



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8xz} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c \in \mathbb{N}$: $ab: 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$ $bc: 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{14}$ $ac: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{19}$ $\min abc$

Покажем что $\min abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

$\Rightarrow abc: 5^{39} \Rightarrow$ на $abc: 2^{16} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{16} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$ (ибо $a, b, c \in \mathbb{N}$).

$a = 2^8 \cdot 3^7 \cdot 5^{12}$
 $b = 2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^8$
 $c = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{27}$

$\Rightarrow ab = 2^8 \cdot 3^{15} \cdot 5^{12}$ $bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{14}$ $ac = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{19}$

$\Rightarrow$ пример работает, в нем $abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$, т.е. равно на-
 маемому.

Ответ: $\min abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$.

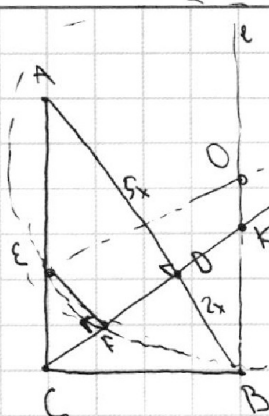
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$EF \parallel AD$, $CD \perp AD \Rightarrow EF \perp CD \Rightarrow \angle EFD = 90^\circ$, а
так как B — окружность $(E, F, B) \Rightarrow$ или провести
 FD до второго пересечения, то этот пересек. — точка
 E' , которая диаметрально противоположна E .
Нам известна кас. BC — или O — центр окр., то $OB \perp BC$
 $\Rightarrow OB \parallel AC$ ($\angle C = 90^\circ$). EE' — диаметр $\Rightarrow O$ — пересечение
 EE' и l (прямая $\parallel AC$, которая через B), значит
 O — с-р. EE' $\Rightarrow$ пусть K — точка пересечения l и CE' ,
тогда OK — с-р. линии $\Delta EE'$ ($\Rightarrow K$ — середина CE'). Пусть

$$AD = 5x \Rightarrow BD = 2x \Rightarrow CD = \sqrt{10}x \text{ (по вл. в гипотен. } \Delta CD^2 = AD \cdot BD) \Rightarrow AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{35}x$$

$$\text{и } BC = \sqrt{CD^2 + BD^2} = \sqrt{14}x. l \parallel AC \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{CD}{KD} \Rightarrow \frac{5x}{2x} = \frac{CD}{KD} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{CD}{KD} \Rightarrow KD = \frac{2 \cdot CD}{5} = \frac{2 \cdot \sqrt{10}x}{5}$$

$$\text{так как } \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BK} \Rightarrow BK = AC \cdot \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot \sqrt{35}x}{5}. \text{ Пусть мы знаем что } BC^2 = CF \cdot CE' \text{ (как следствие точки } l \text{ отн. касшей окр.)}$$

$$14x^2 = CF \cdot CE' = CF \cdot (CF + 2 \cdot CK) \Rightarrow 7x^2 = CF \cdot CK. \text{ Пусть } CK = \frac{4}{5} \sqrt{10}x. \text{ Тогда } CF = \frac{7x^2}{\frac{4}{5} \sqrt{10}x} = \frac{7 \cdot 5 \cdot x}{4 \sqrt{10}} = \frac{35x}{4 \sqrt{10}}$$

$$CK = \sqrt{BC^2 - BK^2} = \sqrt{14x^2 - \left(\frac{2 \cdot \sqrt{35}x}{5}\right)^2} = x \sqrt{14 - \frac{4 \cdot 35}{25}} = x \sqrt{14 - \frac{56}{5}} = x \sqrt{\frac{70 - 56}{5}} = x \sqrt{\frac{14}{5}} = \frac{\sqrt{14}x}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Тогда } CF \cdot CK = 7x^2 \Rightarrow 7x^2 = \frac{35x}{4 \sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{14}x}{\sqrt{5}} \Rightarrow CF = \frac{10x}{\sqrt{2}}$$

$$S_{ABK} = \frac{CD \cdot AB}{2} \cdot \frac{BK}{AC} = \frac{CD \cdot AB}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{CD \cdot AB}{5}$$

$$S_{DEF} = S_{ACD} \cdot \left(\frac{CF}{CD}\right)^2 = \frac{CD \cdot AD}{2} \cdot \left(\frac{CF}{CD}\right)^2$$

$$\text{Тогда } \frac{S_{ABK}}{S_{DEF}} = \frac{CD \cdot AB \cdot CD^2}{CD \cdot AD \cdot CF^2} = \frac{AB \cdot CD^2}{AD \cdot CF^2} = \frac{7x \cdot 10x^2}{5x \cdot 5x^2} = \frac{7 \cdot 10 \cdot 2}{5 \cdot 5} = \frac{28}{5} = 5,6$$

