



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1} \cdot k_1, \quad k_1 \not\equiv 2, 3, 5, \quad k_1 \in \mathbb{N}, (k_1 \geq 1)$$

$$x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{Z}, (x_1, y_1, z_1 \geq 0)$$

$$b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2} \cdot k_2, \quad k_2 \not\equiv 2, 3, 5, \quad k_2 \in \mathbb{N}$$

$$x_2, y_2, z_2 \in \mathbb{Z}, (x_2, y_2, z_2 \geq 0)$$

$$c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \cdot 5^{z_3} \cdot k_3, \quad k_3 \not\equiv 2, 3, 5, \quad k_3 \in \mathbb{N}$$

$$x_3, y_3, z_3 \in \mathbb{Z}, (x_3, y_3, z_3 \geq 0)$$

$$ab \equiv 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$k_1 k_2 2^{x_1+x_2} \cdot 3^{y_1+y_2} \cdot 5^{z_1+z_2} \geq 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \quad (a, b, c \in \mathbb{N})$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 8 \\ y_1 + y_2 \geq 14 \\ z_1 + z_2 \geq 12 \end{cases} \quad (k_1, k_2 \not\equiv 2, 3, 5)$$

$$bc \equiv 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \Rightarrow 2^{x_2+x_3} \cdot 3^{y_2+y_3} \cdot 5^{z_2+z_3} \cdot k_2 k_3 \geq 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 \geq 12 \\ y_2 + y_3 \geq 20 \\ z_2 + z_3 \geq 17 \end{cases}$$

$$\text{Аналогично} \quad ca \equiv 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \Rightarrow 2^{x_1+x_3} \cdot 3^{y_1+y_3} \cdot 5^{z_1+z_3} \cdot k_3 k_1 \geq 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 \geq 14 \\ y_1 + y_3 \geq 21 \\ z_1 + z_3 \geq 39 \end{cases}$$

$$\text{Суммируем} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_2 + x_3 + x_1 + x_3 \geq 14 + 12 + 8 \\ y_1 + y_2 + y_2 + y_3 + y_3 + y_1 \geq 21 + 20 + 14 \\ z_1 + z_2 + z_2 + z_3 + z_3 + z_1 \geq 39 + 17 + 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 17 \\ y_1 + y_2 + y_3 \geq \frac{55}{2} \\ z_1 + z_2 + z_3 \geq 34 \end{cases} \quad \begin{matrix} \mathbb{Z} \\ (y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{Z} \rightarrow (y_1 + y_2 + y_3) \in \mathbb{Z} \rightarrow) \\ \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 \geq \frac{56}{2} = 28 \end{matrix}$$

Сравнимся с $\min(abc)$.

$$abc = 2^{x_1+x_2+x_3} \cdot 3^{y_1+y_2+y_3} \cdot 5^{z_1+z_2+z_3} \cdot k_1 k_2 k_3 \geq 2^{17} \cdot 3^{\frac{56}{2}} \cdot 5^{34} = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$$

$$\text{Минимум достигается при } \begin{matrix} x_1=5; x_2=3; x_3=5 \\ y_1=8; y_2=6; y_3=14 \\ z_1=17; z_2=6; z_3=14 \end{matrix} \quad \begin{matrix} k_1=1, k_2=1, k_3=1 \end{matrix}$$

Но т.к. $z_1, z_2, z_3 \geq 0 \Rightarrow z_1 + z_2 + z_3 \geq z_1 + z_3 \geq 39 \Rightarrow$ станем входить
на 5 в abc хотя бы 39. ~~Доказано~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Минимум $z_1 + z_2 + z_3 \geq 30$ достигается при $z_1 = 12, z_2 = 0, z_3 = 27$

Тогда $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

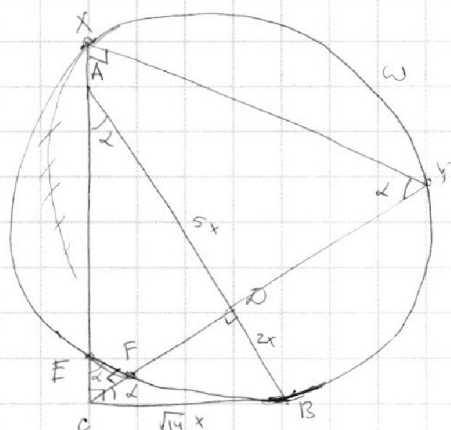
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Given: $\frac{AO}{OB} = \frac{5}{2}$, $EF \parallel AB$

Hamilton: $\frac{[ABC]}{[CEFF]}$ - ?

