$\Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle ABC \Rightarrow$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \left(\frac{CB}{CF} \right)^2 = \left(\frac{2x\sqrt{3}}{2x} \right)^2 = 3$$

$$FD + CF = x\sqrt{3}.$$

$$\frac{3}{2} CF = x\sqrt{3}.$$

$$CF = \frac{2x\sqrt{3}}{3} = \frac{2x}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: 3.



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

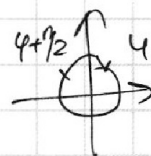
№ 3.

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \pi/2. \quad \arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$

$$\text{ОДЗ: } \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \leq \frac{\pi}{2} \quad \frac{x}{5} \leq \frac{2\pi}{5} \quad x \leq 2\pi$$

$$\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \geq -\frac{\pi}{2} \quad \frac{x}{5} \geq -\frac{3\pi}{5} \quad x \geq -3\pi.$$

$$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$



$$\cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$a, b \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} x = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{2} + 2\pi a = \frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5} + 2\pi a \\ x = -\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{2}\right) + 2\pi b = -\frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5} + 2\pi b \end{cases}$$

$$\frac{4}{5}x = -\frac{2}{5}\pi + 2\pi a, \quad \frac{6}{5}x = \frac{2}{5}\pi + 2\pi b,$$

$$4x = -2\pi + 10\pi a, \quad a \in \mathbb{Z} \quad 6x = 2\pi + 10\pi b, \quad b \in \mathbb{Z}$$

$$1) \quad x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi a, \quad 2) \quad x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi b,$$

$$1) \quad -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi a \leq 2\pi. \quad -\frac{5\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi a \geq -\frac{3\pi}{5} \quad 3 - \frac{1}{2} = 2,5$$

$$\frac{5}{2}a \leq 2,5$$

$$5a \leq 5$$

$$a \leq 1$$

$$a \in \{-1; 0; 1\}$$

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi a \geq -3\pi.$$

$$\frac{5}{2}a \geq -2,5.$$

$$a \geq -1$$

$$2) \quad \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi b \leq 2\pi$$

$$1 + 5b \leq 6$$

$$5b \leq 5 \quad b \leq 1$$

$$\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi b \geq -3\pi$$

$$1 + 5b \geq -9. \quad b \geq -\frac{8}{5}$$

$$5b \geq -8 \quad b \geq -1,6$$

$$\text{т.е. } b \in \{-1; 0; 1\}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

тогда $x = -\frac{n}{2} - \frac{5}{2}n = -\frac{6n}{2} = -3n.$

$$x = -\frac{n}{2}.$$

$$x = -\frac{n}{2} + \frac{5}{2}n = 2n.$$

$$x = \frac{n}{3} + \frac{5n}{3} = 2n$$

$$x = \frac{n}{3} - \frac{5n}{3} = -\frac{4n}{3}$$

$$x = \frac{n}{3}.$$

Ответ: $x = \left\{ -3n; -\frac{4n}{3}; -\frac{n}{2}; \frac{n}{3}; 2n \right\}$



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4.

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$(2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & \text{— окружность с центром в } (0; 0) \text{ и радиусом } 3. \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \end{cases}$$

$$(x - 6)^2 + y^2 = 4 \quad \text{— окружность с центром в } (6; 0) \text{ и радиусом } 2.$$

$$(1) 2y = 3b - ax$$

$$y = -\frac{a}{2}x + 1,5b$$

Также заметим, что параметр b отвечает за

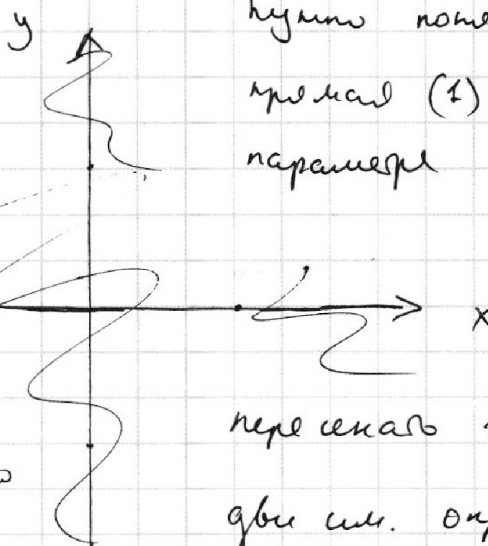
угловую

частоту вращения

от оси абсцисс

(вплоть до значения 0) и т.д.

в произвольный параметр угловой частоты b может быть a — задает наклон прямой.



