



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$$\left. \begin{aligned} ab &: 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc &: 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac &: 2^{23} \cdot 7^{39} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} ab &= 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot k \\ bc &= 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot h \\ ac &= 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot m \end{aligned} \right. \quad k, h, m \in \mathbb{N}$$

$$ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot k \cdot h \cdot m$$

слева квадрат nat. числа $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ справа все степени четны $\Rightarrow k \cdot h \cdot m : 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow k, h, m \geq 2 \Rightarrow$ пусть без огранич. общности

$k=2$.

Пусть:

$$\begin{cases} a = 2^x \cdot 7^y \\ b = 2^y \cdot 7^z \\ c = 2^z \cdot 7^x \end{cases}, \text{ где } x, y, z \in \mathbb{Z}; \quad x, y, z - \text{ макс. степени} \\ x, y, z \geq 0; \quad \text{вхождения } 7 \text{ в } a, b, c.$$

$$\begin{cases} ab = 2^{x+y} \cdot 7^{y+z} \\ bc = 2^{y+z} \cdot 7^{z+x} \\ ac = 2^{x+z} \cdot 7^{x+y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab = 2^{x+y} \cdot 7^{y+z} \cdot h = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot k \\ bc = 2^{y+z} \cdot 7^{z+x} \cdot l = 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot h \\ ac = 2^{x+z} \cdot 7^{x+y} \cdot i = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot m \end{cases} \quad h, l, i \in \mathbb{N}; h, l, i \neq 7.$$

$$y = \frac{(x+y+y+z) - (x+z)}{2} = \frac{11+18-39}{2} = -5$$

$$\begin{cases} x+y=11 \\ y+z=18 \\ x+z=39 \end{cases}$$

Но $y \geq 0$. Значит тогда,

тогда $ab = 2^{x+y} \cdot 7^{y+z} \cdot h = 2^{10} \cdot 7^{10} \cdot h$ (или наоборот)
из них следует на 7 (или наоборот) $x+z$ была меньше.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Учитывая, что a, b, c — целые числа, то a, b, c — делители $2^{55} \cdot 7^{39}$.~~

Пусть:

$$\begin{cases} ab = 2^{11} \cdot 7^0 \cdot h \\ bc = 2^{10} \cdot 7^1 \cdot l \\ ac = 2^{28} \cdot 7^{39} \cdot i \end{cases} \quad h, l, i = 2^{x+z+10} \cdot e, e/7.$$

$$\begin{cases} x+y=11 \\ y+z=10 \\ x+z+10=39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=11 \\ y+z=10 \\ x+z=29 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=11 \\ y=0 \\ z=18 \end{cases}$$

(система линейная, решений не ∞)
 $\Rightarrow$ решений $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\rightarrow$ ко $2^{x+z} : 2^{39}$

$$\begin{aligned} ab &= 2^{11} \cdot 7^0 \cdot h \\ bc &= 2^{10} \cdot 7^1 \cdot l \\ ac &= 2^{28} \cdot 7^{39} \cdot i \end{aligned}$$

$$x+z \geq 39$$

Увеличить нужно на $39-29=10$

Увеличим z на 10:

$$\begin{cases} x=11 \\ y=0 \\ z=28 \end{cases}$$

$$m=n=1$$

$$abc = \sqrt[3]{2^{55} \cdot 7^{39}} = 2^{28} \cdot 7^{13}$$

при:

$$\begin{cases} a = 2^{11} \cdot 7^0 \\ b = 2^0 \cdot 7^1 \\ c = 2^{28} \cdot 7^{12} \end{cases}$$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{13}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2}.$$

$$\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

$$\begin{cases} (a+b):m \\ (a+b)^2-9ab \equiv m \end{cases}$$

$$9ab \equiv m$$

Пусть:

$$\begin{cases} a \equiv k, \text{ тогда:} \\ b \equiv m-k \end{cases} \quad (\text{где } k \geq 0, k < m, k \in \mathbb{N})$$

$$(a+b)^2-9ab \equiv 0$$

$$-9ab \equiv 0$$

$$9ab \equiv 0$$

$$9k(m-k) \equiv 0$$

$$9mk-9k^2 \equiv 0$$

$$:m$$

$$-9k^2 \equiv 0$$

$$9k^2 \equiv m$$

Пусть: $\text{НОД}(m; k) = d, d > 1$.