Решение: Обозначим $\angle C = \alpha$

$$EF \parallel AB \Rightarrow \angle CEF = \angle CAD = \alpha; \angle EFC = \angle ADC = 90^\circ$$
$$\angle ECF = 90^\circ - \angle CAD = 90^\circ - \angle$$
$$\rightarrow \angle DCB = 90^\circ - \angle ECF = 90^\circ - 90^\circ = 0^\circ$$

1). $\triangle CDB \sim \triangle ADC$ ($\triangle ADC$ и $\triangle CDB$ - правоуг. $\triangle$, $\angle DAC = \angle DCB = \alpha$)

$$\frac{CD}{DB} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot DB}$$

Обозначим $AO = 5x \Rightarrow OB = \frac{2}{5} AO = 2x \Rightarrow CO = \sqrt{5x \cdot 2x} = \sqrt{10}x$

2). по Тл. Пифагора: $CB^2 = CO^2 + OB^2 = 10x^2 + 4x^2 = 14x^2$
 для COB

$$CB = \sqrt{14} \text{ x}$$

Do Th. Pitagoragica que ΔABC : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 25x^2 + 10x^2 = 35x^2 \Rightarrow AC = \sqrt{35}x$

3). no Th. o cenzury w kac-u: $CB^2 = CE \cdot CA$

3). По Th. о сечении и кас-и: $CB^2 = CE \cdot CX$, где $r.X = AC \cap w$
 $CB^2 = CF \cdot CY$, где $r.Y = CD \cap w$

$$\rightarrow \frac{CE}{CF} \cdot \frac{CX}{CY} = 1 \rightarrow \frac{CE}{CF} = \frac{CF}{CX} \quad \text{XCY - односторонний} \rightarrow \triangle XCY \sim \triangle FCF$$

$\Rightarrow \angle EFC = \angle YXC = 90^\circ$; $\angle XYC = \angle FEC = \alpha$

4). Е $\triangle ABC \sim \triangle ECF \rightarrow$ (м.к. $\triangle ABC$ и $\triangle ECF$ - прямоугольн. и $\angle CFF = \angle CAB = 90^\circ$)

$$\rightarrow \frac{[ABC]}{[DEF]} = \frac{CB \cdot AC}{CF \cdot EF} = K^2$$

14/3 [ABC] - monyago AABC
[CEF] - monyago ACEF

$$\text{also } K = \frac{CB}{CF} = \frac{FE}{AB} = \frac{AB}{EC} = \frac{CA}{EF}$$

5).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$$

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2} \\ \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi \\ \cos x = \cos\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi - 2x \geq -5\pi \\ \pi - 2x \leq 5\pi \\ \cos x = \cos\left(\frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 3\pi \\ x \geq -2\pi \\ \begin{cases} x = \frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5} + 2\pi k \\ x = -\frac{2\pi}{5} - \frac{x}{5} + 2\pi h \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3\pi \\ x \geq -2\pi \\ \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k \\ x = -\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi h \end{cases} \end{cases}$$

$$1). x = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k, k \in \mathbb{Z}; x \in [-2\pi; 3\pi]$$

$$2). x = -\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi h, h \in \mathbb{Z}; x \in [-2\pi; 3\pi]$$

$$-2\pi \leq \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k \leq 3\pi$$

$$-5\pi \leq 5\pi k \leq 5\pi$$

$$-1 \leq k \leq 1; k \in \mathbb{Z}$$

$$k \in \{-1; 0; 1\}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi = -2\pi$$

$$x_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$x_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi = 3\pi$$

$$-2\pi \leq -\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi h \leq 3\pi$$

$$-5\pi \leq 5\pi h \leq 10\pi$$

$$-1 \leq h \leq 2, h \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow h \in \{-1; 0; 1; 2\}$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3} = -2\pi$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{3}$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$x_4 = -\frac{\pi}{3} + \frac{10\pi}{3} = 3\pi$$

$$\text{Ответ: } x \in \left\{-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi\right\}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} y = \frac{ax+4b}{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-10)^2 = 6^2 \end{cases}$$

$$\triangle OAF \sim \triangle CAO$$

$$\frac{OF}{CO} = \frac{OA}{CA}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{OA}{10-OA}$$

