



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



- ✓ 1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

- ✓ 2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

- ✓ 4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

- ✓ 6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

$$a, b, c \in \mathbb{N}.$$

$$ab : 2^{14} 7^{10}; \quad bc : 2^{17} 7^{17} \quad \text{и} \quad ac : 2^{20} 7^{37}$$

$$\left. \begin{array}{l} ab \geq 2^{14} 7^{10} \\ bc \geq 2^{17} 7^{17} \\ ac \geq 2^{20} 7^{37} \end{array} \right\} \rightarrow a^2 b^2 c^2 \geq 2^{51} 7^{64}$$

$$abc \geq 2^{26} 7^{32} \quad \text{где } \frac{51}{2} \notin \mathbb{N},$$

а если ст. в эксп. 2-и 6-и abc меньше

$\frac{51}{2}$, то получим противоречие.

Заметим, что $ac : 7^{37} \Rightarrow abc : 7^{37}$, т.е. если бы 7 входило в abc в ст. ≥ 32 до 36, то мы бы получили противоречие $\Rightarrow$ мин-м оценка следующая:

$$abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$$

Пример: на $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

Пусть $b = 2^6$; $a = 2^8 \cdot 7^{10}$; $c = 2^{12} \cdot 7^{27}$

Тогда: $abc = (2^8 \cdot 2^6 \cdot 2^{12}) \cdot (7^{10} \cdot 7^{27}) = 2^{26} \cdot 7^{37}$

$$ab = 2^8 \cdot 7^{10} \cdot 2^6 = (2^{14} \cdot 7^{10}) : (2^{17} \cdot 7^{17})$$

$$bc = 2^6 \cdot 2^{12} \cdot 7^{27} = (2^{18} \cdot 7^{27}) : (2^{17} \cdot 7^{17})$$

$$ac = 2^8 \cdot 7^{10} \cdot 2^{12} \cdot 7^{27} = (2^{20} \cdot 7^{37}) : (2^{20} \cdot 7^{37})$$

Примеры противоречия не являются

Реш: $2^{26} \cdot 7^{37}$



1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

Рез: 8

Если $\frac{a}{b}$ — несократима, где $a, b \in \mathbb{N}$, то $\text{НОД}(a; b) = 1$, т.е. у a и b нет общих простых множителей.

Пусть $(a+b) : m$ и $(a^2 - 2ab + b^2) : m$, найдем, что требуется в задаче, максимально-возможное значение m .

$$(a^2 - 2ab + b^2) = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = (a+b)^2 - 2ab : m, \text{ где}$$

$$\begin{cases} (a+b) : m \\ 2ab : m \end{cases}$$

Если мы предположим, что $b : m$ со всеми простыми множителями из a и b ,

то $(a+b) : m$, ведь, к примеру, если m делит b и a , то a будет кратно m и b кратно m , а b уже нет.

В общем случае, $(a+b)$ не может быть делителем, выходящим в разложение на прост. множ. у a и b , ведь: $a+b \equiv a \pmod{b}$ (или $b \pmod{a}$). Тогда $2ab : q$, то $a+b = qk + b \equiv b \pmod{q} \not\equiv 0$, т.е. $(a+b) \not\equiv 0 \pmod{q}$, поэтому $m \not\equiv 0 \pmod{q}$. Получим противоречие к тому, что $m : q \Rightarrow m : q$, где q — прост. множ. a и b .

Таким образом, $2ab : 1, 2, 4, 8$ и числа, которые в разложении имеют простые делители a и b (если a и $b : 2$, то $2, 4$ и 8 могут делить $2ab$). Из всех этих чисел $(a+b)$ делит только те, которые в разложении не имеют делителей a и $b \Rightarrow$ если a и $b : 2$, то $\text{НОД}(a+b; 2ab) = 1$, если a и b нечетные, то $\max[\text{НОД}(a+b; 2ab)] = 2$. Найдем пример: $a = 3; b = 13$;

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{13} \text{ — несократ.}$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 2ab} = \frac{3+13}{16^2 - 2 \cdot 3 \cdot 13} = \frac{16}{16^2 - 78} = \frac{2}{32 - 39} = -\frac{2}{7}$$

Рез: 8

по заданию

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №4

Ответ: $x = \frac{2}{7}$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \quad \text{привести к виду}$$