Тогда $a \equiv k \Rightarrow a: d (m: d, k: d)$

$b \equiv m-k \Rightarrow b: d (m: d, k: d), \text{ тогда } (a; b) \geq d$

$> 1 \Rightarrow \frac{a}{b}$ сократима, противоречие.

Тогда $\text{НОД}(m; k) = 1, 9k^2 \equiv m \Rightarrow 9: m$

$= 0). \quad 9: m \Rightarrow m \leq 9.$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Пусть: } m=9.$$

$$\text{При } a=2, b=7:$$

$$\frac{9}{49-98+4} = -\frac{9}{45} = -\frac{1}{5}.$$

$$\text{Ответ: } 9.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.

Пусть: $a = 3x^2 + 3x + 1$, $b = 1 - 9x$. Тогда:

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + b$$

$$\begin{cases} a+b = a+b^2+2b\sqrt{a} \\ \sqrt{a}+b \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = b^2 + 2\sqrt{a} \\ b = 0 \\ \sqrt{a} + b \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{a} = \frac{1-b}{2} \quad (2) \\ b = 0 \quad (1) \\ \sqrt{a} + b \geq 0. \end{cases}$$

1) $b = 0$

$$1 - 9x = 0$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$a = 3x^2 + 3x + 1 = \frac{3}{81} + \frac{3}{9} + 1 = \frac{1}{27} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{10}{27} + 1 = \frac{37}{27} > 0$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{a} = 0$$

0 = 0
Верно.

$$2) \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = \frac{1 - (1 - 9x)}{2}$$

$$3x^2 + 3x + 1 = \frac{81x^2}{4}$$

$$12x^2 + 12x + 4 = 81x^2$$

$$69x^2 - 12x + 4 = 0$$

$$D = 144 - 4 \cdot 69 \cdot 4 < 0. \text{ Нет реш.}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $\frac{1}{9}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6.

$$\begin{cases} ax+ay-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

Векторное неравенство выполняется $\Leftrightarrow (x,y)$

лежит либо в кругу с ц. $(0;0)$ и $r=1$, либо

в кругу с ц. $(0;12)$ и $r=4$.



П.к. два решения, но две
точки прямой $ax+ay-8b=0$

лежат в кругах. П.к. прямая не

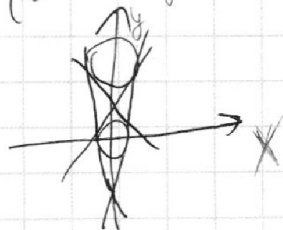
может пересек. один круг в двух

точках, то она пересекает каждую

точку. Значит, она общая касательная

к ним. Такие касательные по 2 пары симмет-

ричны (относ. Oy)