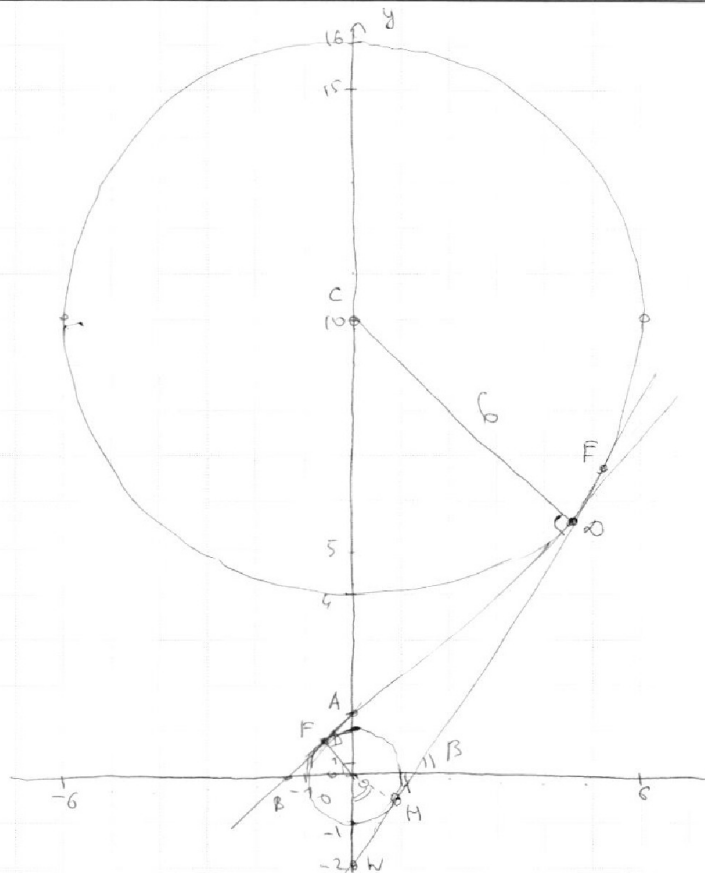
$$OA = \frac{10}{7}$$

$$\triangle BAO \sim \triangle OAF$$

$$\frac{OB}{OF} = \frac{OA}{AF}$$

$$\frac{OB}{1} = \frac{\frac{10}{7}}{\frac{\sqrt{51}}{7}}$$

$$OB = \frac{10}{\sqrt{51}}$$



по Th. Пифагора для $\triangle OAF$: $AF^2 = AO^2 - OF^2 = \frac{100}{49} - 1 = \frac{51}{49} \Rightarrow AF = \frac{\sqrt{51}}{7}$

$$\Rightarrow OB = \frac{10}{7 \cdot \frac{\sqrt{51}}{7}} = \frac{10}{\sqrt{51}}$$

$$\tan \angle ABO = \frac{OA}{OB} = \frac{\frac{10}{7}}{\frac{10}{\sqrt{51}}} = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

1). $\left| \frac{a}{3} \right| \leq \frac{\sqrt{51}}{7} \Rightarrow$ прямая $y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$ пересекает окр-ны max 2 раза

2). $\left| \frac{a}{3} \right| > \frac{\sqrt{51}}{7} \Rightarrow \exists b$: прямая $y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$ пересекает окр-ны 4 раза
(существуют b перенос прямой так, чтобы она пересекала 4 раза)

Расс-м вторую кас-ую HE: $\triangle OWH \sim \triangle CHE \Rightarrow \frac{OW}{CW} = \frac{OH}{CO} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{OW}{10+OW} = \frac{1}{6} \Rightarrow OW = 2$

$\tan \beta = \frac{HW}{OH} = \frac{HW}{1} \Rightarrow$ по Th. Пифагора для $\triangle OWH$: $HW^2 = OW^2 - OH^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow HW = \sqrt{3} \Rightarrow \tan \beta = \sqrt{3}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Сравним $\sqrt{\frac{51}{7}}$ и $\sqrt{3}$

$$51 < 99 = 3 \cdot 33 \Rightarrow \sqrt{\frac{51}{7}} < \sqrt{3}$$

Значит, уже для $|\frac{a}{3}| \geq \sqrt{\frac{51}{7}}$ будет возможен 11 пересек

прямой $y = \frac{a}{3}x + \frac{46}{3}$ на $\frac{46}{3}$ так, что она пересекает эвр-ты 4 раза

1). $|\frac{a}{3}| \leq \sqrt{\frac{51}{7}}$ — max 2 решения (одну из эвр-ей прямая не) пересекает

2). $|\frac{a}{3}| > \sqrt{\frac{51}{7}}$: $\exists b$: что $y = \frac{a}{3}x + \frac{46}{3}$ пересекает эвр-ты 4 раза

тогда

$$|\frac{a}{3}| > \sqrt{\frac{51}{7}}$$

$$\begin{cases} \frac{a}{3} > \sqrt{\frac{51}{7}} \\ \frac{a}{3} < -\sqrt{\frac{51}{7}} \end{cases}$$

$$a \in (-\infty; -3\sqrt{\frac{51}{7}}) \cup (3\sqrt{\frac{51}{7}}; +\infty)$$

Ответ: $a \in (-\infty; -3\sqrt{\frac{51}{7}}) \cup (3\sqrt{\frac{51}{7}}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x > 0 \\ 2x \neq 1 \\ 8x^3 > 0 \\ 8x^3 \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \log_{(2x)^3} 5^4 - 3$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3 \log_5(2x)} - 3$$