если $2 - 7x = 0$

$$x = \frac{2}{7} \Rightarrow 2x^2 - 5x + 3 = \frac{8}{49} - \frac{10}{7} + 3 = \frac{12}{49}$$

$$\text{Заметим, что } (2x^2 + 2x + 1) + (2 - 7x) = 2x^2 - 5x + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{если } 2 - 7x = 0, \text{ то } 2x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 5x + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{и если } \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 0 = 2 - 7x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{7}} - 1 \text{ из решений. (оказалось единственным решением)}$$

Тогда вернёмся к исходн. уравнению:

$$\frac{2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} = 2 - 7x$$

$$\frac{2 - 7x}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} = 2 - 7x \quad \left| \cdot \frac{1}{2 - 7x}, \text{ если } 2 - 7x \neq 0, \text{ мы уже разбирали} \right.$$

$$\frac{1}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} = 1$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \quad |(\dots)^2 \text{ все } \geq 0 \Rightarrow$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} + 2x^2 + 2x + 1 = 1$$

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 0 - \text{выполнено, так как } 2x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 + x^2$$

$$4x^2 - 3x + 4 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 0$$

$$2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 3x - 4x^2 - 3 \quad (1)$$

Теперь заметим, что левая часть ≥ 0 , а

$$\text{правая всегда } < 0: -4x^2 + 3x - 3 \rightarrow D = 9 - 4(-3)(-4) =$$

$$\Rightarrow -4x^2 + 3x - 3 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{уравн. (1) не имеет решений. Ответ: } x = \frac{2}{7}$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

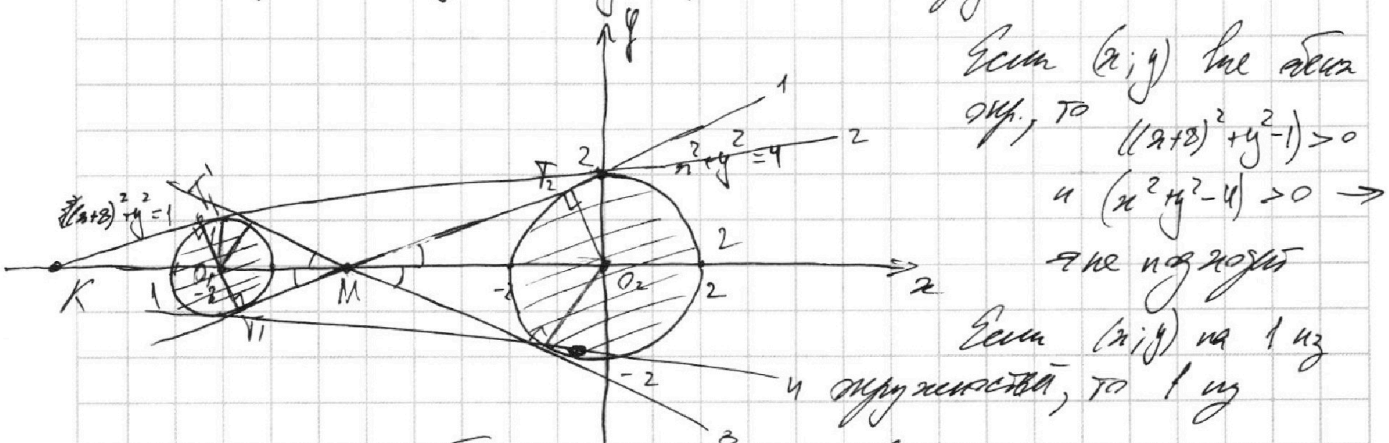


Задача №6

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+2)^2 + y^2 - 1)((x^2 + y^2 - 4)) \leq 0 \end{cases} \text{ имеет только 2 реал.}$$

Найдем, что 1) $ax - y + 10b = 0 \rightarrow$ прямая с уг. $y = ax + 10b$

2) $((x+2)^2 + y^2 - 1)((x^2 + y^2 - 4)) \leq 0$ - 2 ~~функции~~ ^{круга}



Если (x, y) не принадлежит окр., то $((x+2)^2 + y^2 - 1) > 0$

и $(x^2 + y^2 - 4) > 0 \rightarrow$ не подходит

Если (x, y) на 1 из окружностей, то 1 из

имеется окруж. в 0 и угл. возможно.