$$\text{Ответ: } S_{ABK} / S_{DEF} = \frac{28}{5} = 5,6.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x \Rightarrow \arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$, так как $\arcsin(\cos x)$ определен при $\forall x$,
 при этом он принимает значения $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \frac{\pi - 2x}{10} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \pi - 2x \in [-5\pi, 5\pi] \Rightarrow$
 $\Rightarrow -2x \in [-6\pi, 4\pi] \Rightarrow 2x \in [-4\pi, 6\pi] \Rightarrow x \in [-2\pi, 3\pi]$
 $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10} \Rightarrow \sin(\arcsin(\cos x)) = \sin(\frac{\pi - 2x}{10}) \Rightarrow \cos x = \sin(\frac{\pi - 2x}{10}) \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} - x) -$
 $-\sin(\frac{\pi - 2x}{10}) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \sin(\frac{1}{2}(\pi - x - \frac{\pi - 2x}{10})) \cdot \cos(\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi - 2x}{10})) = 0$

$$\sin(\frac{1}{2}(\frac{5\pi - 10x - \pi + 2x}{10})) = 0$$

$$\frac{5\pi - 8x}{20} = \pi k$$

$$\frac{\pi - 2x}{5} = \pi k$$

$$\pi - 2x = 5\pi k$$

$$2x = \pi - 5\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{2}(1 - 5k)$$

$$k \leq -2 \Rightarrow -5k \geq 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 5k \geq 11 \Rightarrow x \geq \frac{11\pi}{2} > 3\pi,$$

не подходит

$$k \geq 2 \Rightarrow -5k \leq -10 \Rightarrow 1 - 5k \leq -9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \leq \frac{-9\pi}{2} < -2\pi, \text{ не подходит}$$

$$k = 1 \Rightarrow x = -2\pi$$

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$k = -1 \Rightarrow x = 3\pi$$

Тогда для полученных нами x равенство нулей выполняется (ибо они корни уравнения), при этом они аргумента $\in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow$ тогда один аргумента равен $\Rightarrow$ так нулей π значений, а только три.

Ответ: $x \in \{-2\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}, 3\pi\}$.

$$\cos(\frac{1}{2}(\frac{5\pi - 10x + \pi - 2x}{10})) = 0$$

$$\frac{6\pi - 12x}{20} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$\frac{3\pi - 6x}{10} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$3\pi - 6x = 5\pi + 10\pi n$$

$$-6x = 10\pi n + 2\pi$$

$$-3x = 5\pi n + \pi$$

$$x = -\frac{\pi}{3}(5n + 1)$$

$$n \leq -3 \Rightarrow 5n \leq -15 \Rightarrow 5n + 1 \leq -14 \Rightarrow x \geq \frac{14\pi}{3} > 3\pi, \text{ не подходит}$$

$$n \geq 2 \Rightarrow 5n \geq 10 \Rightarrow 5n + 1 \geq 11 \Rightarrow x \leq \frac{-11\pi}{3} < -2\pi, \text{ не подходит}$$

