



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Поня QR-кода недопустима!

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

Представим

$$\begin{aligned} a &= 2^{d_1} \cdot 3^{d_2} \cdot 5^{d_3} \cdot d_4, \text{ где } d_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{Z} \\ b &= 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3} \cdot \beta_4, \text{ и } d_i, \beta_i, \gamma_i \geq 0 \\ c &= 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3} \cdot \gamma_4, \text{ } d_4, \beta_4, \gamma_4 \in \mathbb{Z}, \neq 2, \neq 3, \neq 5 \end{aligned}$$

$$ab: 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}, \text{ при этом } ab: 2^{d_1+\beta_1} \cdot 3^{d_2+\beta_2} \cdot 5^{d_3+\beta_3} \cdot d_4 \cdot \beta_4 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} d_1 + \beta_1 \geq 8 \\ d_2 + \beta_2 \geq 14 \\ d_3 + \beta_3 \geq 12 \end{cases} \text{ аналогично } \begin{cases} \beta_1 + \gamma_1 \geq 12 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 20 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 17 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} d_1 + \gamma_1 \geq 14 \\ d_2 + \gamma_2 \geq 21 \\ d_3 + \gamma_3 \geq 39 \end{cases}$$

Решим систему:

$$\begin{aligned} \begin{cases} d_1 + \beta_1 \geq 8 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 12 \\ d_1 + \gamma_1 \geq 14 \\ d_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \\ d_1 \geq 5 \quad d_1 \geq 5 \\ \beta_1 \geq 3 \quad \beta_1 \geq 3 \\ \gamma_1 \geq 9 \quad \gamma_1 \geq 9 \end{cases} & \begin{cases} d_2 + \beta_2 \geq 14 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 20 \\ d_2 + \gamma_2 \geq 21 \\ d_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 28,5 \\ d_2 \geq 8 \quad d_2 \geq 8 \\ \beta_2 \geq 6 \quad \beta_2 \geq 6 \\ \gamma_2 \geq 14 \quad \gamma_2 \geq 14 \\ d_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 28 \end{cases} & \begin{cases} d_3 + \beta_3 \geq 12 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 17 \\ d_3 + \gamma_3 \geq 39 \\ d_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 54 \\ d_3 \geq 17 \quad d_3 \geq 17 \\ \beta_3 \geq 5 \quad \beta_3 \geq 5 \\ \gamma_3 \geq 22 \quad \gamma_3 \geq 22 \\ \Rightarrow d_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 39 \end{cases} \end{aligned}$$

$$a \cdot b \cdot c = 2^{d_1+\beta_1+\gamma_1} \cdot 3^{d_2+\beta_2+\gamma_2} \cdot 5^{d_3+\beta_3+\gamma_3} \cdot d_4 \cdot \beta_4 \cdot \gamma_4 \geq$$

$$\geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39} \cdot d_4 \cdot \beta_4 \cdot \gamma_4 \geq \underline{\underline{2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}}}$$

$$\geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

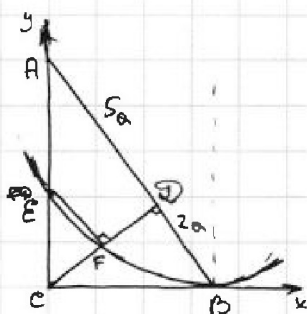
Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Введем прямоугольную систему координат:
 Ox - вдоль CB
 Oy - вдоль CA
 $(0,0)$ - т. C

Ответ: 5,6

Пусть $AD = 5a$, тогда $DB = 2a$

$$AC^2 = 25a^2 + CD^2$$

$$CB^2 = 4a^2 + CD^2$$

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 = 29a^2 + 2CD^2 = 49a^2$$

$$CD^2 = 10a^2 \Rightarrow AC = \sqrt{35}a \quad BC = \sqrt{14}a$$

Пусть точка $E(0; h)$.

$$y_{AB} = -\frac{\sqrt{35}a}{\sqrt{14}a}x + \sqrt{35}a = -\sqrt{\frac{5}{2}}x + \sqrt{35}a$$

$$y_{ED} = \sqrt{\frac{2}{5}}x$$

$$y_{EF} = -\sqrt{\frac{5}{2}}x + h$$

$$\text{т. F: } y_{EF} = y_{ED} \\ \sqrt{\frac{5}{2}}x + h = \sqrt{\frac{2}{5}}x$$

$$x_F = h \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{7}}$$

$$y_F = \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{7}}h = \frac{2}{\sqrt{7}}h$$

Окр. касается BC в точке $B \Rightarrow$
 центр O лежит на $\perp$ к BC в т. B .
 Пусть $O(\sqrt{14}a; R) \Rightarrow R =$