Если (x, y) в 1 из окр., то 1 множ. > 0 , другой < 0 , следовательно все произв. $\leq 0 \rightarrow$ верно.

Если $y = ax + 10b$ пересекает 2 окр. в 1 окружность в 2 точках, то решений > 2 , ведь все точки подходят, нахот. внутри окружности тоже подходят.

Если $y = ax + 10b$ не пересекает окр., то очевидно, решений нет совсем.

Если $y = ax + 10b$ касается только 1 окр., то реш. 1. $\Rightarrow$

$\Rightarrow y = ax + 10b$ должна касаться обеих окружностей - это единств. касательная.

У $2-4x$ окруж. может быть только 4 общие касат., они образуются на пересечении двух (скелетов) - 2 внешних, 2 внутренних.

Нам надо найти угловые коэффициенты у этих касательных.

1) Заметим, что внутренняя касательная проходит через центр 1-ой, чтобы найти коэф. 3 (она симметрична только знакам, поск. симметричны отн. оси OX, как и обе окружности).

Точ. T_1 и T_2 - соответствующие точки касания 1 и 2 окружностей. M - т. перес. с касат. №1 оси OX.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

O_1 и O_2 — центры окр. 1 и 2 соств.

$\Delta O_1 T_1 M \sim \Delta O_2 T_2 M$ по 2 углам (1 вертик. : $\angle O_1 M T_1 = \angle O_2 M T_2$

и 2 стороны из того, что касат. $T_1 T_2$ — касат.,
и $O_1 T_1$ и $O_2 T_2$ — радиусы).

Тогда $O_1 M : M O_2$ как $O_1 T_1$ и $O_2 T_2 = 1:2$

$$O_1 M + M O_2 = 8 = 3 M O_2 \Rightarrow M O_2 = \frac{8}{3} \quad \text{и} \quad M O_1 = \frac{16}{3}$$

Тогда $ax + 10b$ ~~не содержит~~ ~~полюса~~ $(-\frac{16}{3}; 0)$.

$$-a \frac{16}{3} + 10b = 0$$

$$16a = 30b \Rightarrow \boxed{8a = 15b} \Rightarrow \frac{10b}{8} = \frac{15b}{8} = \frac{15}{8}b = \frac{16}{3} \Rightarrow b = \frac{16}{3} \cdot \frac{8}{15} = \frac{128}{45}$$

Теперь найдем такие a и b , что

$y = ax + 10b$ ~~касат.~~ ~~касат.~~ $x^2 + y^2 = 4$ имеют 1 р-н. (т.е. касаются).

$$\begin{cases} y = ax + \frac{16}{3}a \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$x^2 + a^2 x^2 + 2a^2 \frac{16}{3}x + \frac{256}{9}a^2 = 4$$

$$x^2(a^2 + 1) + \frac{32}{3}a^2 x + (\frac{256}{9}a^2 - 4) = 0$$

$\Delta = 0$ — единств. р-н.

$$\frac{256}{9}a^4 - (a^2 + 1)(\frac{256}{9}a^2 - 4) = \frac{256a^4}{9} - \frac{256a^2}{9} + 4a^2 + 4 = 0 \quad | \cdot 9$$

$$256a^4 - 256a^2 + 36a^2 + 36 = 0$$

$$220a^2 - 256a^2 + 36 = 0$$

$$220a^2 = 256$$

$$a = \pm \sqrt{\frac{256}{220}} = \pm \sqrt{\frac{16}{110}} = \pm \sqrt{\frac{9}{55}} = \pm \frac{3}{\sqrt{55}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ если возведем в такое, что $10b = \frac{16}{3}a$, то получим касательную.

2) Теперь найдем р-н. касат. внешней касат.:

из двух касат. r^2 (соств. и r^2 по симметрии)

пересек. ось OX в точке K . T_1' — точка касания

касат. r^2 окр. 1. Тогда $\Delta O_2 T_2 K \sim \Delta O_1 T_1' K$ по 2 углам

(угловые $\angle O_2 T_2 K$ и $\angle O_1 T_1' K$ и $\angle O_2 K T_2$ и $\angle O_1 K T_1'$).

