



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

При выборе чисел a, b и c важна лишь делимость
на 2 и 7, поэтому для миним. значения будет
достаточно чисел вида $2^x \cdot 7^y$, $x, y \in \mathbb{N}$

Пусть тогда

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$$

$$b = 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$$

$$c = 2^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3}, \text{ из условия следует:}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 15 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 17 \\ \alpha_1 + \alpha_3 \geq 23 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 \geq 11 \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 18 \\ \beta_1 + \beta_3 \geq 39 \end{cases}$$

сложив неравенства в каждой системе и получим:

$$2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 55$$

$$\text{и } 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 68$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 27,5$$

$$\text{и } \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 34$$

~~$abc = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$~~
 ~~$\min(abc) = 2^{28} \cdot 7^{34}$~~
~~Пример, когда $abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$:~~

~~$a = 2^{10} \cdot 7^{20}$~~

~~$b = 2^{5} \cdot 7^{18}$~~

~~$c = 2^{13} \cdot 7^{19}$~~

$$abc = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}$$

м.к. $\beta_1 + \beta_3 \geq 39$, то $7^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} \geq 7^{39}$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 27,5$, то м.к. $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \in \mathbb{N}_0$, то

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 28$ и $2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \geq 2^{28}$

м.к. $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$ и $\min(abc) = 2^{28} \cdot 7^{39}$

пример:

$$a = 2^{10} \cdot 7^{20}$$

$$b = 2^5 \cdot 7^0 = 2^5$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{19}$$

тогда

$$a \cdot b = 2^{15} \cdot 7^{20} : 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$b \cdot c = 2^{18} \cdot 7^{19} : 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$a \cdot c = 2^{23} \cdot 7^{39} : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ сократима на m , тогда

$$\begin{cases} a+b : m \\ a^2-7ab+b^2 = (a+b)^2 - 9ab : m \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b)^2 : m, \text{ т.к. } a+b : m \\ (a+b)^2 - 9ab : m \text{ по укл.} \end{cases} \Rightarrow 9ab : m$$

если $a : m$, то т.к. $a+b : m$, ^{значит} $a+b-a=b : m$, то
значит a и b сократимы на $m \Rightarrow$ ни a , ни b не
делятся на m противоречие
при этом $9ab : m$

Если m — простое, то т.к. $\begin{cases} a \not: m \\ b \not: m \\ 9ab : m \end{cases} \Rightarrow 9 : m, m=3$

Если m — составное, то $a : p, b : q$ такие что $(p, q) = 1$
при этом $9pq : m$, т.е. $a = px, b = qx, p, x, q, y \in \mathbb{N}$
 $a+b : m \Rightarrow px + qx = 9qz$
Если m составное, то b не делится на m
~~просто делим на p в обеих частях~~

Если m составное, то пусть $m = pq$ и $a : p$ тогда $a+b : pq$
 $a : p \Rightarrow$

$\Rightarrow b : p$, но a и b взаимно просты, противоречие $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ в разложении чисел a и b не входят никакие множители из m , значит в произв. $9ab : m$ число m является делителем $9 \Rightarrow \max(m) = 9$

пример: $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{2+7}{2^2-7 \cdot 2 \cdot 7+7^2} = \frac{9}{4-98+49} = \frac{9}{-45} = -\frac{1}{5}$

Ответ: 9



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

корень $x = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} < 0$, а значит $< 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$, т.е. $\in \mathbb{Q}^3$

корень $x = \frac{1}{9} < 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$, значит $\in \mathbb{Q}^3$

Ответ: $x \in \left\{ \frac{1}{9}; \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69} \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3x^2-6x+2 \geq 0 \\ 3x^2+3x+1 \geq 0 \end{cases}$$

$$1-9x = 3x^2-6x+2 - 3x^2+3x+1, \text{ знамен}$$

$$\text{если } f(x) = 3x^2-6x+2; \quad g(x) = 3x^2+3x+1, \text{ то}$$

$$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = f(x) - g(x) = (\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}) (\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}), \text{ м.к.}$$

$$\text{I) если } f(x) = g(x), \text{ то}$$

$$3x^2+2-6x = 3x^2+3x+1$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$\text{но ОДЗ } f(x), g(x)$$