Окр. проходит через $EF \Rightarrow$ т. O
 лежит на перес. $\perp$ EF :

$$y_{OP} = \sqrt{\frac{2}{5}}x + \frac{h}{2}$$

$$\sqrt{14}a = \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt{14}a + \frac{h}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{7}{5}}a + \frac{h}{2} = R$$

А также $EO = R$:

$$(\sqrt{14}a)^2 + (2\sqrt{\frac{7}{5}}a + \frac{1}{2}h - h)^2 = (2\sqrt{\frac{7}{5}}a + \frac{h}{2})^2$$

$$14a^2 + h^2 - 2h(2\sqrt{\frac{7}{5}}a + \frac{h}{2}) = 0$$

$$14a^2 - 4\sqrt{\frac{7}{5}}ah = 0$$

$$h = \sqrt{35}/2 \cdot a = 1/2 AC$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{35}a \cdot \sqrt{14}a = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{10}a^2$$

$$S_{CEEF} = \frac{1}{4} S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{10}}{4}a^2$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEEF}} = \frac{4\sqrt{10}a^2}{5\sqrt{10}/4a^2} = \frac{28}{5} = 5,6$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$10 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10x = \pi - 2x$$

$$4\pi = 8x$$

$$\underline{x = \frac{\pi}{2}}$$

$$x =$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

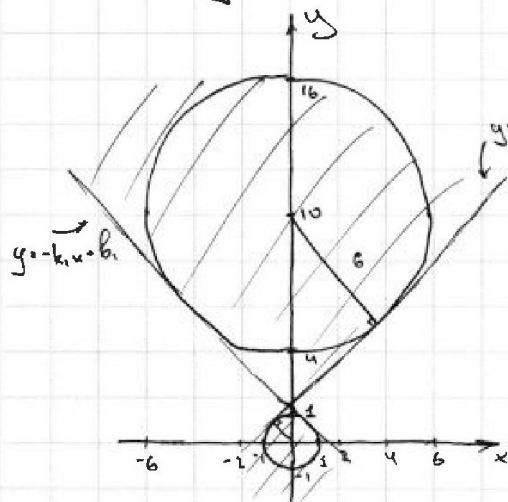
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

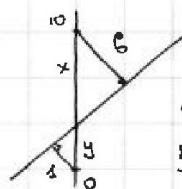
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 84) = 0 \\ ax - 3y + 4b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \vee x^2 + (y - 10)^2 = 36 \\ ax - 3y + 4b = 0 \end{cases}$$



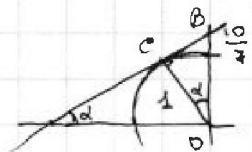
Т.к. $b \in \mathbb{R}$, достаточно, чтобы
касательная к окружности имела
наклон k , иначе говоря,
прямая лежит в заштрихованной
области.



из подобия: $\frac{x}{y} = 6$

и $x + y = 10 \Rightarrow$

$\frac{10-y}{y} = 6 \quad \frac{10}{y} = 7 \quad y = \frac{10}{7} \quad x = \frac{60}{7}$



~~$OB^2 = OC^2 + BC^2$~~

$OB^2 = OC^2 + BC^2 \Rightarrow 100 = 1 + BC^2 \Rightarrow BC^2 = 99$

$\tan \alpha = \frac{BC}{OC} = \frac{\sqrt{99}}{1} = \frac{3\sqrt{11}}{1}$

$\Rightarrow \frac{a}{3} \in \left(-\frac{\sqrt{11}}{3}, \frac{\sqrt{11}}{3}\right)$

$a \in \left(-\frac{3\sqrt{11}}{3}, \frac{3\sqrt{11}}{3}\right)$

для второй прямой $\tan \alpha_2 = -\frac{\sqrt{11}}{3}$

Ответ: $a \in \left(-\frac{3\sqrt{11}}{3}, \frac{3\sqrt{11}}{3}\right)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x} 625 - 3$$

$$\text{ОДЗ: } 2x > 0 \\ 2x \neq 1$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\log_5(2x)} - 3$$

$$t = \log_5(2x)$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot 5^t$$

$$t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3t} - 3$$

$$t^4 + 3 = \frac{13}{3} \cdot \frac{1}{t} \quad (1)$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_y \frac{1}{5} - 3$$