Поэтому $\frac{O_1 K}{O_2 K} = \frac{O_1 T_1'}{O_2 T_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow O_1 K = \frac{1}{2} O_2 K$, т.е. O_1 — середина

$$O_2 K, \quad O_1 O_2 = 8 \Rightarrow O_2 K = 16 \quad \text{и} \quad O_1 K = 8$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Получим, что касат. 2 пересек. ось Ox в т. $(-16; 0)$, т.е.

$$-16a + 10b = 0$$

$$10b = 16a$$

Теперь найдем такие a , что $\begin{cases} y = ax + 10b \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ имеет 1 р-н.

$$\begin{cases} y = ax + 16a \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$x^2 + a^2x^2 + 32a^2x + 256a^2 = -4 = 0$$

$$(касательная) \quad x^2(a^2+1) + 32a^2x + 256a^2 - 4 = 0$$

$$D/4 = 0 \quad = 256a^4 - (256a^2 - 4)(a^2+1) = 256a^4 - 256a^4 -$$

$$- a^256a^2 + 4a^2 + 4 = 4a^2 + 4 - 256a^2 = 0$$

$$\frac{256}{4} \Big| \frac{4}{-24} \Big| \frac{63}{12}$$

$$252a^2 = 4$$

$$63a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm \sqrt{\frac{1}{63}} = \frac{\pm \sqrt{1^2}}{\sqrt{63}} = \frac{\pm \sqrt{1^2}}{\sqrt{3 \cdot 3 \cdot 7}} = \frac{\pm 1}{3\sqrt{7}}$$

отсюда же, взяв b такое, что $10b = 16a$, мы получим касательные.

Мы получим все 4 касательные к окруж. a и b так, что они будут касат. у 2 пересек. окр.
Значит, что эти значит. a - единств. подходящие.

$$\text{Итак: } a = \pm \sqrt{\frac{1}{63}} ; \pm \sqrt{\frac{2}{55}}$$

Продолжение 6-ой задачи.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

~~min~~ $\min[abc] - ?$

$ab: 2^{14} 7^{10}, bc: 2^{17} 7^{17}$

$ac: 2^{20} 7^{37}$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 14 \\ a_7 + b_7 = 10 \\ a_7 + c_7 = 17 \\ b_2 + c_2 = 17 \\ a_2 + c_2 = 20 \\ a_7 + c_7 = 37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 14 \\ b_2 + c_2 = 17 \\ a_2 + c_2 = 20 \\ a_2 = 20 - c_2 \\ 20 - c_2 + b_2 = 14 \\ b_2 - c_2 = -6 \\ b_2 + c_2 = 17 \end{cases}$$

$2b_2 = 11$
 $b_2 =$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 14 \\ b_2 + c_2 \geq 17 \\ a_2 + c_2 \geq 20 \end{cases}$$

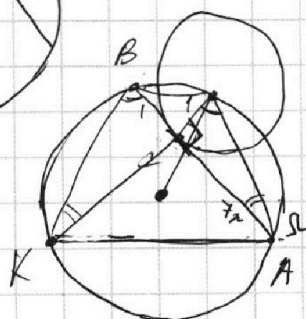
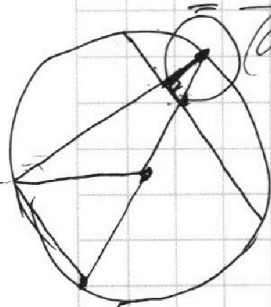
$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 17 - c_2 \geq 14 \\ b_2 \geq 17 - c_2 \\ a_2 + c_2 \geq 20 \\ b_2 \geq 17 - c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_2 \geq 17 \\ b_2 \geq 17 - c_2 \end{cases}$$

$a_2 \geq 9 \Rightarrow a_2 + c_2 \geq 9 + c_2 \geq 20$
 $b_2 \geq 17 - c_2 \leq 6 \Rightarrow c_2 \geq 11$

$\frac{a}{b}$ - несопр. $a, b \in \mathbb{N}$

$$\frac{a+b}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{a+b}{(a-b)^2 - 2ab} = \frac{a+b}{(a-b)^2 - 2ab} = \frac{a+b}{(a-b)^2 - 2ab}$$



$\frac{AC}{CK} = 7:1$

$7a^2 = 8a$
 $7a = CK$

$\frac{7a}{CK} = \frac{a}{1} \Rightarrow 7a = CK$

$7a^2 = CK = 7$

$a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow 8a = 8$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