линию поворота когда

прямая (1) при любом параметре b не будет

пересекать в 4х точках

двух или окружностей.

(прямая (окружность) может пересекать макс в 2х точках)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

☐

3

9

4

☒

5

7

6

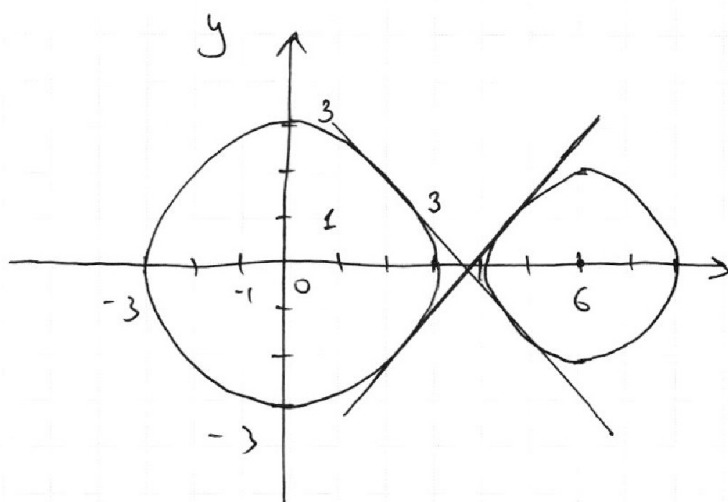
7

7

7

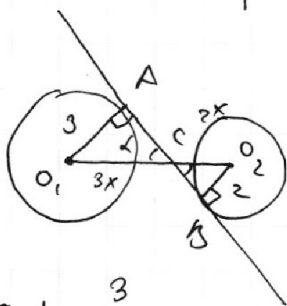


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Значит по
граничным
условиям это все
касательные
(общие внутр.)
и гранич. оп.

перелетел крышу
нас. Вспомнил она
Будет перелетать отсюда. Опр.
в двух окнах и вверху
не пере. Вспомнил не переотн.



$$\triangle O_1AC \sim \triangle CO_2B$$

$$\frac{O_1 A}{O_2 B} = \frac{O_1 C}{C O_2} = \frac{3}{2}$$

$$O_1C + CO_2 = 6$$

$$\begin{array}{ll} 5x = 6 & O, C = \frac{18}{r} \\ x = \frac{6}{5} & O_2C = \frac{12}{r} \end{array}$$

$$O_2C = \frac{12}{71}$$

gandhi cum mba

будет ув. $\angle$ наклон
прямой (меньший
 $\angle$) по ситуации

Судя аналогичной
оценке в печати всех
исполнителей, в первую
очередь.

4. скаменено гиле бокор
на селушкы

$$a = -\frac{10}{\sqrt{11}}$$

$$r.e \quad \frac{-a}{2} = \frac{-5}{\sqrt{11}} \quad (\text{orig. hamon.})$$

$$a = \frac{+10}{\sqrt{11}}$$

Pręga gnie $a \in (-\infty; -\frac{10}{\sqrt{11}}] \cup [\frac{10}{\sqrt{11}}; +\infty)$

Численные значения не имеют при н.д. б.
где вех остальных значений а можно найти. ^{похо}
в, то прямая будет пересекать где оир. в ^{такой} двух
точках касания. I.e Ответ:

$$a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}} ; \frac{10}{\sqrt{11}} \right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5.5

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8$$

$$x > 0$$

$$x \neq 1$$

$$243 = 3^5$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x^3 - \frac{5}{2} \log_x^3 = -8.$$

$$\log_3^4 x + 3,5 \log_x^3 = -8. \quad \log_3^4 x + \frac{3,5}{\log_3 x} = -8.$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} 3^{11} - 8$$

$$5y > 0 \quad y > 0$$

$$5y \neq 1 \quad y \neq \frac{1}{5}$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y}^3 - \frac{11}{2} \log_{5y}^3 = -8.$$

$$\log_3^4 (5y) - 3,5 \log_{5y}^3 = -8. \quad \log_3^4 5y - \frac{3,5}{\log_3 5y} = -8$$