$$\text{ОДЗ: } y > 0 \\ y \neq 1$$

$$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\log_5 y} - 3$$

$$p = \log_5 y$$

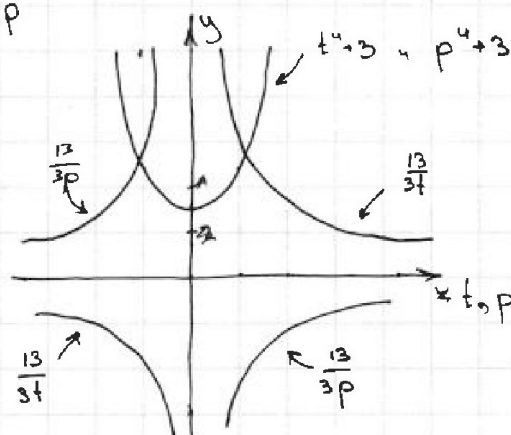
$$p^4 + \frac{4}{p} = -\frac{1}{3p} - 3$$

$$p^4 + 3 = -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{p} \quad (2)$$

$$xy = \frac{1}{2} 5^t \cdot 5^p = \frac{1}{2} 5^{t+p}$$

Напротив

$$y = 5^p$$



легко заметить, что при

подстановке $-p$, мы получим уравнение относительно t .

Значит если t - решение, то $p = -t$ - тоже

решение, тогда $t+p=0$

$$xy = \frac{1}{2} 5^{t+p} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$



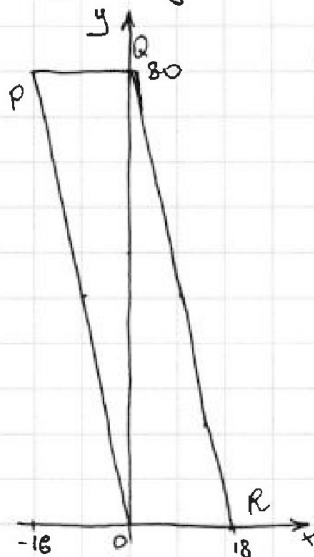
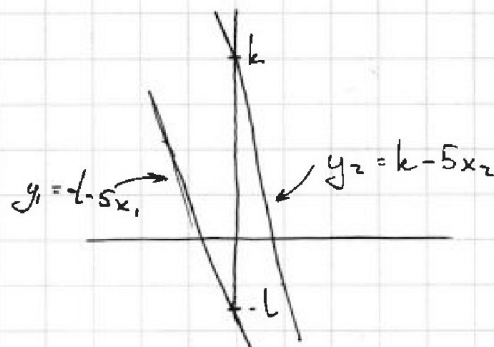
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $5x_2 + y_2 = k$
 $5x_1 + y_1 = -l$, тогда $k + l = 45$. $(k \geq l)$

На координатной плоскости:

а для любых k и l ,
 решение $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ —
 точки лежащие на прямых
 y_1 и y_2 (по графикам).



Посмотрим, в каких пределах
 может находиться k , чтобы
 корни были внутри параллелограмма.

Заметим, что обе боковые стороны
 наклонены под углом $\text{tg } \alpha = 5$, как
 и наши прямые, следовательно
~~в край~~ $k \leq$ чем пересечение прямой
 QR и Ox или Oy , и $k \geq$ чем пересеч.
 прямой PO и $Oy + 45$.

Итого $k \in [45; 90]$

~~при $k = 90$ и $y \in [0; 80]$ лежит 16 точек с целыми координ.~~

При $k : 5$ ($\Rightarrow l : 5$) кол-во точек с целыми коор. — 16,
 таких k — 10. При $k \not\vdots 5$ ($\Rightarrow l \not\vdots 5$) — кол-во точек — 15.
 Посчитаем кол-во пар с целыми координ. (точек):

$$10 \cdot 16 \cdot 16 + 36 \cdot 15 \cdot 15 = 1560 + 8100 = 9660$$

При $k < l$ точки A и B меняются местами.

Ответ: 9660

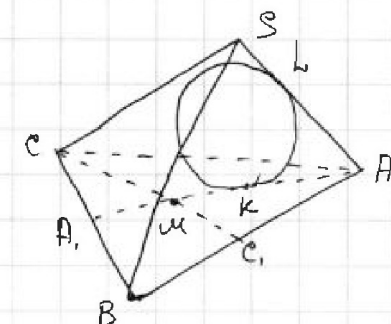
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Пирча QR-кода недопустима!



Ответ: а) 3600

Рассмотрим на сечение A_1SA :

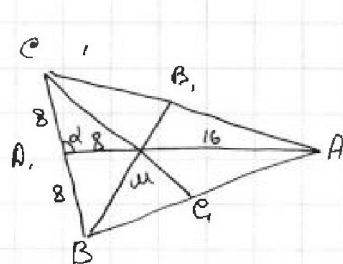
По свойству секущей и касательной:

$$\begin{aligned} SL^2 &= SP \cdot (SP + PQ) \\ MQ^2 &= MQ \cdot (MQ + PQ) \end{aligned} \Rightarrow \text{т.к. } SP = MQ, \quad SL = MK$$