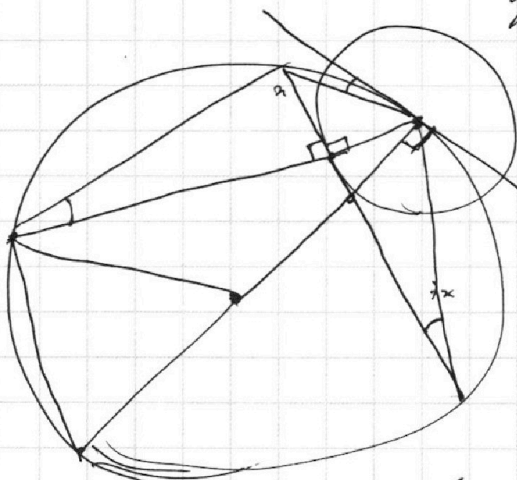
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик



$$\frac{2a^2 - 5a + 3}{2a^2 - 5a + 3} = \frac{1}{1}$$

$$\sqrt{2a^2 - 5a + 3} = 2 - 7a + \sqrt{2a^2 + 2a + 1}$$

$$2 - 7a + \sqrt{2a^2 + 2a + 1} \geq 0$$

$$7a - 2 \leq \sqrt{2a^2 + 2a + 1}$$

$\frac{a}{b}$ - нескр.

$$\frac{2a^2 - 5a + 3 - 2a^2 - 2a - 1}{\sqrt{2a^2 - 5a + 3} + \sqrt{2a^2 + 2a + 1}} = 2 - 7a$$

$$\frac{2 - 7a}{-2a^2 - 5a + 3} = 1$$

$$2\sqrt{(2a^2 - 5a + 3)(2a^2 + 2a + 1)} = 3a - 4a^2 - 3$$

$$\begin{cases} 2a^2 - 5a + 3 \geq 0 \rightarrow 2(a-1)(a-\frac{3}{2}) \geq 0 \\ 3a - 4a^2 - 3 \geq 0 \rightarrow \end{cases}$$

$$-4a^2 + 3a - 3 = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot (-3) \cdot (-4) = 9 - 48 < 0$$

$$\frac{a+b}{a+b} = 1$$

$$(a+b) : m \quad \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{a+b} = a+b - \frac{2ab}{a+b}$$

$$2ab : m$$

$$\frac{2ab}{a+b} = \frac{2ab}{a+b}$$

$$8ab : m$$

у а и б нет общих множителей.
 $\frac{3}{5}$ - нескр. $\sqrt{\frac{3}{5}}$

$$a=3 \quad b=5$$

$$\frac{5}{12}$$

$$\frac{a+b}{a^2 + 6ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 2ab}$$

$$\frac{8}{8^2 - 8 \cdot 8} = \frac{8}{0} = \text{undefined}$$

$$\frac{13+5}{18}$$

$$\frac{13+3}{16^2 - 8 \cdot (13+3)} = \frac{16}{16^2 - 16 \cdot 8} = \frac{1}{16-8} = \frac{1}{8}$$