Рассмотрим выражение

$$\log_3^4 t + \frac{3,5}{\log_3 t} = -8. \quad \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \quad \log_3^4 t + \frac{3,5}{-\log_3 t} = \log_3^4 t + \frac{3,5}{\log_3 \frac{1}{t}} \quad \textcircled{2}$$

$$\log_3^4 \frac{1}{5y} + \frac{3,5}{\log_3 5y} = \log_3^4 x + \frac{3,5}{\log_3 x} = \log_3^4 \frac{1}{t} + \frac{3,5}{\log_3 \frac{1}{t}}.$$

$$\log_3^4 \frac{1}{5y} + \frac{3,5}{\log_3 \frac{1}{5y}} = \log_3^4 x + \frac{3,5}{\log_3 x} \quad \text{т.е.} \quad \log_3^4 t - \frac{3,5}{\log_3 t} = \log_3^4 \frac{1}{3t} + \frac{3,5}{\log_3 \frac{1}{3t}}.$$

$$\log_3^4 \frac{1}{5xy} + 3,5 \left(\frac{\log_3 x 5y}{\log_3 \frac{1}{5y} \log_3 x} \right) = 0.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3^4 5xy + \frac{3,5 \log_3 5xy}{\log_3 \frac{1}{xy} \log_3 x} = 0.$$

$$\log_3 5xy \left(\log_3^3 5xy + \frac{3,5}{\log_3 \frac{1}{xy} \log_3 x} \right) = 0.$$

$$\log_3 5xy = 0$$

$$5xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{5}.$$

$$\log_3^3 5xy = -\frac{3,5}{\log_3 \frac{1}{xy} \log_3 x}$$

$$\left(\log_3 5xy + \log_3 5x \right)^3 \log_3 xy \log_3 x = 3,5.$$

$$(a+b)^3 = \frac{3,5}{ab}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

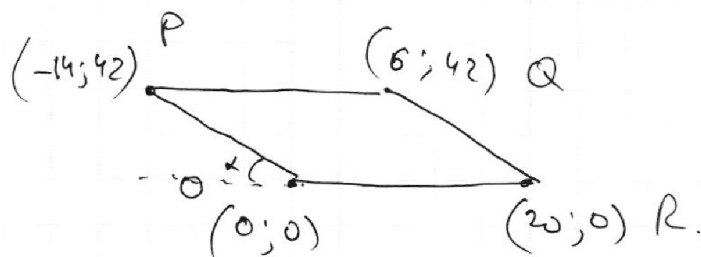
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

56



$$A(x_1; y_1) \quad B(x_2; y_2)$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$k_{PQ} = \frac{42}{14} = \frac{6}{2} = 3$$

т.е. прямая PO имеет вид $y = -3x$

$$PQ: y = 42$$

$$OR: y = 0$$

$$QR: y = -3x + b$$

$$0 = -60 + b$$

$$b = 60$$

$$y = -3x + 60$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 3\Delta x + \Delta y = 33$$

§

$$\Delta y = 33 - 3\Delta x$$

$$\Delta y_{\max} = 42 - 0 = 42$$

$$\Delta y_{\min} = 0 - 42 = -42$$

$$\Delta x_{\max} = 20 - 0 = 20$$

$$\Delta x_{\min} = 0 - 20 = -20$$

$$33 + 60 = 93$$

$$33 - 3\Delta x = 42$$

$$-9 = 3\Delta x$$

$$\Delta x = -3$$

$$33 + 6 = 39$$

$$33 - 3\Delta x = -42$$

$$75 = 3\Delta x$$

$$\Delta x = 25$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ -33 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ -33 \\ \hline 27 \end{array}$$

возмож.

т.е. все вар. 24. Ответ: 24.

Δx	Δy
-20	93
-19	...

-3	42
-2	39
-1	36
0	33
1	30
2	27
3	24
...	...
20	-21

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

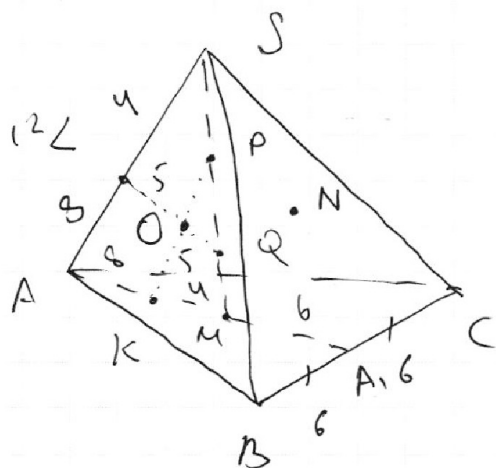
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 7