Замена: $a = \log_5 2x$, $a \neq 0$

$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3$$

$$a^4 - \left(\frac{3}{a} + \frac{4}{3a} \right) + 3 = 0$$

$$a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0$$

$$3a^5 + 9a - 13 = 0$$

Расс-м $f(a) = 3a^5 + 9a - 13$, $f'(a) = 15a^4 + 9 > 0 \Rightarrow f(a)$ - монотонно

возрастающая ф-ция $\Rightarrow$ решение $f(a) = 0$ единственно и существует

Возв-е к замене: $\log_5 2x = a_1$

$$x = \frac{5^{a_1}}{2} > 0, \quad \left(\begin{aligned} &x \neq \frac{1}{2} = \frac{5^{a_1}}{2} \Rightarrow a_1 \neq 0 \\ &\text{при } a_1 = 0: f(a) = -13 < 0 \\ &\text{не решение} \Rightarrow a_1 \neq 0 \end{aligned} \right)$$

$$2) \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = \frac{-1}{3 \log_5 y} - 3$$

Замена: $b = \log_5 y$, $b \neq 0$

$$b^4 + \frac{4}{b} + \frac{1}{3b} + 3 = 0$$

$$b^4 + \frac{13}{3b} + 3 = 0$$

$$3b^5 + 9b + 13 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Расс-м $g(b) = 3b^5 + 9b + 13$, $g'(b) = 15b^4 + 9 > 0 \Rightarrow$

$g(b)$ - монотонно возраст. ф-ция $\Rightarrow$ решение $g(b_1) = 0$ единственно
и существует.

Поманно, что $b_1 \neq 0$, т.к. $g(0) = 13 \neq 0$

Тогда возвращение к записи: $b_1 = \log_5 y$

$$y = 5^{b_1}$$

Поманно, что если $\begin{cases} 3a_1^5 + 9a_1 - 13 = 0 \\ 3b_1^5 + 9b_1 + 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = -b_1$

(т.к. $f_1(a) = 3a^5 + 9a$, $f_1'(a) = 15a^4 + 9 > 0 \Rightarrow f_1(a)$ монотонно возрастает)
и $\exists! a_1$: $f_1(a_1) = 13$; $f_1(b_1) = -13$ и это при $a_1 = -b_1$

Тогда $xy = \frac{5^{a_1}}{2} \cdot 5^{b_1} = \frac{5^{a_1}}{2} \cdot 5^{-a_1} = \frac{1}{2}$

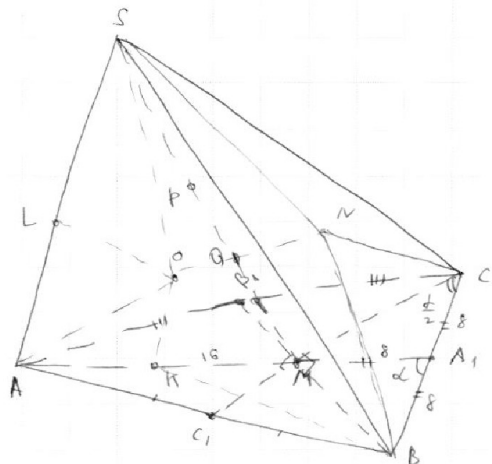
Ответ: $xy = \frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

[illegible]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



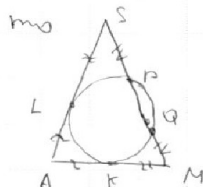
Exmo: $SP = 140$, $S(ABC) = 100$,

$$SA = BC = 16$$

а). т.к. т. L и т. K - т. касания сфер

$$\rightarrow AL = AK$$

m.k., L, K, P Q $\in$ Conere, ~~mo~~ u (SAM).



но Th. o. селузен и кас-и:

$$SL^2 = SP \cdot SQ$$

$$KM^2 = MQ \cdot MP =$$

$$= SP \cdot MP = SP(MQ + QP) =$$

$$= SP(PQ + SP) = SP \cdot SQ = SL^2$$

$$\Rightarrow KM = SL \quad \Rightarrow SA = SL + LA = AK + KM = AM = 16$$

1) m.k. AA₁ - не гниет, то $\frac{AM}{AA_1} = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow AA_n = \frac{3}{2} AM = \frac{3}{2} \cdot 16 = 24$$

$$MA_1 = AA_1 - A/4 = 24 - 16 = 8$$

$$2). S(ABC) = \frac{CB}{2} \cdot AA_1 \sin \alpha$$

28. $\alpha = \angle A A_1 B$

$$100 = \frac{16}{2} \cdot 24 \cdot \sin \alpha$$

$$\sin x = \frac{25}{48}$$

3). $\oint_{\text{SCMR}} \angle A_1 B M = \angle A_1 M B \quad (\angle M A_1 B = p(\sigma A)) \Rightarrow \angle A_1 B M = \frac{\pi - \alpha}{2}$