$$n = 1 \Rightarrow x = -2\pi$$

$$n = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3}$$

$$n = -1 \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3}$$

$$n = -2 \Rightarrow x = 3\pi$$

$$k, n \in \mathbb{Z}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

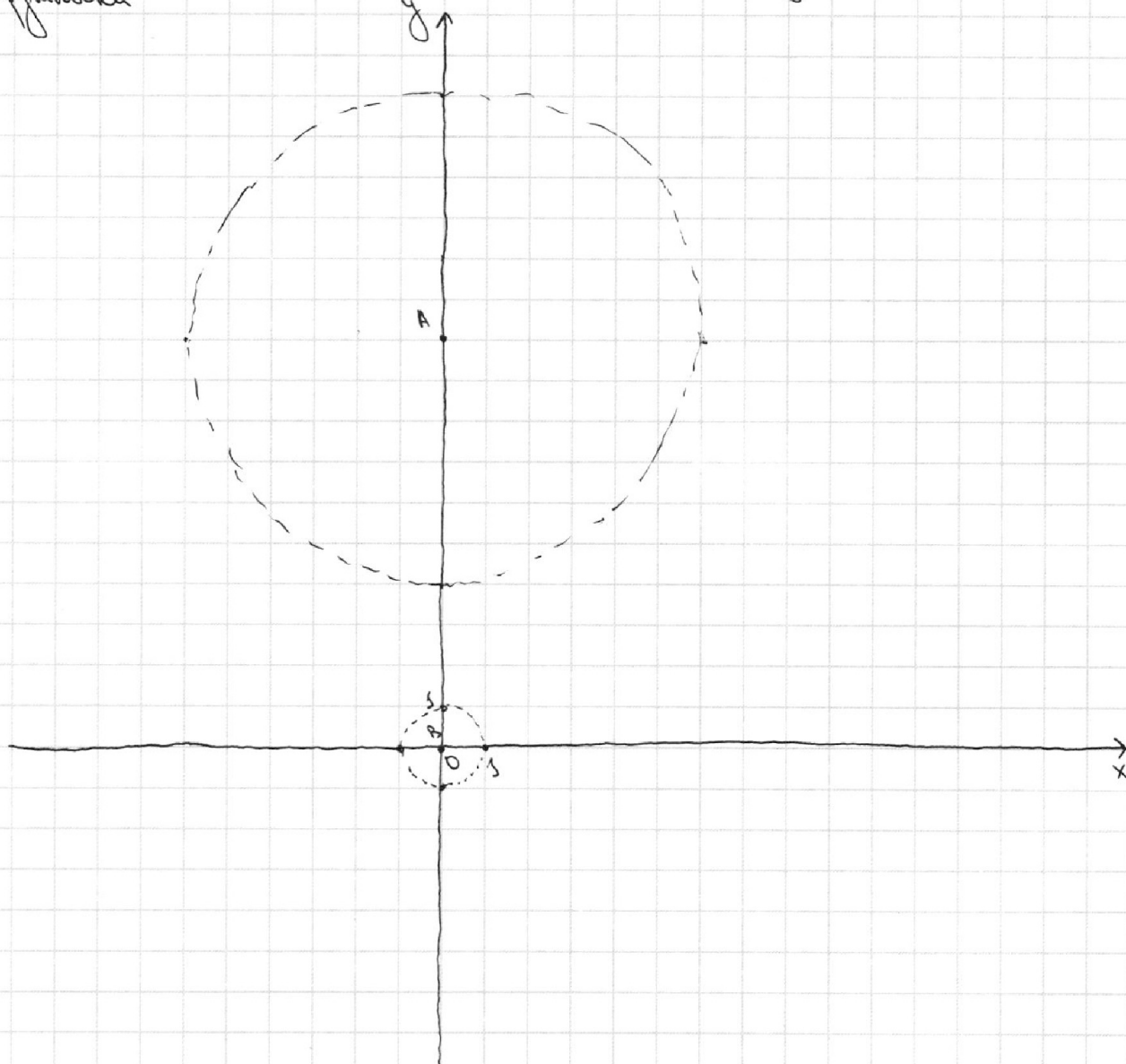
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \Rightarrow 3y = ax + 4b \Rightarrow y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3} \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 10) = 0 \Rightarrow (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 10)^2 - 36) = 0 \end{cases}$$

? а: b: равно 4 реи.

Посмотрим на график II уравнение, понятно, что это объединение 2 фиксированных окружностей



I окр.: центр $A(0, 10)$ и $r=6$

II окр.: центр $B(0, 0)$ и $r=1$

График I уравнение - прямая, у которой за наклон отвечает a , а за расстояние наклонности - b . Так как нужно равно 4 реи. $\Rightarrow$ наша прямая должна касаться каждой окружности в 2 точках $\Rightarrow$ расстояние от A до нашей прямой ≤ 6 и расстояние от B до нашей прямой ≤ 1 . Заменим расстояние от A до прямой: $\frac{|4b - 3a|}{\sqrt{a^2 + 9}}$, это $\leq 6 \Rightarrow \frac{|4b - 3a|}{\sqrt{a^2 + 9}} \leq 6$. Заменим расстояние от B до прямой: $\frac{|4b|}{\sqrt{a^2 + 9}}$, это $\leq 1 \Rightarrow \frac{|4b|}{\sqrt{a^2 + 9}} \leq 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\Rightarrow |4b| < \sqrt{a^2 + 9} \Rightarrow$ нас такая вещь:
 $\left\{ \begin{array}{l} |4b-30| < 6\sqrt{a^2+9} \\ |4b| < \sqrt{a^2+9} \end{array} \right. \Rightarrow |30-4b| < 6\sqrt{a^2+9} \Rightarrow |4b| + |30-4b| < 7\sqrt{a^2+9}$ при этом из-