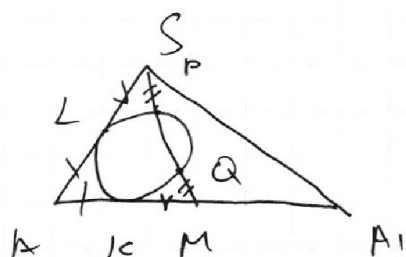
$$SQ = PM$$

$$SP = MQ \quad (\text{не равно нулю})$$

расстоян. от. верш. верш
P и Q до точек
соедин. равны)

$$S_{\triangle ABC} = 90$$

$$SA = BC = 12$$



$AL = AK$ — отрезки кас. к ω

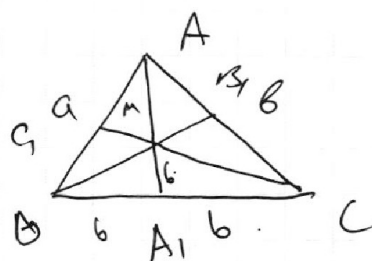
$$SL = \sqrt{SP \cdot SQ} = \sqrt{MQ \cdot MP} = 10$$

$$\text{т.е. } SA = AM = 12$$

$$AM = \frac{2}{3} AA_1$$

$$12 = \frac{2}{3} AA_1, \quad AA_1 = 18$$

пусть $AB = AC = b$.



$$\sqrt{\frac{2a^2 + 2b^2 - 12^2}{4}} = 18.$$

$$2a^2 + 2b^2 - 144 = 324.48$$

$$2a^2 + 2b^2 = 1440 \quad || : 2$$

$$a^2 + b^2 = 720$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \sqrt{18} \\ 144 \\ + 181 \\ \hline 324 \\ \times 324 \\ \hline 1296 \\ + 144 \\ \hline 1440 \end{array}$$

$$CG = \sqrt{\frac{2 \cdot 144 + 2b^2 - a^2}{4}}$$

$$BB_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 144 + 2a^2 - b^2}{4}}$$

$$AA_1 : BB_1 : CC_1 = \frac{18}{4} : \frac{18}{4} : \frac{18}{4} = 1 : 1 : 1$$

Заметим, что $\triangle BMC$ — прямоугольный, MA_1 — мед. $= \frac{1}{2} BC = 6$.

т.е. $\angle BMC = 90^\circ$ тогда $BM \cdot MC = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} = 30$.

$$BM = \frac{2}{3} BB_1$$

$$MC = \frac{2}{3} CG$$

(из того что BM ; MC и AM — мед.
а мед. гипот. равен $S_{\triangle} \cdot \frac{1}{2}$)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} BB_1 CC_1 = 30 \quad | \cdot AA_1$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \frac{15}{30} \cdot \frac{9}{18} \cdot 9 = 1215$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times 15 \\ \hline 405 \\ + 81 \\ \hline 1215 \end{array}$$

SN кас. W
и SL кас. W (сечение сферы
многоугольником SN L)

так как SN = SL = 4. $\rightarrow \angle A = 8$

AH - высота в $\triangle ABC$.

$$\frac{AH \cdot BC}{2} = S_{\triangle ABC} \quad AH = 15$$

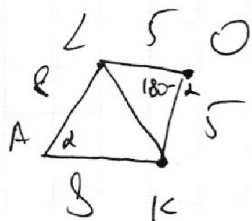
$$\frac{AH \cdot 18}{2} = 90$$

можно найти
высоту у 1-го $\triangle$
SAC.

Аналог.

по с. кос:

$$25 + 25 + \cos 2 \cdot 25 \cdot 2 = 64 + 64 - 2 \cdot 64 \cos \alpha$$



$$\begin{array}{r} 128 \\ + 64 \\ \hline 192 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 128 \\ - 50 \\ \hline 78 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 78 \cdot 2 \\ 36 \cdot 2 \\ 18 \cdot 2 \\ 96 \cdot 2 \\ 48 \cdot 2 \\ \hline 192 \end{array}$$

$$192 \cos \alpha = 78$$

$$\cos \alpha = \frac{78}{192} = \frac{13}{32}$$

таким образом по с. кос

$$ASA_1: 12^2 + 18^2 - 12 \cdot 18 \cdot 2 \cdot \frac{13}{32} = SA_1^2 = 231$$

$$SA_1 = \sqrt{231}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ + 144 \\ \hline 468 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 18 \\ \hline 96 \\ + 120 \\ \hline 216 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ \times 3 \\ \hline 87 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 468 \\ - 237 \\ \hline 231 \end{array}$$

Ответ: $\rightarrow 1215$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Терновик.