$$\angle CA_1M = \angle CMA_1 = \angle (AMA_1C - p/\delta n) \Rightarrow \angle CMA_1 = \angle \frac{MA_1B}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \angle CMB = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow CM \perp MB$$

$$4). CM = CB \cos \frac{\phi}{2} = 16 \cos \frac{\phi}{2} = 16 \sqrt{\frac{48 + \sqrt{1675}}{56}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{625}{98^2}} = \frac{\sqrt{1679}}{98} ; \cos \frac{\alpha}{2} > 0, \sin \frac{\alpha}{2} < 90^\circ$$

$$\therefore \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{48 + \sqrt{1679}}{96}}$$

$$BM = CB \sin \frac{\angle}{2} = 16 \sin \frac{\angle}{2}$$

$$5). AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 24 \cdot \frac{3}{2} \text{ CM} \cdot \frac{3}{2} \text{ BM} = 6 \cdot 9 \cdot 16^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 27 \cdot 16^2 \sin \alpha =$$

$$= 27 \cdot 16^2 \cdot \frac{25}{98} = \frac{27 \cdot 16 \cdot 25}{2} = 9 \cdot 16 \cdot 25 = (3 \cdot 4 \cdot 5)^2 = 60^2 = 3600$$

Omben: 3600



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5). SM и SL - кас-е к сфере $\Rightarrow SL = SM = 4$

$\Rightarrow AL = AS - SL = 16 - 4 = 12 = AN$

по сло AO - ч. сферой $\Rightarrow AO^2 = AL^2 + LO^2 = 12^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow AO = 13$

$SO^2 = LO^2 + SL^2 = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41 \Rightarrow SO = \sqrt{41}$

$OA_1^2 = OK^2 + KA_1^2 = 5^2 + (AA_1 - AN)^2 = 5^2 + (24 - 12)^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2$

$\Rightarrow OA_1 = 13$

$AN^2 = OA_1^2 - ON^2 = 13^2 - 5^2 = 12^2 \Rightarrow AN = 12$

$ON^2 = OC^2 - CN^2 = OC^2 - 5^2 = KC^2 \Rightarrow CN = KC$

$KB^2 = OB^2 - OK^2 = OB^2 - ON^2 = NB^2 \Rightarrow KB = NB$

$CN = KC$

$KB = NB \Rightarrow ANKC = ANBK$

BC - основа

SA, AA_1 - кас-е к сфере, SM и MA_1 - кас-е к сфере. $\Rightarrow ON \perp (BSC)$

(сфера касается между плоскостями (SBC) и (ABC))

OK - кас-е $\Rightarrow OK \perp (ABC)$ т.к. т.к. - т. касания сферы и плоскости

$\Rightarrow$ т.к. L, N $\in$ $\perp$ сечению $\Rightarrow S, N, A_1 \in \perp$ прямой

$\Rightarrow$ $AS A_1$ - р/р A

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{CF}{FE} = \frac{CX}{CY} = \sin \alpha = \frac{\sqrt{14}}{10}$$

$$\frac{CF}{CX}$$

$$CF \cdot CX = 14x^2$$

$$CF \cdot \frac{\sqrt{14}}{10} \cdot CX = 14x^2 \quad CF \cdot \frac{10}{\sqrt{14}} \cdot CX = 14x^2$$