вечно что $|4b| + |30-4b| \geq 4b + (30-4b) = 30 \Rightarrow 7\sqrt{a^2+9} > 30 \Rightarrow \sqrt{a^2+9} > \frac{30}{7} \Rightarrow a^2 + 9 > \frac{900}{49} \Rightarrow$
 $a^2 > \frac{900-441}{49} = \frac{459}{49} \Rightarrow |a| > \frac{\sqrt{459}}{7} = \frac{3\sqrt{51}}{7}$, потому что при таких a $7\sqrt{a^2+9} > 30 \Rightarrow$ б.
 $\sqrt{a^2+9} > \frac{30}{7}$ и $\sqrt{a^2+9} > \frac{30}{7}$. Возьмем $b = \frac{15}{4}$, тогда $4b = \frac{30}{4} \Rightarrow |4b| \leq \frac{30}{4} < \sqrt{a^2+9}$ и
 $|4b-30| = |\frac{30}{4} - 30| = 30 \cdot \frac{3}{4} < \sqrt{a^2+9}$, т.е. для a таких, что $|a| > \frac{3\sqrt{51}}{7}$, можно брать $b = \frac{15}{4}$.
 наймкость (а для других a мы можем, то можно найти).
 Answer: $a \in (-\infty, -\frac{3\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{7}, +\infty)$, т.е. $|a| > \frac{3\sqrt{51}}{7}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} (\log_2 x)^4 - 3 \log_2 5 = \log_{25} 625 - 3 \\ (\log_5 y)^4 + 4 \log_5 5 = \log_{25} \left(\frac{1}{5}\right) - 3 \end{cases}$$

ОДЗ: $x, y > 0$; $x \neq \frac{1}{2}$ и $y \neq \frac{1}{5}$

пусть $\log_5 2x = a$ и $\log_5 y = b$ ($a, b \neq 0$)

Тогда: $\begin{cases} a^4 - \frac{3}{a} = \frac{1}{a} - 3 \Rightarrow a^4 - \frac{4}{a} + 3 = 0 \\ b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{b} - 3 \Rightarrow b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{b} - 3 \Rightarrow b^4 + \frac{4}{b} + \frac{1}{b} + 3 = 0 \end{cases}$

га $a^5 + 3a - 4 = 0$ и $3b^5 + 5b + 13 = 0$

$a^5 + 3a - 4 = 0 \Rightarrow (a-1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 4) = 0$. Рассмотрим на $f(a) = a^4 + a^3 + a^2 + a + 4$ показано, что
 в $a > 0$ $f(a) > 0$, если $a \leq 1$, то $a^4 + a^3 \geq 0$ и $a^2 + a > 0$ (ибо a^2 и $a > 0$ и $|a| > 1 \Rightarrow f(a) > 0$,
 если $a \in (0; 1)$, то $4 + a^2 + a > 2$ (ибо $|a| < 1 \Rightarrow f(a) > 0$. Значит $f(a) > 0$ при $\forall a \Rightarrow$
 $\Rightarrow a^4 + a^3 + a^2 + a + 4 \neq 0 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \log_5 2x = 1 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$.

$3b^5 + 5b + 13 = 0$, показано, что если $f(b) = 3b^5 + 5b + 13$, то $f'(b) = 15b^4 + 5 > 0 \Rightarrow f(b)$ имеет всего
 га $\Rightarrow y$ не равно 1 корню (у многочлена четвёртой степени — корня).

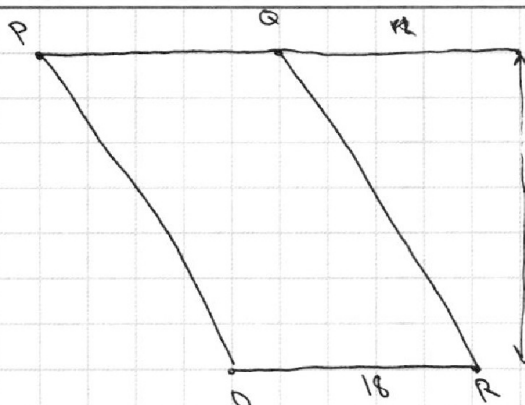
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



? координаты вер $A(x_1, y_1); B(x_2, y_2)$:
 $5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$
 Пусть $x_2 - x_1 = a$ и $y_2 - y_1 = b$,
 тогда $5a + b = 45 \Rightarrow b = 45 - 5a$. Также $|a| \leq 18$ и $|b| \leq 80$.
 Тогда $45 - 5a \leq 80 \Rightarrow -5a \leq 35 \Rightarrow a \geq -7$.
 Также $45 - 5a \geq -80 \Rightarrow -5a \geq -125 \Rightarrow a \leq 25$.
 Тогда $a \in [-7, 25]$ и $|a| \leq 18 \Rightarrow a \in [-7, 18]$.