$$\text{II) если } f(x) \neq g(x), \text{ то } \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = 1; \quad 1 - \sqrt{g(x)} = \sqrt{f(x)} \uparrow^2$$

$$1 + g(x) - 2\sqrt{g(x)} = f(x)$$

$$1 + 3x^2+3x+1 - 2\sqrt{1+3x+3x^2} = 3x^2-6x+2$$

$$9x = 2\sqrt{1+3x+3x^2} \uparrow^2$$

$$81x^2 = 4(1+3x+3x^2)$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{12 \cdot 12 + 4 \cdot 4 \cdot 69}}{2 \cdot 69} = \frac{12 \pm \sqrt{4 \cdot 4 (9 + 69)}}{2 \cdot 69} = \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

$$\text{ОДЗ: } 3x^2-6x+2 \geq 0$$

$$3x^2-6x+2=0$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-24}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ м.е. ОДЗ: } x \in (-\infty; 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [1 + \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

$$(\text{м.к. } 3x^2+3x+1 = 3(x^2+x+\frac{1}{3}) = 3(x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}) = 3((x+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{12}) > 0 \text{ при } x \in \mathbb{R})$$

$$\frac{6+2\sqrt{6}}{69} < \frac{6+2\sqrt{78}}{69} < \frac{6+2\sqrt{81}}{69} \quad \frac{22}{69} < \frac{6+2\sqrt{78}}{69} < \frac{24}{69} \quad \text{чтобы корни}$$

$$\frac{22}{69} \text{ было бы больше } 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (не подх., м.к. } \frac{22}{69} < 1 < 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}), \text{ м.е. надо}$$

$$\frac{24}{69} \vee 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{8}{23} \vee 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{8}{23} < \frac{8}{20} = 0,4 < 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ знамен}$$

$$\text{корень } x = \frac{6+2\sqrt{78}}{69} \text{ попадает в ОДЗ;}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

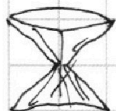
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

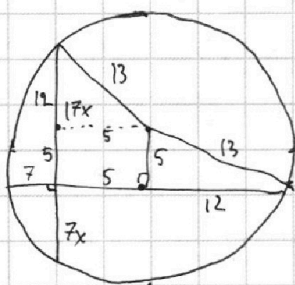


$$(1-9x)^2 = 3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)}$$



$$3x^2 + 3x + 1$$

$$8 = 9 - 12 < 0$$



$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{7}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{9}$$

$$16 \cdot 69 + 16 \cdot 24$$

$$a = 7x, b = 4^2(69) + 4^2 \cdot 24 = 4^2(69 + 9) = 4^2(78) = 4^2(78)$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

$$a+b=11k$$

$$a^2 - 7ab + b^2 = 11n$$

$$(a+b)^2 - 9ab = 11k^2 - 9ab = 11n$$

$$9ab = 11t$$

$$ab = 11t$$

$$a+b = mx$$

$$\frac{12}{69} - \frac{4}{69}$$

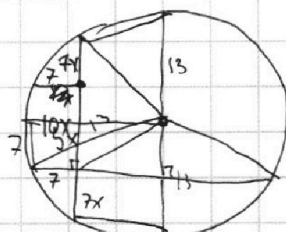
$$4x \cdot 6 = 12x$$

$$a^2 - 7ab + b^2 = my$$

$$a^2 + 2ab + b^2 - 9ab = (a+b)^2 - 9ab = my$$

$$m^2x^2 - 9ab = my$$

$$9ab = m(mx^2 - y)$$



$$2 - 6x = 1 + 3x$$

$$1 = 9x$$

$$9ab = m^2z$$

$$9ab : m$$

$$a+b : m$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$0 \leq 3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