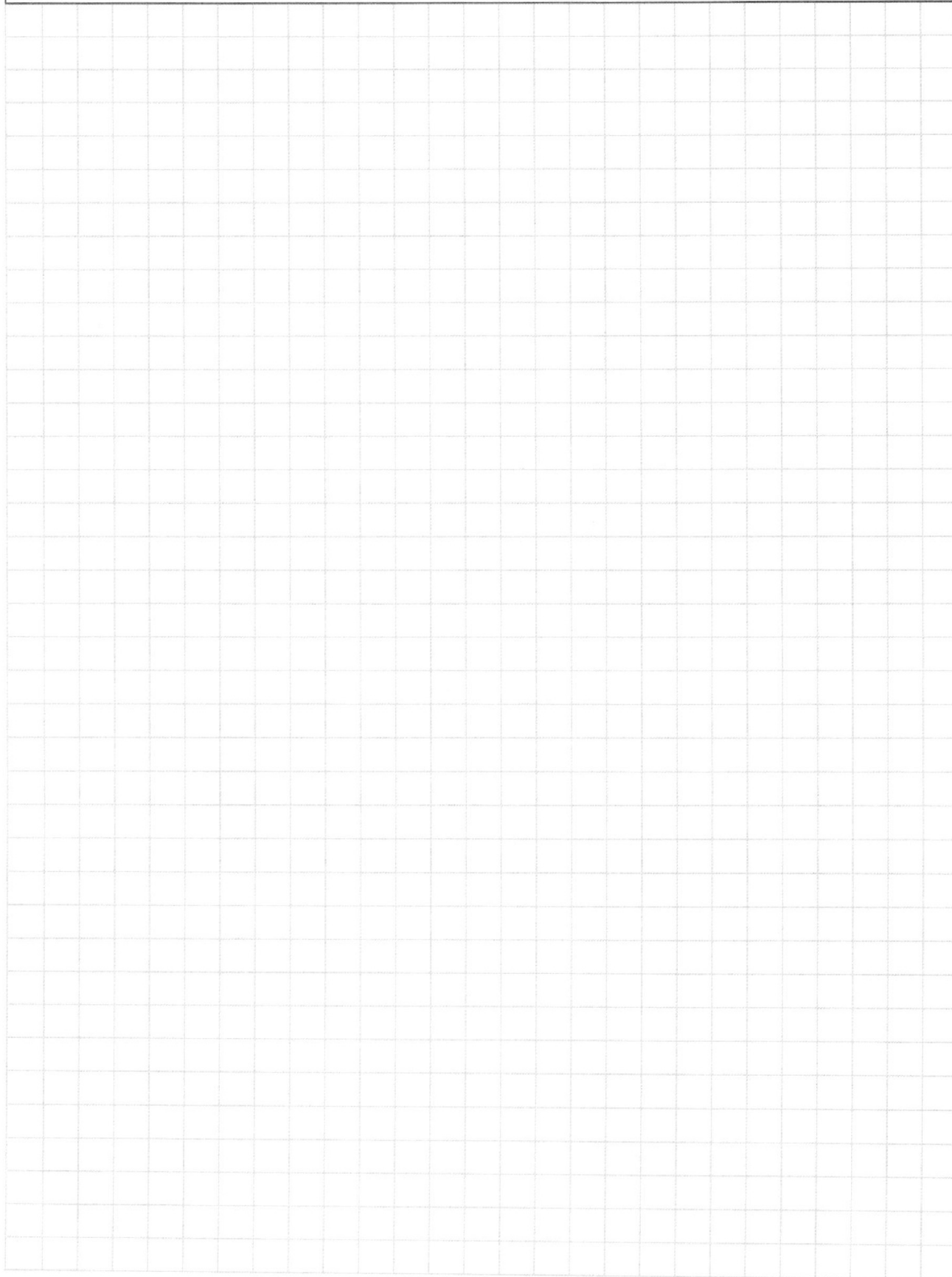
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x_1^2 + (y_1 - 12)^2 = 16$$

$$\frac{y_1}{x_1}$$

$$1 + \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2 - 24\left(\frac{y_1}{x_1}\right) + 144 = 16$$

$$400 + 80 + 36 = 516$$

$$t^2 - 24t + 129 = 0$$

$$D = 576 - 516 = 60$$

$$t = \frac{24 \pm \sqrt{60}}{2} = 12 \pm \sqrt{15}$$

$$b_1 x_1 x_0 (x_1 - x_0) = \frac{b_1 x_0^2 (x_1^2 - x_0^2)}{x_1^2 - x_0^2} = \frac{b_1 x_0^2 (x_1^2 - x_0^2)}{(x_1^2 - x_0^2)}$$

$$\frac{y_1}{x_1} = 12 \pm \sqrt{15}$$

$$b x_1^2 x_0^2 \pm \sqrt{(64b^2 - 1)(x_0^2 - 1)} = b_1 x_0^2 x_1^2 \pm \sqrt{(64b^2 - 1)(x_1^2 - 1)}$$

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = 1 \\ ax_0 + y_0 = 8b \end{cases}$$