$|a| \leq 18 \Rightarrow 5a \in [-90, 90] \Rightarrow 45 - b \in [-90, 90] \Rightarrow -b \in [-135, 45] \Rightarrow b \in [-45, 135]$ при
 том $|b| \leq 80 \Rightarrow b \in [-45, 80]$ при том $b \in [-45, 80]$. Тогда $45 - 5a \in [-45, 80] \Rightarrow$
 $9 - a \in [-18, 16] \Rightarrow -a \in [-25, 7] \Rightarrow a \in [-7, 25] \Rightarrow a \in [-7, 18]$, что $|a| \leq 18$.
 Рассмотрим сколько точек есть $b = 80$ и $a = -7$. $b = 80 \Rightarrow B \in PQ$ и $A \in OR$, при том
 $a = -7 \Rightarrow$ хороших пар равно $18 + 1 - 7 = 12$. Тогда $b = 75$ и $a = -6$, если мы фиксируем
 одну из точек, то выберем пару y так $19 - 6 = 13$ возможностей, выберем пару
 горизонт. прямых равно $81 - 75 = 6 \Rightarrow$ всего $6 \cdot 13 = 78$. Тогда b будет такое y как
 $81 - |b|$ вариантов выбора пары горизонтальных прямых и $19 - |a|$ вариантов выбора
 пары не уже заданной прямой $\Rightarrow$ всего вариантов $(81 - |b|)(19 - |a|) = 81 \cdot 19 - 19|b| - 81|a| + |a||b|$.
 Нам нужно найти сумму $a, b: (-7, 80); (-6, 75); (-5, 70); \dots; (18, -45)$, то есть 26 пар,
 считая все наши варианты для каждой пары получим $26 \cdot 81 \cdot 19 - 19(80 + 75 + \dots + 10 + 5 + \dots + 1) -$
 $81(7 + 6 + \dots + 1 + 0 + 1 + \dots + 18) + (7 \cdot 80 + 6 \cdot 75 + \dots + 1 \cdot 50)$
 $19(80 + 75 + \dots + 10 + 5 + \dots + 1) = 95(161 + \dots + 1 + \dots + 9) = 95 \cdot \left(\frac{16 \cdot 17}{2} + \frac{10 \cdot 9}{2}\right) = 95(45 + 45) =$
 $95 \cdot 181$
 $81(7 + \dots + 1 + 1 + \dots + 18) = 81 \left(\frac{7 \cdot 8}{2} + \frac{18 \cdot 19}{2}\right) = 81(21 + 171) = 81 \cdot 192$
 $26 \cdot 81 \cdot 19 - 95 \cdot 181 - 81 \cdot 192 = (13 \cdot 81 \cdot 19 - 181 \cdot 5 \cdot 19) + (13 \cdot 19 \cdot 81 - 192 \cdot 81) = 19(13 \cdot 81 - 181 \cdot 5) + 81(13 \cdot 19 -$
 $192) = 19(1053 - 905) + 81(247 - 192) = 19 \cdot 148 + 81 \cdot 55$
 Остается посчитать $(7 \cdot 80 + 6 \cdot 75 + \dots + 1 \cdot 50) = 16(45 + 40 + \dots + 5) + 9 \cdot 0 + 7 \cdot 80 + 6 \cdot 75 + \dots + 1 \cdot 50 =$
 $= 16 \cdot 5 \cdot (9 + \dots + 1) + 5(7 \cdot 16 + 6 \cdot 15 + \dots + 1 \cdot 10) = 90 \cdot 45 + 5(112 + 90 + 70 + 52 + 36 + 22 + 10) = 90 \cdot 45 + 5 \cdot$
 $\times (170 + 110 + 112) = 90 \cdot 45 + 5 \cdot (280 + 112) = 90 \cdot 45 + 5 \cdot 392$
 $19 \cdot 148 + 81 \cdot 55 + 90 \cdot 45 + 5 \cdot 392 = 2960 - 148 + 4455 + 1960 = 4520 - 148 + 81 \cdot 105 =$
 $= 8505 + 4520 - 148 = 13425 - 148 = 13277$
 Ответ: 13277.

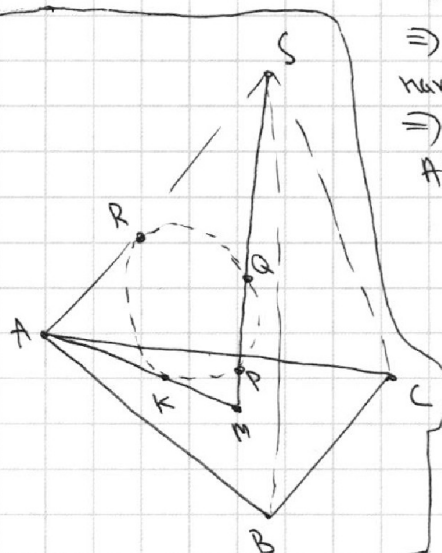
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

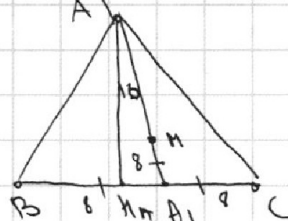
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть R — точка касания сферы с AS . $SP = MQ \Rightarrow$
 $\Rightarrow SQ = MP \Rightarrow SP \cdot SQ = MP \cdot MQ \Rightarrow$ у M и S одинаковые степеня отн. сферы $\Rightarrow MK^2 = SR^2$ (по степеням кас.)
 $\Rightarrow MK = SR$. Также $AR = AK$ как отрезки кас. Значит,
 $AS = AM$, $SA = BC (=16) \Rightarrow AM = BC = 16$.