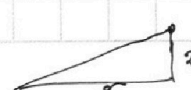
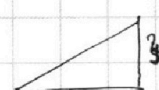
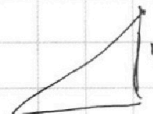
$$x \in (-\infty; \dots]$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 - 6x + 2$$

$$\sqrt{3(x-1)^2 - 1}$$

$$-13(x-1)^2 - 1$$

$$\frac{3}{81} - \frac{6}{9} + 2 = \frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 2$$



$$14$$

$$10$$

$$1$$

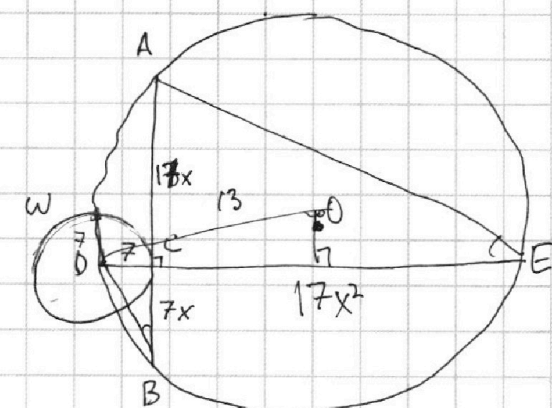
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Пусть центр ω это точка D, тогда $CD = R_\omega = 7$ и $DC \perp AB$ (п.к. AB касается ω)

2) Пусть $AC = 17x$, $CB = 7x$, тогда если $DC \cap \Omega = E$, то ~~тогда~~ пересек. хорд DC и AB :

$$AC \cdot CB = DC \cdot CE, \quad 17x \cdot 7x = CE \cdot 7$$

$\angle AED = \angle ABD$ (опр. на дугу AD)

$\angle ACE = \angle DCB = 90^\circ$ (верт. углы)

$\Rightarrow \triangle DCB \sim \triangle ACE$ и в подобных Δ : $\frac{AC}{CE} = \frac{DC}{CB}$, $\frac{17x}{CE} = \frac{7}{7x}$

2) $\angle AED = \angle ABD$ (опр. на дугу AD), в $\triangle DCB$ и $\triangle ACE$: $\tan \angle AEC = \frac{17x}{CE}$, $\tan \angle CBD = \frac{7}{7x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{17x}{CE} = \frac{7}{7x}, \quad CE = 17x^2$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$y_2 + 2x_2 - (y_1 + 2x_1) = 14$$

$$1 + 3x^2 - 6x + 2 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 3x^2 + 3x + 1$$

$$f(x) \quad g(x)$$

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = 1$$

$$f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} = 1$$

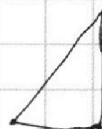
$$2\sqrt{fg} = 1 + f + g$$

$$4fg = 1 + f + g^2 + 2f + 2g + 2fg$$

$$1 + 3x^2 - 6x + 2 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 3x^2 + 3x + 1$$

$$2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 2 - 3x$$

$$4(3x^2 - 6x + 2) = 4 + 81x^2 - 36x$$





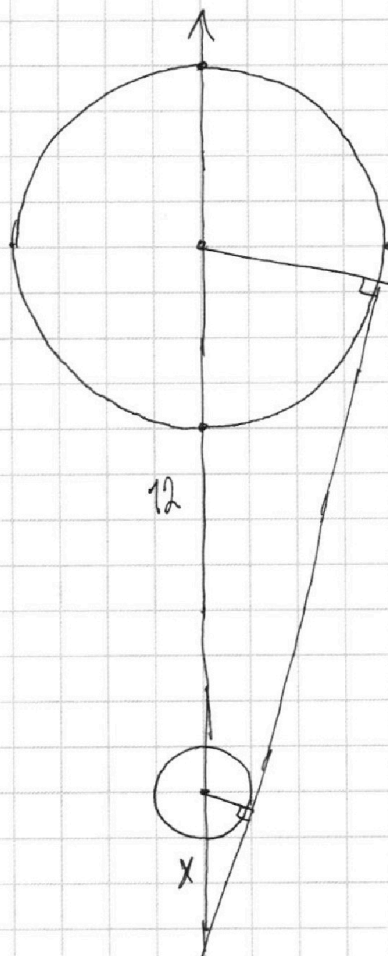
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a = k 2^{15} 7^{11}$$