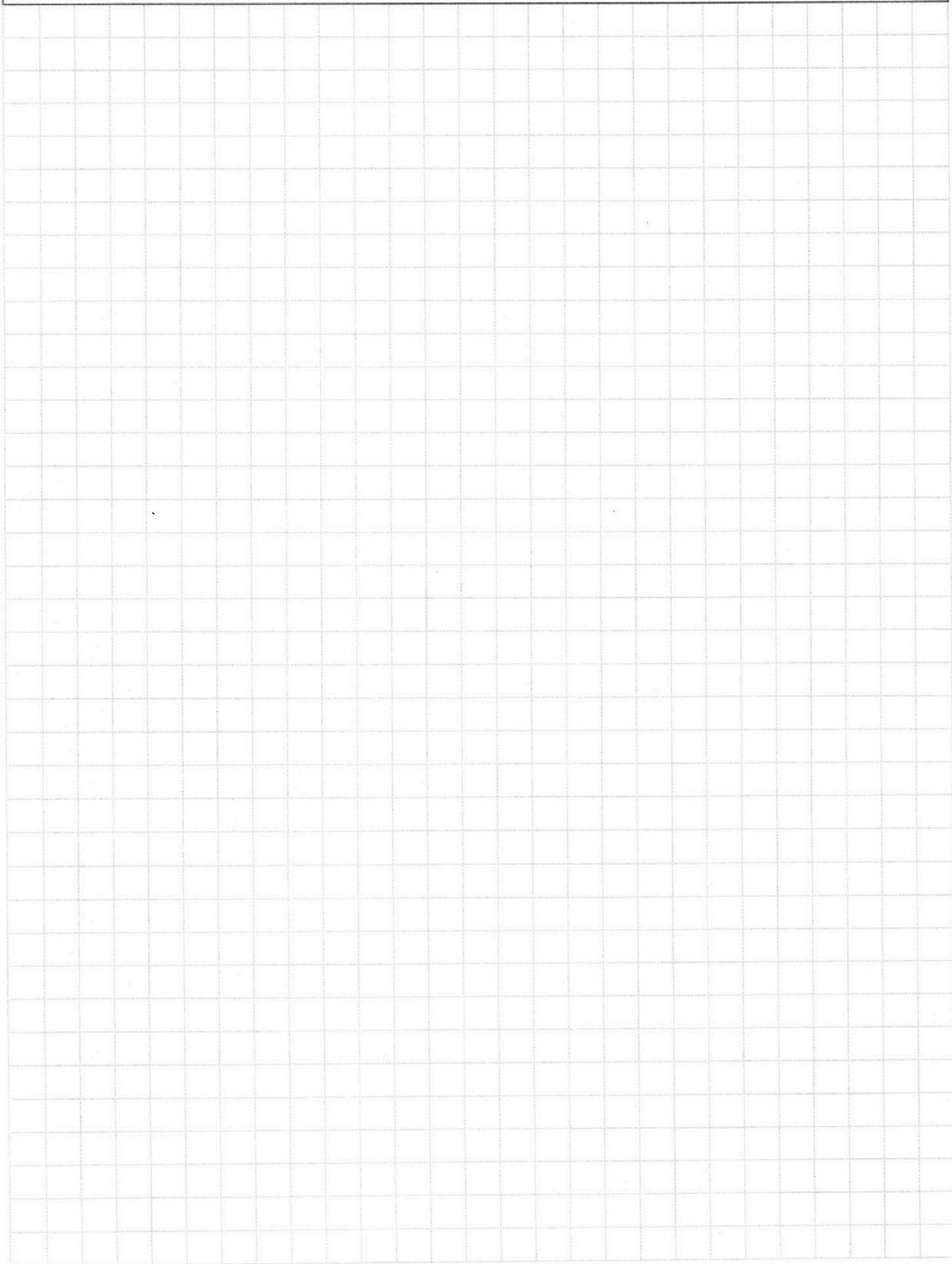
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

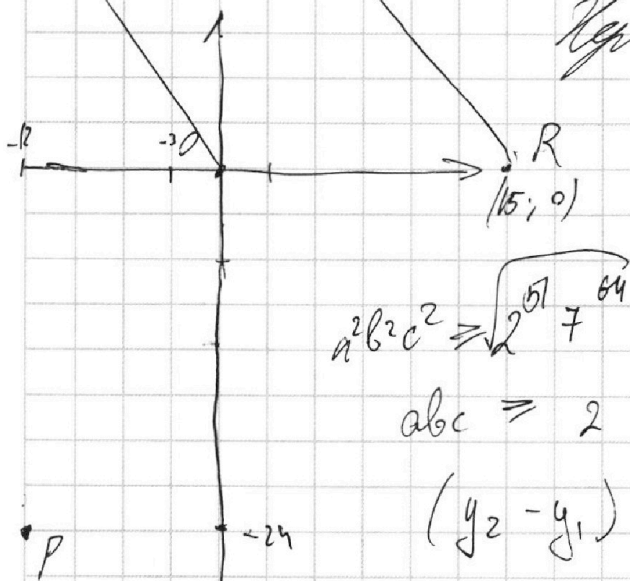
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Черновик