$$CF \cdot CX = \frac{14\sqrt{14}}{10} x^2$$

$$\frac{CF}{CX} = k_1$$

$$k_1 \cdot CX^2 = \frac{14\sqrt{14}}{10} x^2$$

$$k_1 = \frac{14\sqrt{14}}{10} \frac{x^2}{CX^2}$$

$$2x^2 + ky^2 = d^2$$

$$50x^2 + 45y^2 = 45$$

$$0 \quad 45 \rightarrow 36x^2$$

$$1 \quad 40 \rightarrow$$

$$2 \quad 35$$

$$3 \quad 30$$

$$4 \quad 25$$

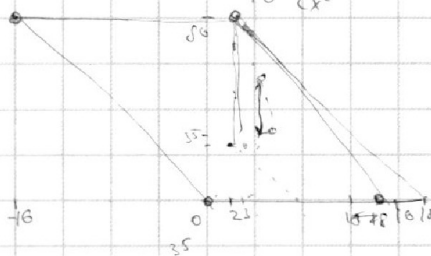
$$5 \quad 20$$

$$6 \quad 15$$

$$7 \quad 10$$

$$8 \quad 5$$

$$9 \quad 0$$



$$2x^2 + (45 - 50x)^2 = d^2$$

$$45^2 + 260x^2 - 4500x = d^2$$



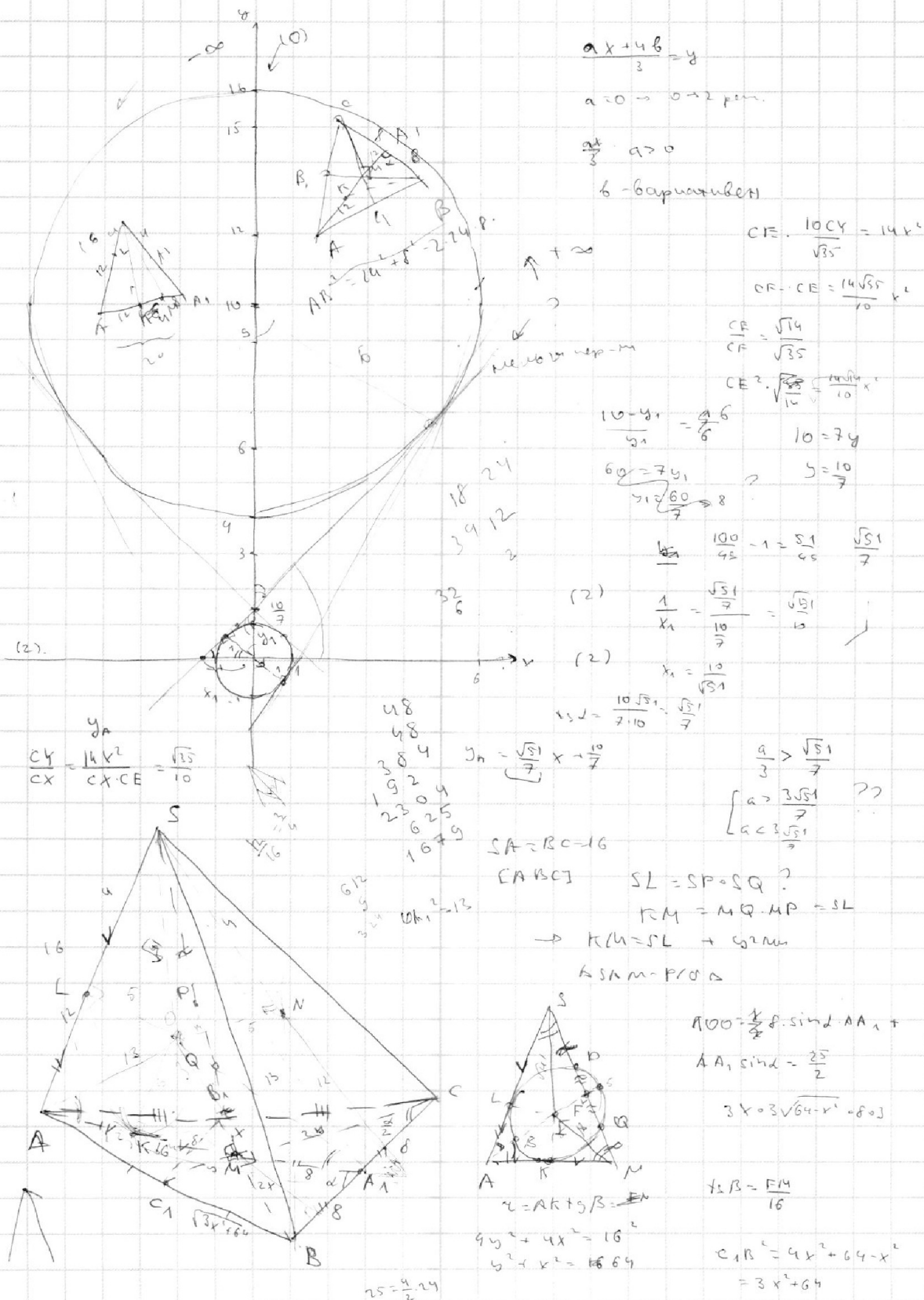
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$$

$$\arcsin a = b$$

$$a = \sin b$$

$$a \in [-1; 1]$$

$$b \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} = \frac{2\pi}{5}$$

$$3\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{10\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{2}$$

$$-\frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} \leq \pi \leq \frac{5\pi}{3}$$

$$-\frac{5\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{3} \leq \frac{10\pi}{3}$$

$$-1 \leq k \leq 2$$

$$k \in \{-1; 0; 1; 2\}$$

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2} \\ \cos x = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{2x - \pi}{10} + 2\pi k \\ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5} + 2\pi k \\ x = -\frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5} + 2\pi k \end{cases}$$

$$-2\pi \leq \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{5} \leq 3\pi$$