(в случае расположения P, Q наоборот: $SL^2 = SQ \cdot (SQ + PQ)$, $MK^2 = MP \cdot (MP + PQ)$ - аналогично $SL = MK$)

$AL = AK$ - отрезки касат. $\Rightarrow AM = AS = 16$

Рассмотрим основание:



$$\frac{AM}{MA_1} = \frac{2}{1} \Rightarrow AM = 8, \text{ пусть } \alpha = \angle CA_1A, \text{ тогда}$$

$$S_{AA_1C} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 24 \cdot \sin \alpha$$

$$S_{AA_1B} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 24 \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = S_{AA_1C}$$

$$S_{AA_1C} = 8 \cdot 24 \cdot \sin \alpha = 100 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{25}{48} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{48}$$

$$\text{По т. кос: } CM^2 = 64 + 64 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{48} = 9 \cdot 64 \left(1 - \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{48}\right)$$

$$\text{т.к. } BM^2 = 64 + 64 + 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{48} = 2 \cdot 64 \left(1 + \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{48}\right)$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 24 \cdot BM \cdot \frac{3}{2} \cdot CM \cdot \frac{3}{2} = 6 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 64 \cdot \left(1 - \frac{23 \cdot 73}{48^2}\right) = 54 \cdot 128 \cdot \frac{25}{48} = 3600$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

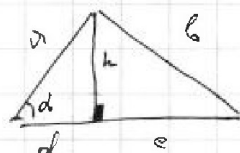
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

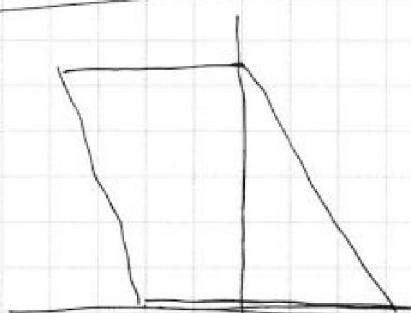
$$\frac{\frac{\pi}{6}}{\sqrt{36 - \frac{\pi^2}{36}}} = \frac{\pi}{\sqrt{36 - \pi^2}}$$

$$\frac{1}{1-x}$$



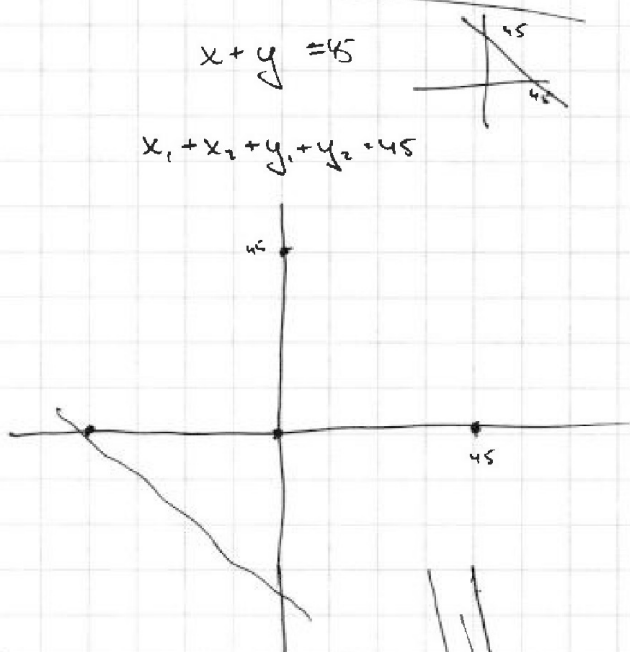
$$x = \pi/6$$
$$\cos x = \sqrt{3}/2$$
$$\arcsin(\cos x) = \pi/3$$

$$\cos d = \frac{d}{a}$$
$$\sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$d = \frac{\pi}{3}$$



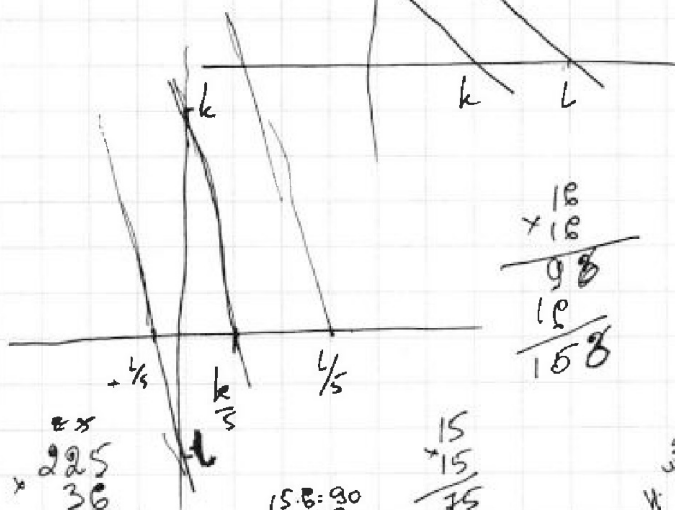
$$x + y = 45$$

$$x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 45$$



$$\begin{cases} x_1 + y_1 = k \\ x_2 + y_2 = l \end{cases}$$

$$k + l = 45$$



$$k + l = 45$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 98 \\ 18 \\ \hline 158 \end{array}$$