$$\frac{5}{2} \log_x 3$$

243 81

$$\begin{array}{r} 81 \\ 3 \\ \hline 243 \end{array}$$

$\log_3 48$

$$\log_3^4 x + 3,5 \log_x 3 = -8$$

$$\log_4 a + \frac{\log_3 a}{3} = -8$$

$$g = \frac{7^{\log 7} - 7^{\log 7}}{55}$$

$$\log_3^4 t + 3,5 \log_t^3 = -8.0102$$

$$\log_3^4 x + 3,5 \log_{30}^3$$

$$= \frac{5}{7} \times 8 \text{ hr}$$

$$t^4 + 3,5t + 8 = 0$$

$\log_3^4 x \log$

11/7

$$a^4 - \frac{3,5}{a} + 8 = 0 \quad (n) \times 2n$$

$$\log_{x^2} 3^{12-5} = \log_{x^2} 3^7$$

$$\log 25y^2z^3 = \log (5y)^2z^3$$

42 33 36 33

$\log_x 2$

$$\frac{2.5}{1} \approx 2.5$$

$$\frac{0}{24} - \log_x 18$$

$$\log_3^4 5xy + 3,5 \log_x 3 - 3,5 \log_{5y} 3 = -16.$$

$$t^4 + \frac{3.5}{t} = -8$$

$$3,5 (\log_x 3 - \log_{5y} 3) =$$

$$\frac{1}{\log_3 x} - \frac{1}{\log_3 9y}$$

$$\frac{\log_3 y - \log_3 x}{\log_3 x \log_3 y}$$

$$\log_3 x = -\log_3 xy.$$

$$xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{x}$$

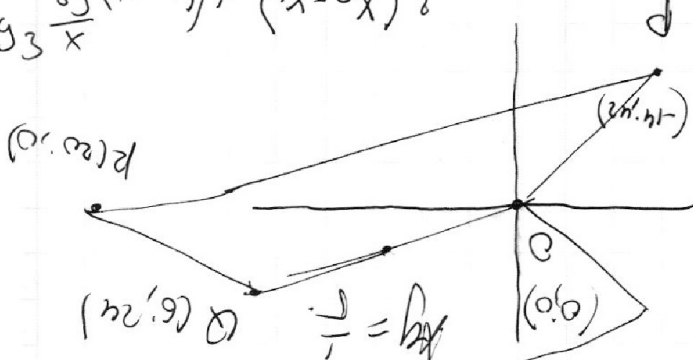
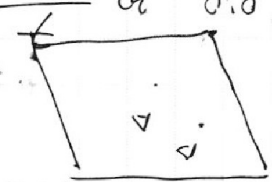
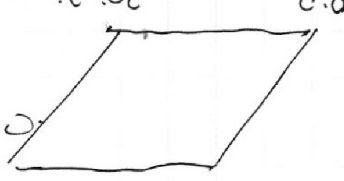
$$\log_3 \frac{y}{x} = \frac{\log y - \log x}{\log 3}$$

(वि. म.) च

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

$$\log_4 x - \frac{\log_3 x}{3.5}$$

~~$$\frac{h}{x} = x$$~~





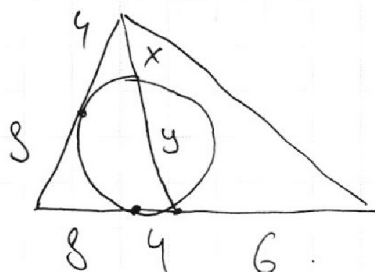
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

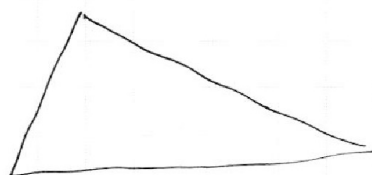
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$4 = x(x+y)$$

Черновик



$$\frac{64}{2}$$

$$128 - x \cdot 64 \cdot 2 = 25 + 2 \cdot 25x$$

$$103 = 104x$$

$$x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8$$

черновик

$$\begin{array}{r} 243 \quad 18 \\ -18 \quad 27 \\ \hline 63 \end{array}$$

$$\log_3^4 x + \log_x 3 = -8$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3^3$$

$$\log_3^4 x + \log_3 x = -1$$

$$\frac{5}{2} \log_x 3$$

$$t^4 + \frac{1}{t} = -8$$

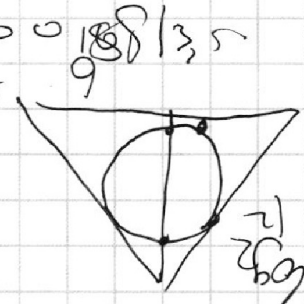
$$\begin{array}{r} 60 \\ -25 \\ \hline 35 \end{array}$$