$$-8\pi \leq \frac{2\pi}{5} \leq \frac{8\pi}{5}$$

$$-1 \leq k \leq 1 \quad k \in \{-1; 0; 1\}$$

$$k = -1$$

$$\begin{cases} -5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi \\ \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2x - \pi}{10}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12 + 17 + 13 = 42 \\ 5\pi + \frac{\pi}{2} = 8\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4x}{5} = \frac{2\pi}{5} + 2\pi k \\ \frac{6x}{5} = -\frac{2\pi}{5} + 2\pi k \end{cases}$$

$$2\pi \cdot \frac{4}{5} = \frac{8\pi}{5}$$

$$\pi - 2x \leq 5\pi$$

$$2x \geq -4\pi$$

$$x \geq -2\pi$$

$$\pi - 2x \geq -5\pi$$

$$2x \leq 6\pi$$

$$x \leq 3\pi$$

$$x \in [-2\pi; 3\pi]$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{5} + 2\pi k \\ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{5} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{5} = -\frac{4\pi}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{5} = -\frac{4\pi}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{5} = -\frac{4\pi}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{5} = -\frac{4\pi}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{5} = -\frac{4\pi}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{5} = -\frac{4\pi}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{5} = -\frac{4\pi}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{5} = -\frac{4\pi}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{5} = -\frac{4\pi}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{5} = -\frac{4\pi}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{5} = -\frac{4\pi}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{5} = -\frac{4\pi}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{5} = -\frac{4\pi}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{5} = -\frac{4\pi}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{5} = -\frac{4\pi}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{5} = -\frac{4\pi}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{5} = -\frac{4\pi}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{5} = -\frac{4\pi}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{5} = -\frac{4\pi}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{5} = -\frac{4\pi}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{5} = -\frac{4\pi}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{5} = -\frac{4\pi}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{5} = -\frac{4\pi}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{5} = -\frac{4\pi}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{5} = -\frac{4\pi}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{5} = -\frac{4\pi}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{5} = -\frac{4\pi}{5}$$



$$1). \text{ Check } k=1: \arcsin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{5}k\right)\right) = \frac{\pi - (\pi + 5\pi k)}{10} = -\frac{\pi}{2}k$$

$$1). k=-1: \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}(-1) \quad \checkmark$$

$$2). k=0: 0=0$$

$$3). k=1: \frac{3\pi}{2} = \checkmark$$

$$2). \arcsin\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3}k\right)\right) = \frac{\pi - \left(-\pi + 5\pi k\right)}{10} = \frac{\frac{5\pi}{3} - \frac{10\pi}{3}k}{10} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi k}{3}$$

$$1). k=-1: -\frac{\pi}{3} = -2 \quad \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \quad \checkmark$$

$$2). k=0: \frac{\pi}{6} = \checkmark$$

$$3). k=1: -\frac{\pi}{6} = \checkmark$$

$$4). k=2: -\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6} - \frac{4\pi}{6} = -\frac{3\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} \quad \checkmark$$

$$0.5) k=2:$$

$$1. \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 & 3 & 5 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ 2 & -3 & -3 \end{matrix} = z_2$$

$$x_1 + x_2 \geq 8$$

$$x_2 + x_3 \geq 12$$

$$x_3 + x_1 \geq 14$$

$$x_1, \dots \geq 0$$

$$\min(x_1 + x_2 + x_3 + \dots)$$

$$x_1 + x_2 \geq 4y_1 + y_2 \geq 14$$

$$y_1 + y_2 \geq 20$$

$$y_3 + y_1 \geq 21$$

$$x_2 + x_3 \geq 12$$

$$z_2 + z_3 \geq 17$$

$$z_3 + z_1 \geq 39$$

$$z_1 + z_2 \geq 12$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq \frac{34}{2} = 17$$

$$y_1 + y_2 + y_3 \geq \frac{55}{2} > 27$$

$$z_1 + z_2 + z_3 \geq 34$$

$$12 \quad 0 \quad 17$$

$$15 \quad 4 \quad 26$$

$$1 \quad 7 \quad 5$$

$$6 \quad 2 \quad 10$$

$$15 \quad 3 \quad 9$$

$$6 \quad 6 \quad 11 \quad 14 \quad 1 \quad 16$$

$$10 \quad 2 \quad 15$$

$$17 \quad 16$$

$$35 \quad 40$$

$$56 \quad 12$$

$$68 \quad 17$$

$$5 \quad 9 \quad 11$$

$$6 \quad 8 \quad 12$$

$$7 \quad 7 \quad 13$$

$$8 \quad 6 \quad 14$$

$$28 \quad \checkmark$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x > 0$$