Посмотрим на $\triangle ABC$.



$$AM = BC = 16, S_{\triangle ABC} = 100$$

$$AA_1 = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \cdot 16 = \frac{32}{3}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \frac{32}{3} = \frac{256}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{256}{3} = 100 \Rightarrow \frac{256}{3} = 100 \Rightarrow \frac{256}{3} = 100$$

$$\Rightarrow \frac{256}{3} = 100 \Rightarrow \frac{256}{3} = 100$$

$$\Rightarrow \frac{256}{3} = 100 \Rightarrow \frac{256}{3} = 100$$

$$\Rightarrow \frac{256}{3} = 100 \Rightarrow \frac{256}{3} = 100$$

$$\Rightarrow \frac{256}{3} = 100 \Rightarrow \frac{256}{3} = 100$$

$$\Rightarrow \frac{256}{3} = 100 \Rightarrow \frac{256}{3} = 100$$

$$\Rightarrow \frac{256}{3} = 100 \Rightarrow \frac{256}{3} = 100$$

$$\Rightarrow \frac{256}{3} = 100 \Rightarrow \frac{256}{3} = 100$$

$$\Rightarrow \frac{256}{3} = 100 \Rightarrow \frac{256}{3} = 100$$

$$\Rightarrow \frac{256}{3} = 100 \Rightarrow \frac{256}{3} = 100$$

$$\Rightarrow \frac{256}{3} = 100 \Rightarrow \frac{256}{3} = 100$$

$$\Rightarrow \frac{256}{3} = 100 \Rightarrow \frac{256}{3} = 100$$

$$\Rightarrow \frac{256}{3} = 100 \Rightarrow \frac{256}{3} = 100$$

$$\Rightarrow \frac{256}{3} = 100 \Rightarrow \frac{256}{3} = 100$$

$$\Rightarrow \frac{256}{3} = 100 \Rightarrow \frac{256}{3} = 100$$

$$\Rightarrow \frac{256}{3} = 100 \Rightarrow \frac{256}{3} = 100$$

$$\Rightarrow \frac{256}{3} = 100 \Rightarrow \frac{256}{3} = 100$$

$$\Rightarrow \frac{256}{3} = 100 \Rightarrow \frac{256}{3} = 100$$

$$\Rightarrow \frac{256}{3} = 100 \Rightarrow \frac{256}{3} = 100$$

$$\Rightarrow \frac{256}{3} = 100 \Rightarrow \frac{256}{3} = 100$$

$$\Rightarrow \frac{256}{3} = 100 \Rightarrow \frac{256}{3} = 100$$

$$\Rightarrow \frac{256}{3} = 100 \Rightarrow \frac{256}{3} = 100$$

$$\Rightarrow \frac{256}{3} = 100 \Rightarrow \frac{256}{3} = 100$$

$$\Rightarrow \frac{256}{3} = 100 \Rightarrow \frac{256}{3} = 100$$

$$\Rightarrow \frac{256}{3} = 100 \Rightarrow \frac{256}{3} = 100$$

$$\Rightarrow \frac{256}{3} = 100 \Rightarrow \frac{256}{3} = 100$$

$$\Rightarrow \frac{256}{3} = 100 \Rightarrow \frac{256}{3} = 100$$

$$\Rightarrow \frac{256}{3} = 100 \Rightarrow \frac{256}{3} = 100$$

$$\Rightarrow \frac{256}{3} = 100 \Rightarrow \frac{256}{3} = 100$$

$$\Rightarrow \frac{256}{3} = 100 \Rightarrow \frac{256}{3} = 100$$

$$\Rightarrow \frac{256}{3} = 100 \Rightarrow \frac{256}{3} = 100$$

$$\Rightarrow \frac{256}{3} = 100 \Rightarrow \frac{256}{3} = 100$$

$= \frac{BM \cdot CM}{2}$, также $S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2} \cdot h' \cdot BC$ (h' — высота из M на BC). $h' = \frac{h}{3}$ (где h — высота из A на BC).
 $\frac{h \cdot BC}{2} = S_{\triangle ABC} = 100 \Rightarrow h = \frac{200}{16} = \frac{25}{2} \Rightarrow h' = \frac{25}{6} \Rightarrow S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{6} \cdot 16 = \frac{100}{3} \Rightarrow \frac{BM \cdot CM}{2} = \frac{100}{3} \Rightarrow BM \cdot CM = \frac{200}{3} \Rightarrow BB_1 \cdot CC_1 = \frac{3}{2} BM \cdot \frac{3}{2} CM = \frac{9}{4} \cdot \frac{200}{3} = 3 \cdot 50 = 150 \Rightarrow AP_1 \cdot BP_1 \cdot CC_1 = 150 \cdot 24 = 3600$.