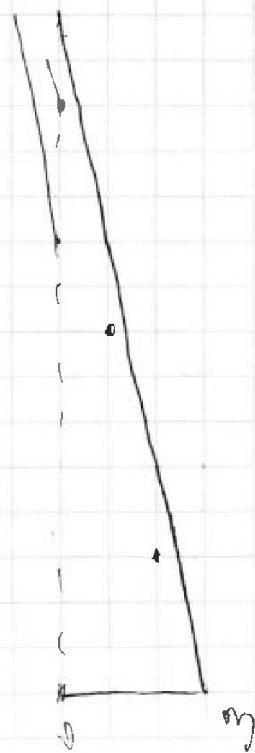
$$\begin{array}{r} 225 \\ \times 36 \\ \hline 1350 \\ 675 \\ \hline 8100 \end{array}$$

$$15 \cdot 6 = 90$$
$$\frac{90}{8100}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 15 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 98 \\ 18 \\ \hline 158 \end{array}$$

$$58^{\circ} 12'$$





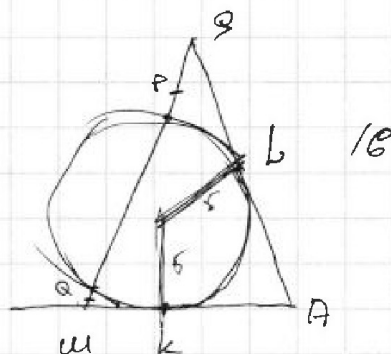
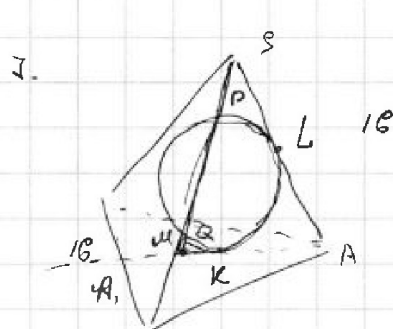
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

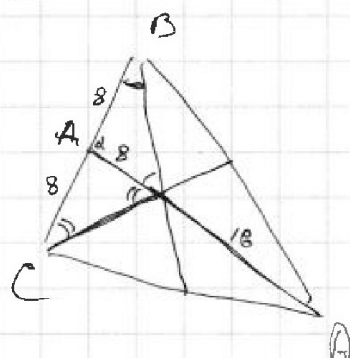
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$SA = MA$$



$$S_{APB} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 24 \cdot \sin d$$

$$S_{APC} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 24 \cdot \sin(180-d) = \dots \sin d$$

$$S_{APC} = 8 \cdot 24 \cdot \sin d = 100$$

$$48 \sin d = 25$$

$$\sin d = \frac{25}{48}$$

$$\cos d = \pm \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{48}$$

$$48^2 - 25^2 = 23 \cdot 73$$

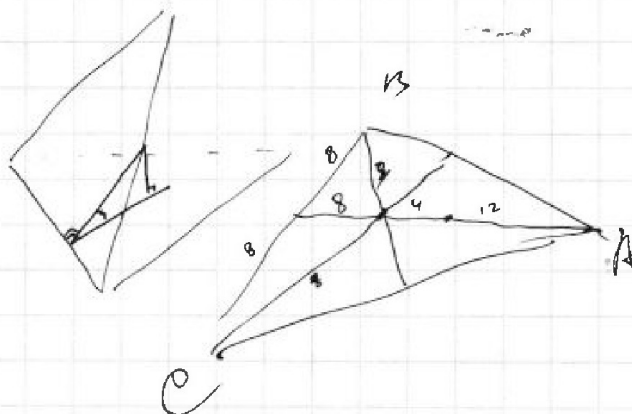
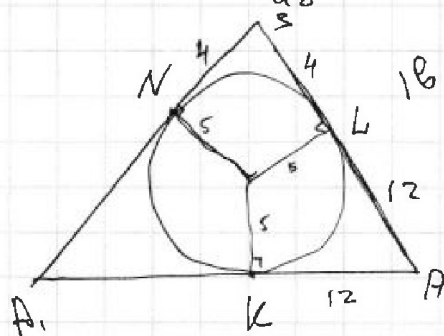
$$1 - \frac{25^2}{48^2} = \frac{48^2 - 25^2}{48^2} = \frac{23 \cdot 73}{48^2}$$

$$6 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 64$$

$$\frac{48^2 - (48^2 + 25^2)}{48^2} = \frac{25^2}{48^2}$$

$$\frac{6 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 64 \cdot 24}{48}$$

$$100 \cdot 36$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порука QR-кода недопустима!