$$a = \frac{6x_0 \pm \sqrt{(64b^2 - 1)(x_0^2 - 1)}}{x_0^2}$$

$$x_0^2 + (ax_0 - 8b)^2 = 1$$

$$x_0^2 + a^2 x_0^2 - 16abx_0 + 64b^2 = 1$$

$$256b^2 x_0^2 + 4 - 256b^2 - 4x_0^2 =$$

$$= 256(b^2 - 1) + 4(1 - x_0^2) =$$

$$= (256b^2 - 4)(x_0^2 - 1)$$



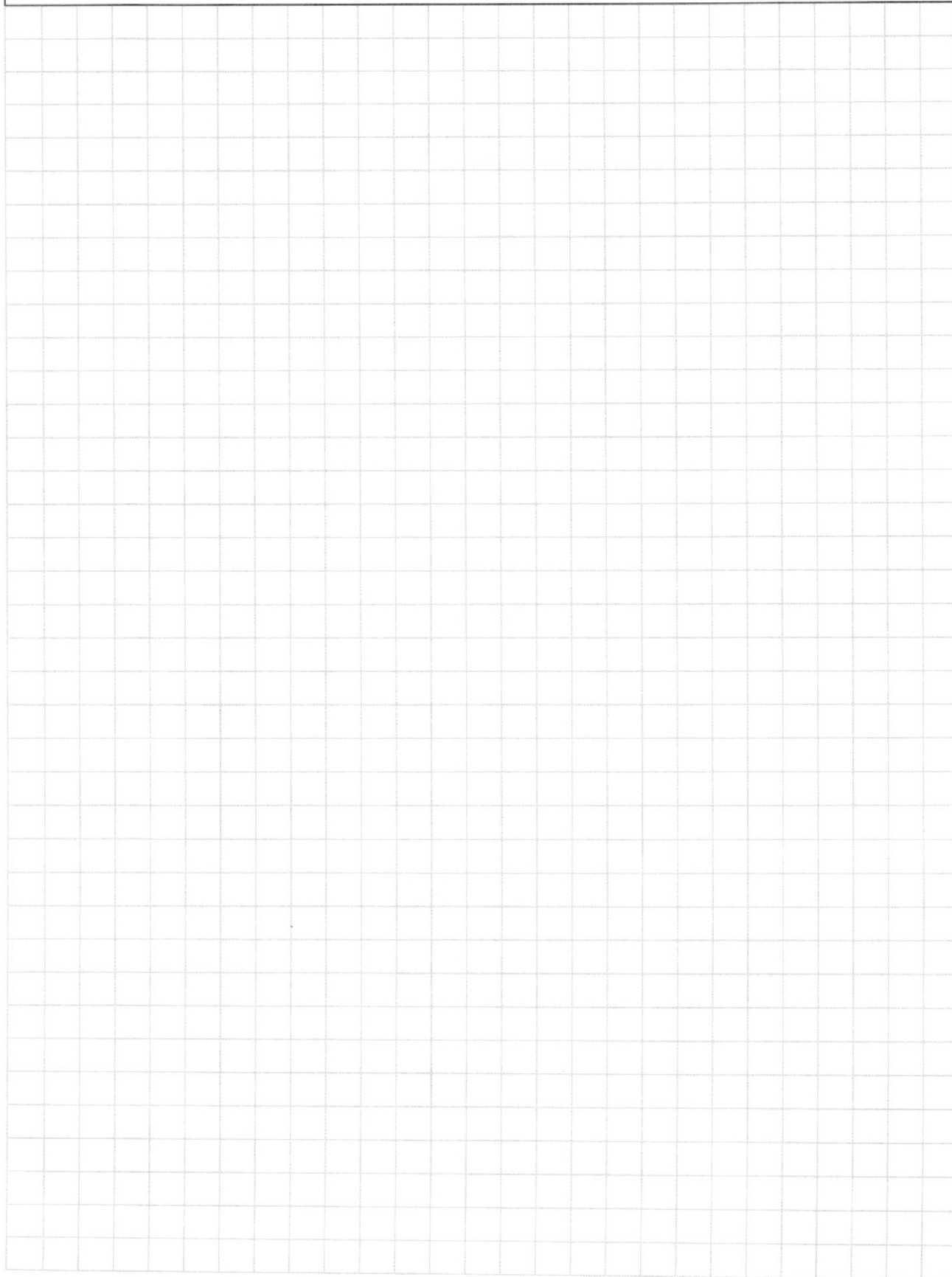
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

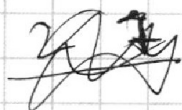
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

33
18

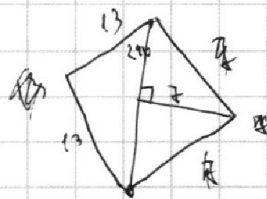
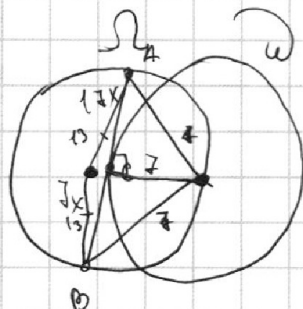