Ответ: а) 3600.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} a &= 12 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \\ b &= 12 \cdot 24 \cdot 36 \cdot 48 \cdot 60 \cdot 72 \cdot 84 \cdot 96 \cdot 108 \cdot 120 \cdot 132 \cdot 144 \cdot 156 \cdot 168 \cdot 180 \cdot 192 \cdot 204 \cdot 216 \cdot 228 \cdot 240 \cdot 252 \cdot 264 \cdot 276 \cdot 288 \cdot 300 \cdot 312 \cdot 324 \cdot 336 \cdot 348 \cdot 360 \cdot 372 \cdot 384 \cdot 396 \cdot 408 \cdot 420 \cdot 432 \cdot 444 \cdot 456 \cdot 468 \cdot 480 \cdot 492 \cdot 504 \cdot 516 \cdot 528 \cdot 540 \cdot 552 \cdot 564 \cdot 576 \cdot 588 \cdot 600 \cdot 612 \cdot 624 \cdot 636 \cdot 648 \cdot 660 \cdot 672 \cdot 684 \cdot 696 \cdot 708 \cdot 720 \cdot 732 \cdot 744 \cdot 756 \cdot 768 \cdot 780 \cdot 792 \cdot 804 \cdot 816 \cdot 828 \cdot 840 \cdot 852 \cdot 864 \cdot 876 \cdot 888 \cdot 900 \cdot 912 \cdot 924 \cdot 936 \cdot 948 \cdot 960 \cdot 972 \cdot 984 \cdot 996 \cdot 1000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax - 3y + 4b &= 0 \Rightarrow ax + 4b = 3y \Rightarrow y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3} \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) &= 0 \\ a: 7b: \text{равно + рен.} \end{aligned}$$

$$17 + 12 + 39 = 39 + 29 = 68$$

$$17 + 12 + 39 = 39 + 29 = 68$$

$$34$$

$$ab: 2 \cdot 3 \cdot 5 \quad a: 2^3 \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \quad a: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$10 \arcsin(\cos x) \in [-5\pi; 5\pi]$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$$

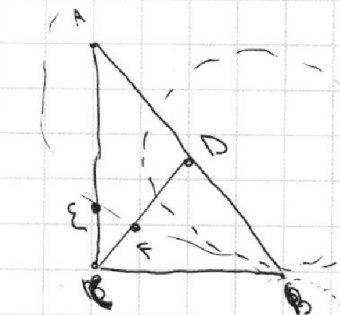
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\sin 2x - \sin x = \frac{2}{3} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\sin 2x - \sin x = \frac{2}{3} \sin x \cdot \cos 2x = \frac{2}{3} \sin x (1 - 2\sin^2 x) =$$

$$3\sin x - 4\sin^3 x - \sin x$$

$$2\sin x - 4\sin^3 x$$

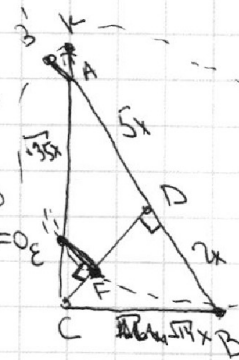


$$AB \parallel EF$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$Ax + By + D = 0$$

$$3x - 5y - 4b = 0$$



$$CD = \sqrt{10}x$$

$$\sin \angle B = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$$

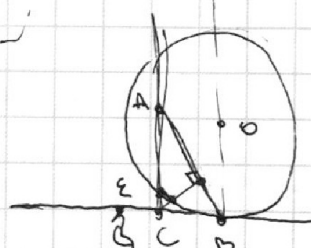
$$|4b - 18| < 18$$

$$|4b| < 3$$

$$|2| < 3$$

$$|a| = 0$$

$$|14| < 18$$



$$b = \frac{1}{2}$$

$$|2| < 3$$

$$|14| < 18$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow h = 3 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{3}$$

$$EF \parallel AB$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{ABEF}}$$

$$27 \cdot 7 = 9 \cdot 21 = 189$$

$$x^2 + (y - 10)^2 = 100 - 64 = 36$$

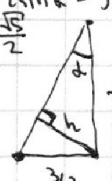
$$y = 2x + 3 \text{ or } \arcsin(a_1)$$

$$2x - y + 3 = 0 \quad \frac{3}{\sqrt{4+9}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{13}}$$