$$a^2 b^2 c^2 \geq \sqrt{2^{51} \cdot 7^{64}}$$

$$abc \geq 2$$

$$(y_2 - y_1) : 2$$

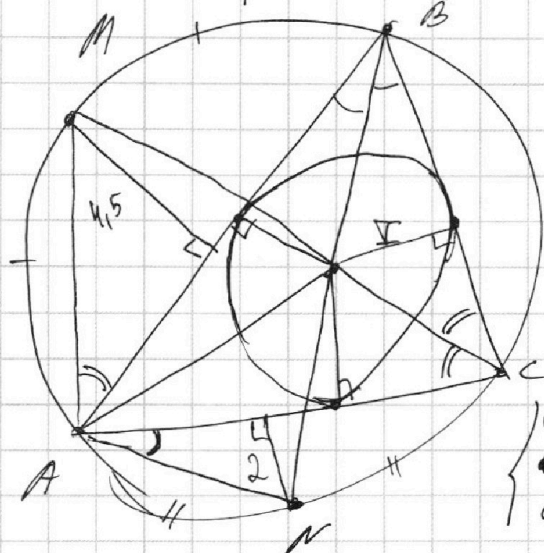
$$2x_2 + y_2 - (2x_1 + y_1) = 12$$

$$2x_2 + y_2 = 12 + 2x_1 + y_1$$

$$12^2 + 24^2 = 12^2 + 576$$

$$12^2 + 24^2 = 12^2 + 576 \cdot 12^2 = 12^2 \sqrt{12^2 \cdot 5} = 12\sqrt{5}$$

$$\frac{144 + 576}{720} = \frac{720}{720}$$



$$abc = 2^{30} \cdot 7^{37}$$

$$abac = 2^{30} \cdot 7^{37} \Rightarrow b=1$$

$$a = 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$c = 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$a + b_2 + c_2 \geq ?$$

$$a_2 \geq 14 - b_2$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 31 - b_2$$

$$2a_2 + 2b_2 + 2c_2 \geq 51$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq \frac{51}{2}$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 26$$

$$abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \rightarrow$$

$$b = 2^6$$

$$a \cdot 2^6 \geq 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$a$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1.

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} ab: 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc: 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac: 2^{20} \cdot 7^{37} \end{cases}$$

Пусть a_2, b_2, c_2 — степени вхождения
2-й в число a, b и c соотв.
Аналогично a_7, b_7 и c_7 , только для 7.

Решение:

1) Из $ab: 2^{14}$; $bc: 2^{17}$; $ac: 2^{20}$ следует, что

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 14 \\ b_2 + c_2 \geq 17 \\ a_2 + c_2 \geq 20 \end{cases} \quad + \rightarrow \quad \begin{cases} 2a_2 + 2b_2 + 2c_2 \geq 51 \\ a_2 + b_2 + c_2 \geq \frac{51}{2} \end{cases}$$

$\frac{51}{2} \notin \mathbb{N}$, а 26 — ближай.
к $\frac{51}{2}$.

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 26$$

2) Из $ab: 7^{10}$; $bc: 7^{17}$ и $ac: 7^{37}$ следует:

$$\begin{cases} a_7 + b_7 \geq 10 \\ b_7 + c_7 \geq 17 \\ c_7 + a_7 \geq 37 \end{cases} \quad + \rightarrow \quad \begin{cases} 2a_7 + 2b_7 + 2c_7 \geq 64 \\ a_7 + b_7 + c_7 \geq 32 \end{cases}$$

Тогда оценка снизу: $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$, но $a_7 + b_7 + c_7 \geq 37$
 $> 32 \Rightarrow$ миним. оценка на $a_7 + b_7 + c_7$ — это 37.

Тогда оценка сверху: $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$, если
 $< 2^{26} \cdot 7^{37}$, то степени вхождения
7-и или 2-и будет меньше 26 и 37 или 20
соотв., а это невозм. из полученных выше выводов.

Пример: $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$ где $b = 2^6$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$a_2 + c_2 = 20$$

$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$a = 2^8 \cdot 7^{10}$$

$$a = 7^{10} \cdot 2^8 \quad c = 7^{27}$$

$$\begin{aligned} abc &= 2^8 \cdot 2^{12} \cdot 7^{27} \\ &= 2^{18} \cdot 7^{27} \cdot 2^{17} \cdot 7^{17} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((a+b)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

ум. только 2 реш.

$$y = ax + 10b$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$$

$$\begin{aligned} (a+b) : m \\ (a^2 - 6ab + b^2) : m \\ ((a+b)^2 - 2ab) : m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+b : m \\ 2ab : m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = ax + 10b \\ x^2 + y^2 = 4 \end{aligned}$$