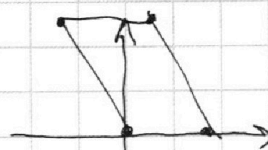
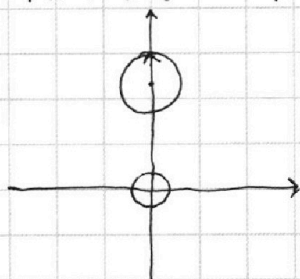
$$b = m 2^{17} 7^{18}$$

$$c = n 2^{23} 7^{39}$$

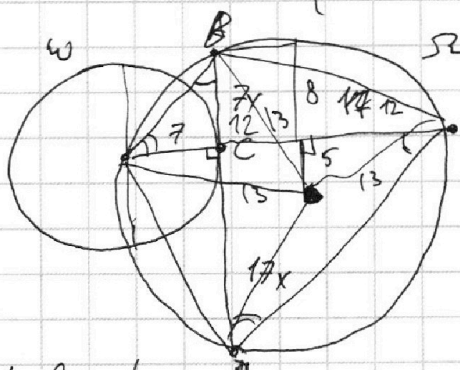
$$(abc)^2 = kmn 2^{55} 7^{58}$$

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} =$$



$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y-12)^2 \geq 16 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 y^2 \geq 1 \\ x^2 (y-2)^2 \leq 16 \end{cases}$$



$$a^2 + ab + b^2$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$36 - 3 \cdot 2 \cdot 4 = 12$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{3}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$a^2 - 7ab + b^2 =$$

$$49a^2b^2 - 4a^2b^2$$

$$\text{Пусть } a = 2^x \cdot 7^y$$

$$b = 2^x \cdot 7^y$$

$$c = 2^w \cdot 7^z$$

$$a = \frac{7 \pm 3 \sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ x + y = 17 \\ x + y = 23 \end{cases}$$

$$x + y = 15$$

$$y + z = 17$$

$$x + z = 23$$

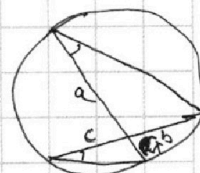
$$\begin{cases} x - y = 8 \\ y + z = 17 \end{cases}$$

$$2x = 17$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq \frac{53}{2} = 26,5$$

$$y_1 + y_2 + y_3 \geq 29$$

$$20 - 19$$



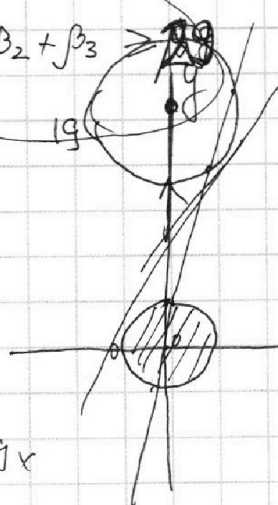
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y-12)^2 \geq 16 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 y^2 \geq 1 \\ x^2 (y-2)^2 \leq 16 \end{cases}$$

$$3x^2 - 4,5x + 1,5 = t$$

$$\sqrt{t - 4,5x + 0,5} - \sqrt{t + 4,5x - 0,5} = 1 - 9x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

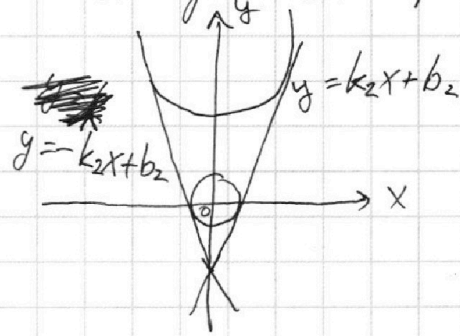
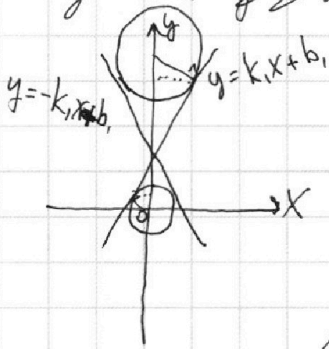
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

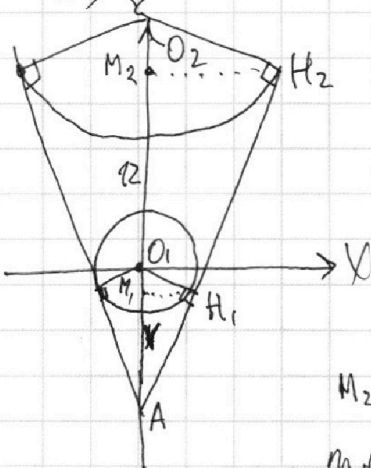
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Знаем, чтобы найти все значения a достаточно задать
угловые коэффициенты, k прямых. ~~Векторы~~ Симметричные относ. оси
 OY так как откос. Это же оси симметричные об. кругу,
знаем ~~значит~~ у этих прямых противоп. угловые коэф.:



I) касат. внешние



$$\Delta AO_1M_1 \sim \Delta AO_2M_2 \text{ (общую гипотенузу и угол)}$$

$$AO_1 = x, O_1O_2 = 12, O_2M_2 = 4, O_1M_1 = 4$$

$$\text{тогда } \frac{x}{x+12} = \frac{1}{4} \quad 4x = x+12, \quad x=4$$

$$\text{значит } y = kx + b, \quad b = -4$$

уравнение $x^2 + y^2 = 4$ имеет 1 решение,

так как касат. пересекаются в одной точке.

M_2, M_1 — высоты на OY , $M_2M_2 \parallel OX \parallel M_1M_1$,

$$\text{т.е. } \frac{M_2M_2 - M_1M_1}{AM_1 - AM_2}$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



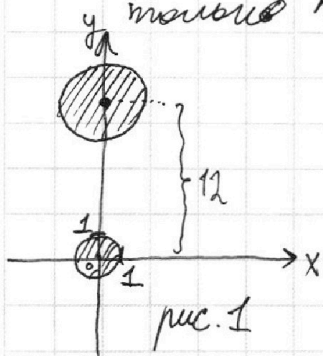
$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \quad (2) \end{cases}$$

из уравн. (2):

$$\begin{cases} x^2+y^2-1 \leq 0 \\ x^2+(y-12)^2-16 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2+y^2-1 \geq 0 \\ x^2+(y-12)^2-16 \leq 0 \end{cases}$$

уравнение $x^2+y^2=1$ задает окружн. с центром $(0;0)$ и $R=1$
уравнение $x^2+(y-12)^2=16$ задает окружн. с центром $(0;12)$ и $R=4$

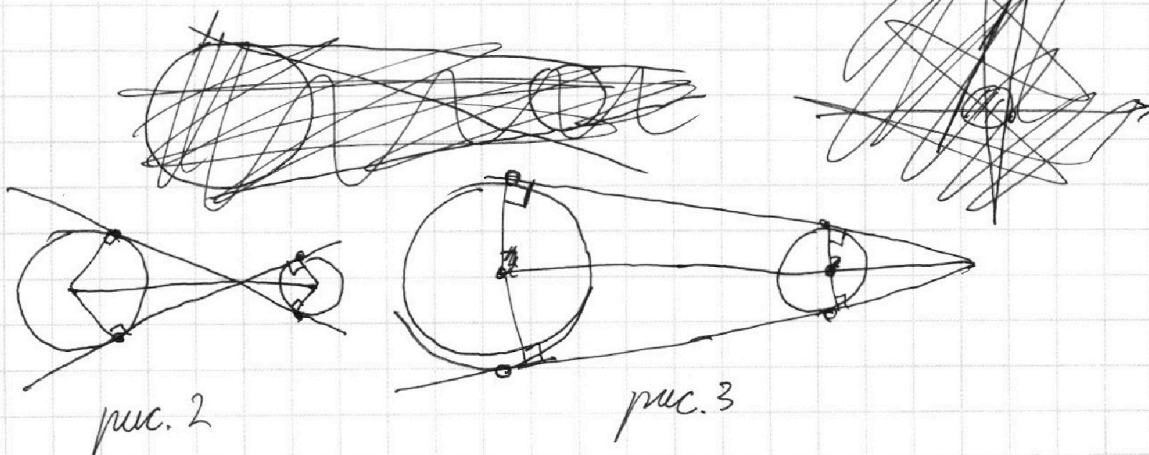
Из уравнения 2 следует что точки лежат всегда внутри/на гра-
нице 1 круга и снаружи/на границе другого. так как не
границы кругов не пересекаются, то решениями могут быть
~~только точки на границе обоих окружностей~~
~~только точки внутри обоих, но это не внутри~~
только точки внутри обоих кругов (см. рис. 1),
касания с границей — решение