$$2x \neq 1$$

$$8x^3 > 0$$

$$\frac{1}{4} = 0.2$$

$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{11}{3a} - 3$$

$$\left(\frac{4}{3} + 3\right) \frac{1}{a} - \frac{13}{3a}$$

$$a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0$$

$$a^5 + 3a - \frac{13}{3} = 0$$

$$3a^5 + 9a - 13 = 0$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \log_5^4 \frac{5}{8x^3} - 3$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3 \log_5 2x} - 3$$

$$a^4 = \frac{4}{3a} + \frac{3}{a} - 3$$

$$a^4 = \frac{13}{3a} - 3$$

$$F(a) = 3a^5 + 9a - 13 = 0$$

$$F'(a) = 15a^4 + 9 > 0 \rightarrow$$

$$0 = a^4 = -\frac{9}{15} \rightarrow \text{no max/min}$$

$$1 \rightarrow \frac{3}{2}$$

$$\frac{4}{3}$$

$$\frac{4^5}{3^4} + \frac{12-13}{-1}$$

$$a = \log_5 4$$

$$-a = \log_5 2x$$

$$y = 5^a$$

$$2x = 5^{-a}$$

$$x = \frac{5^{-a}}{2}$$

$$\frac{5^{-a}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$[a \neq 0] \checkmark \checkmark$$

$$x > 0 \quad y > 0$$

$$x \neq \frac{1}{2} \quad y \neq 1$$

$$3 \cdot \frac{3^5}{2^5} + \frac{9 \cdot 3}{2} - 13 = 0$$

$$3^6 + 2 \cdot \frac{3}{2} - 13 \cdot 2^5$$

$$2^4(22 - 26)$$

$\rightarrow$ если верно есть $\rightarrow$ осцил

$$\log_2 8 = \log_8 8 = \log_8 64 = 2$$

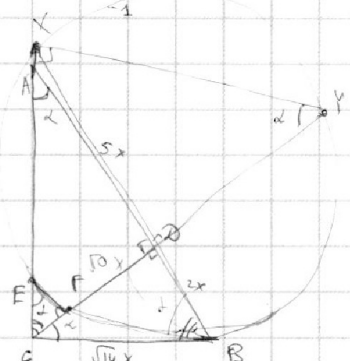
$$\log_2 4 = 2 \quad \log_2 4 = \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 2}{3}$$

$$8^4 + \frac{4}{6} = \frac{1}{36} - 3$$

$$8^4 + \frac{4}{6} + \frac{1}{36} + 3 = 0$$

$$8^4 + \frac{13}{36} + 3 = 0$$

$$38^5 + 98 + 13 = 0$$



$$[X_0 = \frac{1}{2}]$$

$$\frac{[ABC]}{[CEF]}$$

$$CE = CA = CB^2 = CF \cdot CD = 14x^2$$

$$\frac{CF}{CD} = \frac{CE}{CA} = \frac{EF}{5x}$$

$$CD = \sqrt{10}x$$

$$CB = \sqrt{10x^2 + 4x^2} = x\sqrt{14}$$

$$AC = \sqrt{10x^2 + 25x^2} = x\sqrt{35}$$

$$\frac{[ABC]}{[CEF]} = \left(\frac{EF}{AC}\right)^2 = \left(\frac{4}{x\sqrt{35}}\right)^2 = \left(\frac{CF}{AB}\right)^2 = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$

$$CB^2 = CE \cdot AC = CF$$

$$\frac{CF}{CB} = \frac{14x}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{14}x} = \sqrt{\frac{14}{10}}$$

EC

$$\frac{CF}{AB} = \frac{CF}{7x}$$

$$\frac{CF}{EC} = \frac{CF}{14x^2}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-10)^2 = 36 \end{cases}$$

$$\frac{CF}{AC} = \frac{CF}{CD} = \frac{EF}{10}$$

$$\frac{CF}{\sqrt{35}} = \frac{CF}{\sqrt{10}} = \frac{EF}{5}$$

$$\frac{\sqrt{14}x \cdot \sqrt{35}x}{CF} = CF$$

$$14x^2 = CF \cdot CF$$

$$CF^2 + CF^2 = CF^2$$

$$100 = \frac{16}{2} \cdot h_p \quad h_p = \frac{100}{8}$$

$$\sin \alpha = \frac{25}{2 \cdot 24} = \frac{25}{48} \rightarrow \cos \alpha$$

$$\rightarrow \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\rightarrow x \rightarrow ?$$

$$\frac{CF}{CX} = \frac{CF}{CX}$$

$$14x^2 = C$$

$$\frac{CF}{AC} = \frac{CF}{CD}$$

$$CF = \frac{\sqrt{35}}{10} \cdot CX$$

$$\frac{CF}{CX} = \frac{\sqrt{35}}{10}$$

$$CF = CX \sqrt{\frac{35}{14}}$$

$$CX \cdot CF$$

$$\frac{CF}{\sqrt{14}x} = \frac{CF}{\sqrt{14}x}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!