ум. 1 реш.

$$x^2 + a^2 x^2 + 2 \cdot 20abx + 100b^2 - 4 = 0$$

$$x^2(a^2 + 1) + 20abx + 100b^2 - 4 = 0$$

$$D/4 = 100a^2b^2 - (100b^2 - 4)(a^2 + 1) =$$

$$\begin{aligned} a^2 - 6ab + b^2 = \\ = a^2 - 6ab + 9b^2 - 2b^2 = (a - 3b)^2 - b^2 = 4a^2 - 100b^2 + 4 = 0 \\ a^2 - 25b^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

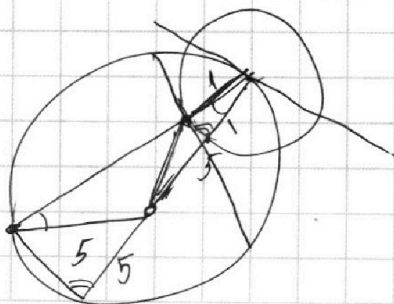
$$\frac{2}{1} = \frac{n+2}{n}$$

$$\begin{aligned} 2n = n + 2 \\ n = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2) \\ x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12 \\ 2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+b) : m \\ 2ab : m \end{aligned}$$



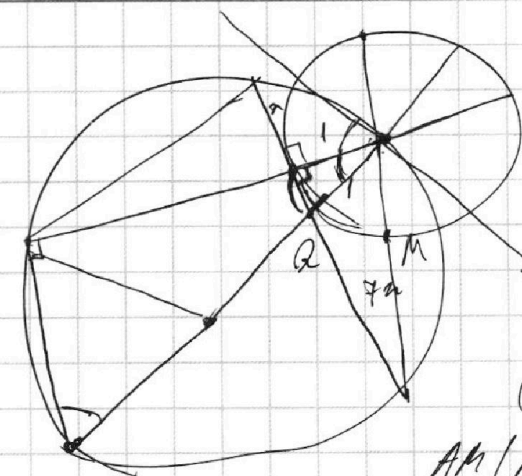
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{1}{CK+1} = \frac{AQ}{10} \quad \gamma_n^2 = CK$$

$$g = AQ \cdot QB \quad AC^2 = \angle Q(\angle Q+2)$$

$$\gamma_n \gamma_n^2 = AM \cdot (AM+2)$$

$$(AM+1)^2 = \gamma_n^2 + 1$$

$$AM(AM+2) = (AM+1-1)(AM+1+1) = (AM+1)^2 - 1$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x} = 5x$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 9$$

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$2 - 7x \geq 0$$

$$2 - 7x = 6$$

$$D = 25 - 24 = 1 \Rightarrow x = \frac{5 \pm 1}{4} = 1; \frac{3}{2}$$

$$x \leq 2$$

$$x \in (-\infty; 1) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$(x^2 + 2x + 1) + x^2 = (x+1)^2 + x^2 > 0$$

$$-\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{a+b} = a + \sqrt{a}$$

$$a^2 + 2a\sqrt{a} - b = 0$$

$$a+b = a^2 + 2a\sqrt{a} + a$$

$$b = a^2 + 2a\sqrt{a}$$

$$\sqrt{a+b} = b + \sqrt{a}$$

$$2 - 7x = 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$a+b = b^2 + 2b\sqrt{a} + a$$

$$1 - 7x = -2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$1 = b + 2\sqrt{a}$$

$$b^2 + 2\sqrt{a}b - b = 0$$

$$\gamma_n = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 1$$

$$\sqrt{a-b} - \sqrt{a} = b$$

$$b(b + 2\sqrt{a} - 1) = 0$$

$$b = 0$$

$$b = 1 - 2\sqrt{a}$$

$$b = 2 - 7x$$

$$a = 2x^2 + 5x + 3$$

$$\sqrt{a-b} = \sqrt{a}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{a-b} = b$$

$$\sqrt{a} = b + \sqrt{a-b}$$

$$a = b^2 + 2b\sqrt{a-b} + a - b$$

$$b(b + 2\sqrt{a-b} - 1) = 0$$

$$\frac{x}{CK} = \frac{1}{\gamma_n}$$

$$(x^2 + 1)\gamma_n = \gamma_n^3 + \gamma_n$$