6.

$$x+y=3$$

$$5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45 \quad \text{3.3.5}$$

$$A(x_1, y_1)$$

$$B(x_2, y_2)$$

x_1 и y_1 - произв.

$$5x_2 + y_2 = 45 + 5x_1 + y_1 \quad \text{8e}$$

$$y_2 = 45 + 5x_1 + y_1$$

$$x_2 = 9 + x_1 + \frac{1}{5}y_1$$

$$y_2 = e$$

$$x_2 = e/5$$

$$y_{\text{ур.}} = -5x + e$$

$$y_{\text{ур.}} = -5x + 45 + 5x_1 + y_1$$

$$\text{или } x=0 \quad y=0$$

$$y=90$$

$$45 + 5x_1 + y_1 \in [0; 90]$$

$$5x_1 + y_1 \in [-45; 45]$$

$$y_{\text{ур.}} = -5x + 90 - 45$$

$$y = -5x + e$$

80

18

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

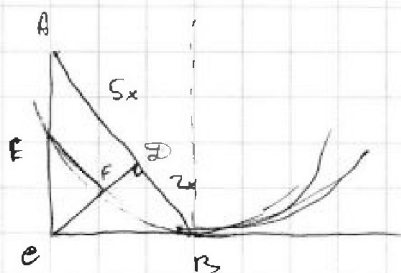
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

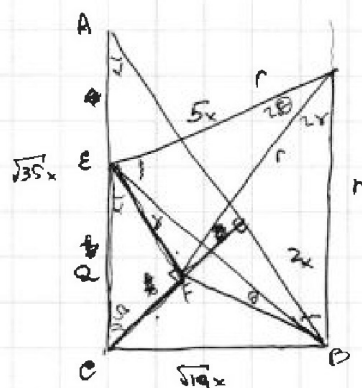


2.



$$\begin{aligned} AB \parallel EF \\ d \geq 12 \\ x \geq 17 \\ d+x \geq 39 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore d+x &\geq 14 \\ x+y &\geq 20 \\ d+x &\geq 22 \\ d+x+y &\geq 28 \\ d \geq 8 \quad y \geq 6 \quad x \geq 14 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} CE = a \\ \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{a}{EF} \\ EF = \frac{5a}{\sqrt{5}} \\ CF = \frac{\sqrt{5}a}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

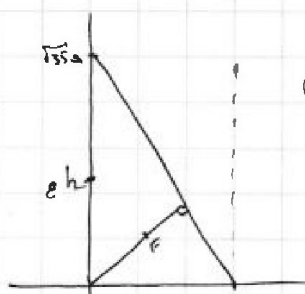
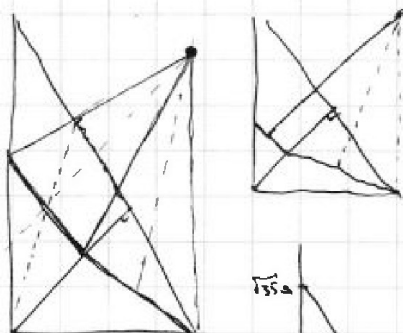
$$\begin{aligned} AC^2 &= 25x^2 + h^2 \\ BC^2 &= 4x^2 + h^2 \\ AC^2 - BC^2 &= 21x^2 = h^2 \\ AC^2 &= 25x^2 + h^2 \\ BC^2 &= 4x^2 + h^2 \\ AC^2 - BC^2 &= 21x^2 = h^2 \\ AC^2 &= 25x^2 + h^2 \\ BC^2 &= 4x^2 + h^2 \\ AC^2 - BC^2 &= 21x^2 = h^2 \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin d$$

$$S_{CEF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{10}a^2}{35} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{10}a^2}{35}$$

$$S_{CEF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{10}a^2}{35} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{7} a^2 = \frac{1}{2}$$