чтобы ~~уравнение~~ система имела ровно
2 решения, нужно чтобы прямая
 $ax+y-8b=0$ пересекала по крайней мере
кругов ровно в 1 точке, ~~т.е.~~
(касание внутри окр. пересек. с границей)

уравнения: $\begin{cases} ax+y-8b=x^2+y^2-1 \\ ax+y-8b=x^2+(y-12)^2-16 \end{cases}$ имеют ровно 1 решение

общих касат. к 2 кругам 4:



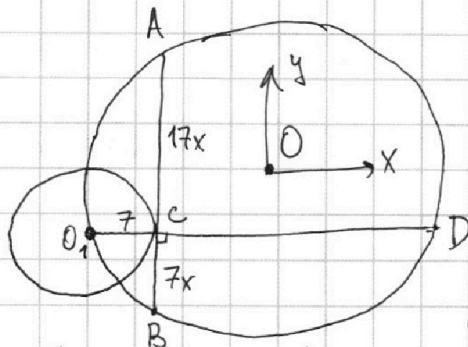
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

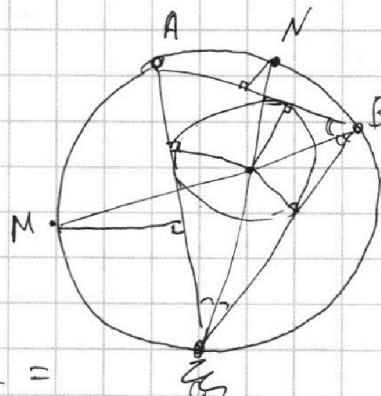


1) Пусть O, C , где O — центр ω , пересекает Ω в точке D , тогда $O_1C = 7$ и $O_1C \perp AB$, т.к. O_1C касательна AB , радиус ω к C перпендикулярен касательной

2) ~~по дв пересек хорд:~~
Введем систему координат с центром в $(1, 0)$, ось $y \parallel AB$, ось $x \parallel O_1D$
тогда если $A = (x_1; y_1)$
 $B = (x_2; y_2)$ $O_1 = (x_3; y_3)$, $C = (x_4; y_4)$ то

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 7 \\ \frac{y_1 - y_3}{y_3 - y_2} = \frac{17}{7} \\ x_1^2 + y_1^2 = 13^2 \\ x_2^2 + y_2^2 = 13^2 \\ x_3^2 + y_3^2 = 13^2 \end{cases}$$

$$(x_1 - 7)^2 + y_1^2 = 13^2$$



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} =$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a - b}$$

$$1 - 9x = 3x^2 + 3x + 1$$

$$2 - 1 - 9x = 2 - 6x - 1 - 3x$$

$$a + b : m$$

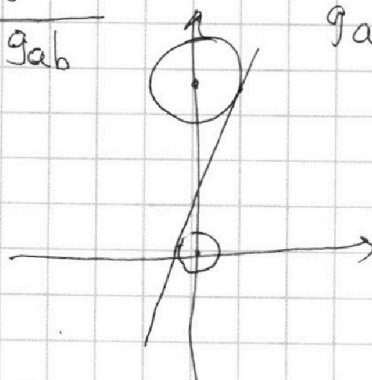
$$a : m$$

$$9ab : m$$

$$b : m$$

$$\Downarrow \\ 9 : m$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$1 - 9x = 2 - 1 - 3x - 6x = (2 - 6x) - (1 + 3x) = (2 - 6x) + 3x^2 - (1 + 3x) - 3x^2$$

$$= (3x^2 - 6x + 2) - (3x^2 + 3x + 1), \text{ м.е.}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = (\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1})(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

Если $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$, м.е. $2 - 6x = 1 + 3x$, то

$$9x = 1 \text{ и } x = \frac{1}{9} \in \text{ОДЗ}$$

Второе:

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1$$

$$1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = \sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$1 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 3x^2 - 6x + 2$$

$$9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$$

$$81x^2 - 12x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 4 \cdot 69}}{2 \cdot 69}$$

$$D = 144 + 4 \cdot 69 =$$

$$= 4^2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 69 = 4^2(9 + 69)$$

$$= 4^2(78)$$

~~ОДЗ: $3x^2 + 3x + 1 \geq 0$~~

$$3x^2 + 3x + 1 + 3x^2 - 6x + 2 + 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}\sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