$$\log t^4 + \frac{3.5}{t} + 8 = 0$$

$$t^5 + 3.5t + 8t = 0$$

$$2t^5 + 7 + 16t$$

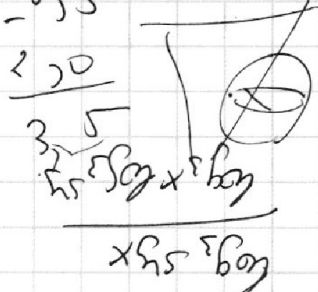
$$\log_3^4 x + \frac{3.5}{\log_3 x} = 0$$



$$\log_3^4 x + 3.5 \log_x 3 = \log_3^4 5y = 3.5 \log_{5y} 3$$

$$\frac{11}{2} \quad -5.5$$

$$\log_3^4 x - \log_3^4 5y = -1.5 (\log_x 3 + \log_{5y} 3)$$



$$-8 - 3.5 \log_{5y} 3 + 8 - 5 \log_{5y} 3 - 8$$

$$\frac{1}{2} - \frac{10}{4} - \frac{3}{5}$$

$$\log_3^4 5y - 9 = -16 - 3.5 \log_{5y} 3$$



Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$5 \operatorname{arcsin}(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \quad a^3 b^3$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$ax + 2y - 3b = 0 \quad 2y = -ax + 3b$$

$$x^2 + y^2 = 9.$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 + 36 - y \cdot 6x = 324$$

$$44 + x^2 - y \cdot 12x =$$

$$\log_3 \frac{1}{5 \times 9} + 3.5$$

$$\frac{4 \text{ kg}_3 \text{ t}}{\text{X kg}_3} = \frac{8.5}{1}$$

Handwritten notes and diagrams on grid paper:

- Top left: $42L3$
- Below $42L3$: $15 - 12 =$
- Below $15 - 12 =$: $\frac{33}{15}$
- Center: A diagram of a triangle with a vertical line segment from the top vertex to the base. The base is labeled 18 . The vertical segment is labeled 18 . A horizontal line segment is drawn from the vertical segment to the right side of the triangle, labeled 6 . The right side of the triangle is labeled 6 .
- Bottom left: 15
- Bottom center: 6
- Bottom right: 6

$$y = -\frac{a}{2}x + 1,5b$$

$$\frac{18.12}{9} = 2$$

$$C_6 = \frac{6}{x \cdot 21}$$

$$\sin(2 \arctan(x)) = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$\sin \frac{\pi}{x} \cos \frac{\pi}{10} + \cos \frac{\pi}{5} \sin \frac{\pi}{10}.$$

$$\left(\frac{0.1}{1.1} + \frac{1}{x}\right) 4.8 = \cos 30^\circ$$

$$(x)_{\cos} = (\phi_S) \cup S$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$ab : 2^9 3^{10} 5^{10} \quad a+b+c \geq 21$$

$$bc : 2^{14} 3^{13} 5^{13} \quad 21$$

$$ac : 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

$$ab = k \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$bc = d \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$ac = t \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$a^2 b^2 c^2 = k \cdot d \cdot 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$$

$$abc = 2^{21} \cdot 3^{20} \cdot 5^{25} \sqrt{k \cdot d \cdot 3 \cdot 5}$$

41

3.3

ab

3.5.

bc

ac

$$2^9 3^{10} 5^{10}$$

$$2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

a b.

a c

$$a+b=9$$

$$a+b=10$$

$$a+c=15$$

$$a+c=18$$

$$b+c=14$$

$$b+c=14$$

$$10 = a+b$$

$$30 = a+c$$

$$14 = b+c$$

$$16 = a-b$$

$$2a = 26 \quad a = 13$$

$$14 = a-b$$

$$a-b=10$$

$$a=10, b=0, c=20$$

$$b=3$$

$$a=7$$

$$b-c = -10$$

$$b+c=13$$

$$2c = 23$$

$$c=11$$

$$\begin{aligned} b-c &= -10 \\ a+b &= 9 \\ b+c &= 14 \\ a+c &= 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= 2 \\ c &= 12 \\ a &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 5^{10} \\ + 13 \\ \hline 53 \end{array}$$

$$3^{10} \cdot 3^{13} \cdot 3^{18}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ + 18 \\ \hline 41 \end{array}$$

$$53 \cdot 2^2$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 14 \\ \hline 42 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