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} x^2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} x^2 = \frac{1}{2}$$



$$\frac{20}{8}$$

$$\frac{24}{5}$$

$$y_{AB} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}} x + \sqrt{35}a = \sqrt{\frac{5}{2}} x + \sqrt{35}a$$

$$y_{CD} = \sqrt{\frac{2}{5}} x$$

$$O(\sqrt{14}a, h)$$

$$\begin{aligned} EO^2 &= 14a^2 + \frac{1}{2}(h-y)^2 = h^2 \\ 14a^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}yh &= h^2 \\ EO^2 &= 14a^2 + (t-h)^2 = t^2 \\ 14a^2 + h^2 - 2ht &= 0 \\ t &= \frac{14a^2 + h^2}{2h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{EF} &= -\sqrt{\frac{5}{2}} x + h \\ F: -\sqrt{\frac{5}{2}} x + h = \sqrt{\frac{2}{5}} x \\ \sqrt{\frac{2}{5}} + \sqrt{\frac{5}{2}} x &= h = \frac{\sqrt{14} + \sqrt{2}c}{\sqrt{10}} \\ x_F &= h \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14} + \sqrt{2}c} \\ y_F &= \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14} + \sqrt{2}c} h = \frac{1}{2} h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} FO^2 &= (\sqrt{14}a - \frac{\sqrt{10}}{2}h)^2 + \frac{1}{4}h^2 \\ &= 14a^2 - \frac{1}{2}\sqrt{140}ah + \frac{1}{4}h^2 \\ &= 14a^2 - \frac{1}{2}\sqrt{140}ah + \frac{1}{4}h^2 \\ &= 14a^2 - \frac{1}{2}\sqrt{140}ah + \frac{1}{4}h^2 \\ &= 14a^2 - \frac{1}{2}\sqrt{140}ah + \frac{1}{4}h^2 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{10}a \cdot 5a$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. a, b, c

$$ab: 2^8 3^{14} 5^{12}$$

$$bc: 2^{12} 3^{20} 5^{17}$$

$$ac: 2^{14} 3^{24} 5^{39}$$

$$a = 2^{a_1} 3^{a_2} 5^{a_3}$$

$$b = 2^{b_1} 3^{b_2} 5^{b_3}$$

$$c = 2^{c_1} 3^{c_2} 5^{c_3}$$

$$a_1 + b_1 \geq 8$$

$$b_1 + c_1 \geq 12$$

$$c_1 + a_1 \geq 14$$

$$a_2 + b_2 \geq 14$$

$$b_2 + c_2 \geq 20$$

$$c_2 + a_2 \geq 24$$

$$a_3 + b_3 \geq 12$$

$$b_3 + c_3 \geq 17$$

$$c_3 + a_3 \geq 39$$

$$a, b, c \in \mathbb{Z}$$

$$2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 34$$

$$a_1 + b_1 + c_1 \geq 17$$

$$a_1 \geq c_1 \geq 9$$

$$a_1 + b_1 + c_1 \geq 17$$

$$2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 68$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 34$$

$$a_2 \geq c_2 \geq 17$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 34$$

$$a_2 \geq c_2 \geq 17$$

$$+ \geq 68$$

$$34$$

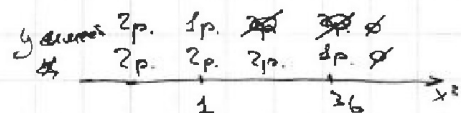
$$c_3 \geq 0$$

$$22 + 20 + 14 = 56$$

$$29$$

2. $ax - 3y + 4b = 0$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 36) = 0$$



$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

или $\emptyset$ при $x^2 > 1$

$$x^2 + y^2 - 20y + 36 = 0$$

$$x^2 + (y - 10)^2 - 36 = 0$$

$$y = 10 \pm \sqrt{36 - x^2}$$

или $\emptyset$ при $x^2 > 36$

а - найти
б - найти

$$ax - 3y + 4b = 0$$

$$ax - 3y = 0$$

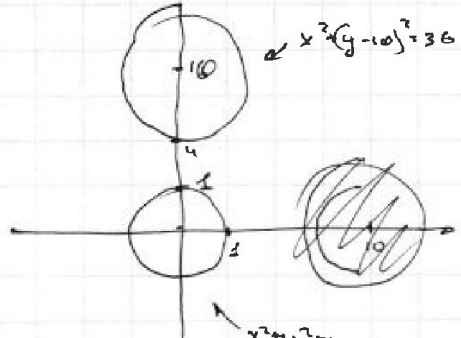
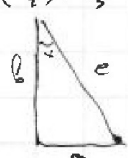
$$y = \frac{ax + 4b}{3} = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$$

$$\arcsin(\cos x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad x = \frac{\pi}{6}$$

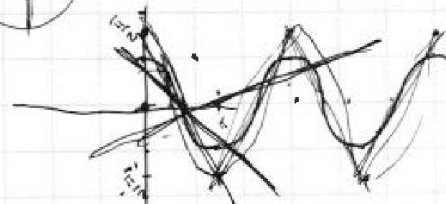
$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$