$$\begin{array}{r} 13 \\ 169 - 182 + 4 \end{array}$$

$$\frac{7+2}{49-98+4}$$

$$\frac{9}{49}$$

$$169 - 632 + 49$$



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 3x$$

$$t = 3(x+1)^2$$

$$\sqrt{t^2 - 1} = \sqrt{}$$

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6}$$

$$x = \frac{-38\sqrt{3}}{6}$$

$$\begin{cases} (a+b):5 \\ (a^2-7ab+b^2):5 \end{cases}$$

$$((a+b)^2 - 9ab):m$$

$$m=9$$

$$\begin{cases} 9ab:m \\ (a+b):m \end{cases}$$

$$6 \equiv m-k$$

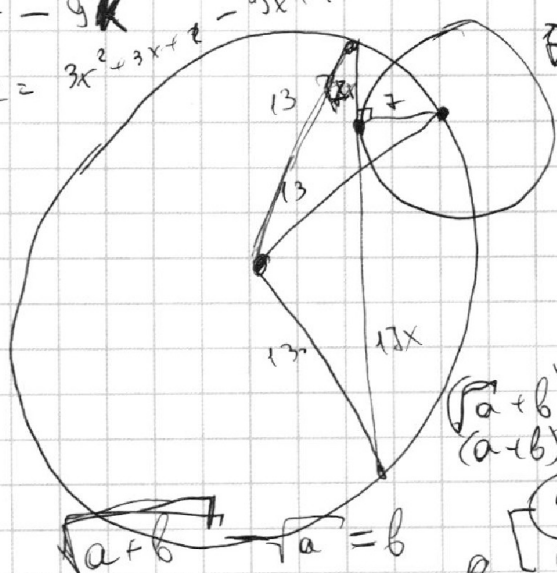
$$9ab \equiv m$$

$$9k(m-k) \equiv 0$$

$$9mk - 9k^2 \equiv 0$$

$$m^2 - 9k$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$



$$\begin{cases} ax+4-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-1) \end{cases}$$

$$\frac{49}{147}$$

$$637$$

$$9ab:m$$

$$9ab = mk$$

$$(a+b) = mn$$

$$\begin{cases} 49x^2 + 49 = k^2 \\ 289x^2 + 49 = m^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b) \geq 0 \\ (a-b) \geq 0 \end{cases}$$

$$b \leq 1$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$a+b = a + 2b\sqrt{a} + b^2$$

$$1 = 2\sqrt{a} + \sqrt{a} = \frac{1-b}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$ab = 2^{16} \cdot 7^{11} \cdot K = X$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot n = y$$

$$ac = 2^{23} \cdot 3^9 \cdot m = 2^8$$

~~3~~
 2 3
 $9 - 4K = 2$
 $3 \overline{) 7}$
 $49 - 34 = 15$

$$abc = \sqrt{\frac{xy}{z} \cdot \frac{xz}{y} \cdot \frac{yz}{x}} = \sqrt{xyz}$$

$$abc = \sqrt{2^{55} \cdot 7^{68} \cdot k \cdot n \cdot m}$$

$$\frac{k}{m-k}$$

$$(k, m-k) = 0$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

~~10-2-2020~~

$$\frac{(b+b)}{(a^2 - 2ab + b^2)} : m$$

$$\begin{array}{rcl} a + b & = & 21 \\ b + c & = & 18 \\ a + c & = & 39 \end{array}$$

~~58-18-22~~

(22)

$$a = 11$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \frac{k}{m-k}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$g_{ab}^m = (a+b)^2 - (a+b)$$