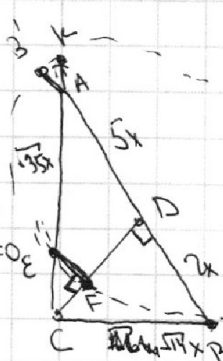
$$\begin{aligned} \sin 2x &= \sin(2\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos 2\alpha = 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \\ &+ \sin \beta (1 - 2\sin^2 \alpha) = \\ &= 2 \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + \sin \beta - \\ &- 2 \sin^2 \alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \end{aligned}$$

$$\sqrt{9 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{45}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$



$$\frac{48}{\sqrt{4^2 + 9 + 16b^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$CD = \sqrt{10}x$$

$$\sin \angle B = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$$

$$|4b - 18| < 18$$

$$|4b| < 3$$

$$|2| < 3$$

$$|a| = 0$$

$$|14| < 18$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x > 0; x \neq \frac{1}{2}; y > 0; y \neq 1$$

$$\begin{cases} (\log_5 2x)^4 - 3 \log_5 5 = \log_5 625 - 3 \\ (\log_5 y)^4 + 1 \log_5 5 = \log_5 \left(\frac{1}{5}\right) - 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 8505 \\ + 4920 \\ \hline 13425 \\ - 148 \\ \hline 13277 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2960 \\ + 1960 \\ \hline 4920 \\ 81 \cdot 105 = 8100 + \\ + 81 \cdot 5 = 8100 + \\ + 405 \end{array}$$

? xy

$$(\log_5 2x)^4 - 3 \log_5 5 = \log_5 5 - 3 \quad 48^2 = 16 \cdot 144 \quad 15 - 7 = 12$$

$$a^4 - \frac{4}{a} + 7 = 0 \Rightarrow a^5 + 7a - 4 = 0 \quad \begin{array}{r} 144 \\ \times 16 \\ \hline 864 \\ + 144 \\ \hline 2304 \end{array}$$

$$b = 80 \quad a = 7$$

$$b^4 + \frac{13}{b} + 3 = 0 \Rightarrow 3b^5 + 5b + 13 = 0$$

$$148 \cdot 20 - 148 = 2960 - 148$$

$$f(x) = 5x^4 + 9$$

$$\begin{array}{r} 2304 \\ - 625 \\ \hline 1679 \end{array}$$

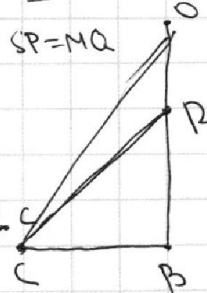
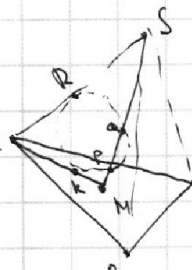
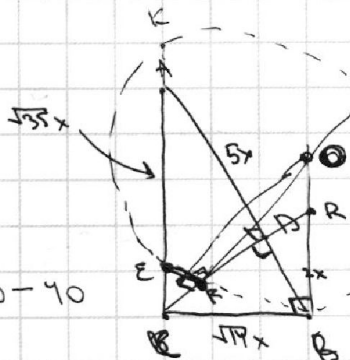
$$2304 - 625 =$$

$$\begin{array}{r} \times 81 \\ 55 \\ + 405 \\ + 105 \\ \hline 4455 \end{array}$$

$$90 \cdot 45 = 81 \cdot 5 \cdot 10$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 9 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 91 \\ 13 \\ \hline 243 \\ + 81 \\ \hline 1053 \end{array}$$



$$5 \cdot 747 = 2000 - 40$$

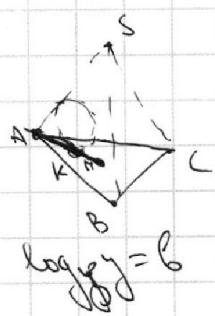
$$\begin{array}{r} 782 \\ \times 5 \\ \hline 1960 \end{array}$$

$$CD = \sqrt{10}x$$

$$\frac{BR}{2x} = \frac{\sqrt{10}x}{\sqrt{10}x} \Rightarrow BR = x \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$12 \cdot 10 + 9 = 26$$



$$12 \cdot 8 = 90 \cdot 80$$

$$12 \cdot 12 + 9 \cdot 12 = 136$$

$$53 + 95 =$$

$$= 153 - 5 = 148$$

$$47 + 8 = 55$$

ab

$$(a-1)(b-1) = ab$$

$$\begin{aligned} 5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 &= 45 \\ 5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) &= 45 \end{aligned}$$

$$5a + b = 45$$

$$(\log_5 y)^4 + 1 \log_5 5 = \log_5 0.2 - 3$$

$$|b| \leq 80$$

$$8 \cdot 5$$

$$10 \cdot 5$$

$$18 \cdot 45$$

$$0 \cdot 45$$

$$17 \cdot 40$$

$$1 \cdot 40$$

$$5 \cdot 14$$

$$4 \cdot 15$$

$$312$$

$$b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{b} - 3 \Rightarrow 3b^5 + 12 = -1 - 9b \Rightarrow 3b^5 + 9b + 13 = 0$$