$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\pi^2}{36}}} = \frac{6}{\sqrt{36 - \pi^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\pi^2}{36}}}$$

$$\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$



$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$\cos x = b/c$$

$$\arcsin(b/c) = \alpha$$

$$\sin \alpha = b/c$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - x$$

$$\frac{7}{10} \approx 0.7$$

$$\frac{12.5}{100} = 0.125$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

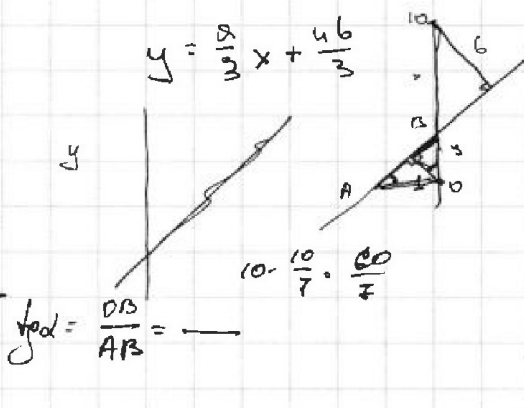
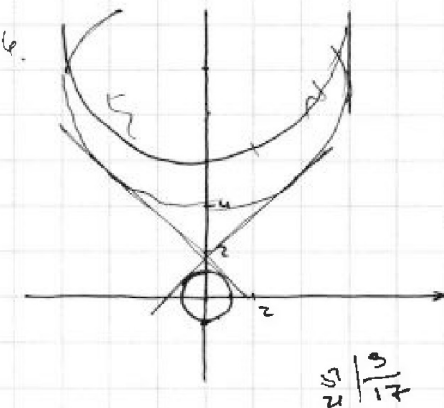
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
- страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} \frac{10}{5}x &= 8 \\ x+y &= 10 \\ \frac{10-y}{5} &= 6 \\ 10-y &= 30 \\ y &= -20 \end{aligned}$$

$$5. \log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3$$

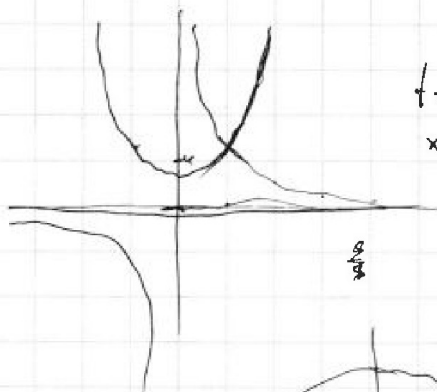
$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3} \log_{\frac{1}{\log_5 2x}} 5 - 3$$

$$t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3} \frac{1}{t} - 3$$

$$t^5 - 3 = \frac{4}{3} - 3t \quad \vee \quad \log_5 2x = 0$$

$$t^5 + 3t - \frac{13}{3} = 0$$

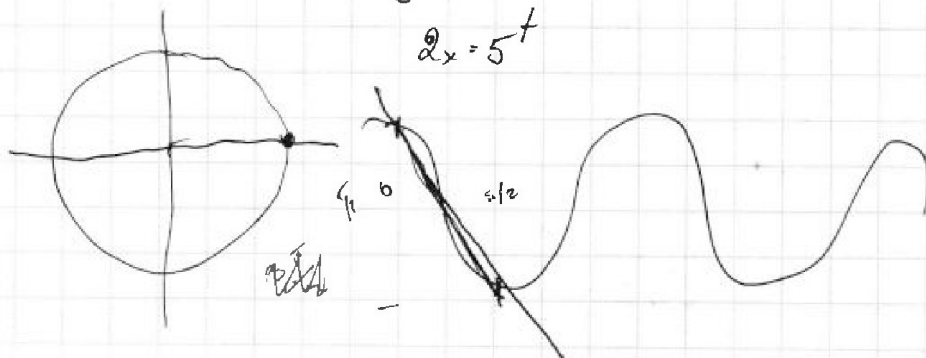
$$t^4 + 3 = \frac{13}{3} \cdot \frac{1}{t}$$



$$\begin{aligned} t &= -p \\ xy &= \log_5 2x \cdot \log_5 y + \log_5 2x \\ xy &= t \cdot p = -t^2 \end{aligned}$$

$$\log_5 2x = t$$

$$2x = 5^t$$



$$\begin{aligned} \log_8 8 &= 1 \\ \log_8 64 &= 6 \cdot \frac{1}{3} = 2 \\ \log_8 8 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} \frac{1}{5} - 3$$

$$\log_5^4 y + 4 \frac{1}{\log_5 y} = -\frac{1}{3} \frac{1}{\log_5 y} - 3$$

$$p^4 + \frac{4}{p} = -\frac{1}{3p} - 3$$

$$p^5 + \frac{13}{3} + 3p = 0$$

$$p^4 + 3 = \frac{13}{3} \frac{1}{p}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