$$sab \stackrel{m}{=} (a+b-i)(a+b)$$

$$a = m + k$$
$$b = m + (m - k)$$

~~$$\frac{m(h+x+1)}{(m+k)^2 + (x^m + m-k)^2}$$~~

$$k^2 - 7($$

$$k^2 - 7(m-k)k + (m-k)^2 \stackrel{m}{=} 0$$

$$2k^2 - 7mk - 7k^2 + m^2 - 2mk = 0$$

$$-5K^2 + \cancel{10K} - \cancel{5} = 0$$

$$-5K \equiv 0$$

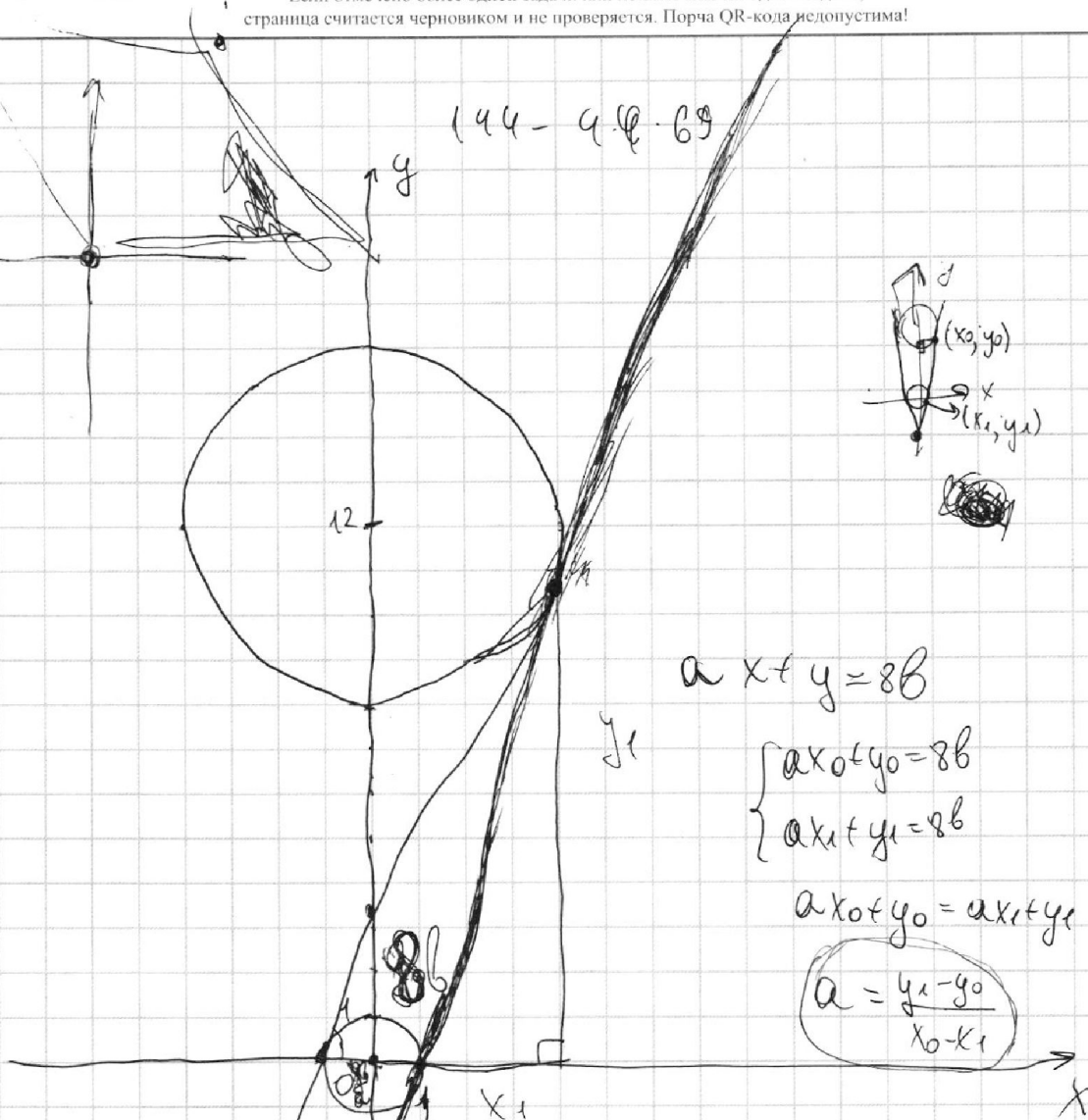
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| ☒ | ☒ | ☒ | ☒ | ☒ | ☒ | ☒ |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$x_0^2 + (y_0 + 1)^2 = 1$$

$$ax + y = 8b$$

$$\begin{cases} ax_0 + y_0 = 8b \\ ax_1 + y_1 = 8b \end{cases}$$

$$ax_0 + y_0 = ax_1 + y_1$$

$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_0 - x_1}$$

$$\begin{cases} (x_0, y_0) \\ (x_1, y_1) \end{cases} \begin{cases} ax_0 + y_0 = 8b \\ ax_1 + y_1 = 8b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = 1 \\ x_1^2 + (y_1 - 12)^2 = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ -24y + 144 + 1 = 16 \end{cases}$$

$$-24y = -129$$

$$y = \frac{129}{24}$$

$$x_0^2 = 1 - (ax_0 - 8b)^2$$

$$a^2 x_0^2 - 16ax_0b + 64b^2 + 2x_0 - 1 = 0$$

$$D = 256x_0^2b^2 - 4(64b^2 + 2x_0 - 1) =$$