



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



$$b=2^5 \quad a=7^{16} \cdot 2^{11} \quad c=7^{16} \cdot 2^{12}$$

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

$$b=2^5$$

$$c=7^{23} \cdot 2^{10}$$

$$a=7^{16} \cdot 2^{13}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$ $\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 : 2^{15+17+23} \cdot 7^{11+17+39}$
 $bc : 2^{17} \cdot 7^{11}$ $(abc)^2 : 2^{55} \cdot 7^{66}$
 $ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$ $\Rightarrow (abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{66} \cdot k$, где k - натуральное

числом $(abc)^2$

т.к. $(abc)^2$ все степени простых множителей должны

быть четными $\Rightarrow$ т.к. 2^{55} , $k_{\min} = 2$

$\Rightarrow (abc)^2 = 2^{56} \cdot 7^{66}$ - минимум

$\Rightarrow abc = 2^{28} \cdot 7^{33}$

Заметим, что при этом $ac : 7^{39} \Rightarrow abc : 7^{35}$

$\Rightarrow abc \geq 2^{23} \cdot 7^{39}$

таким т.к. $ac : 2^{23}$, $ab : 2^{15}$; $bc : 2^{17}$

для a, b, c было бы на-максимальным значением

входящим в a , b - в b , c - в c

тогда
$$\begin{cases} a+b \geq 15 \\ b+c \geq 17 \\ c+a \geq 23 \end{cases}$$

$\Rightarrow a+b - b - a \geq 2$

$c - a \geq 2$

$\Rightarrow c + a + c - a \geq 25$

$2c \geq 25$, т.к. c - целое,

$c \geq 13$, тогда $a \geq 10$, $b \geq 5$

Пусть m_a, m_b, m_c - максимальные степени входящие в a, b, c соответственно. $\Rightarrow m_a + m_c \geq 39$, $m_a + m_b \geq 11$, $m_c + m_b \geq 18$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$m_c + m_b - m_b - m_a \geq 7$$

$$m_c - m_a \geq 7$$

$$m_c - m_a + m_c + m_a \geq 46$$

$$2m_c \geq 46$$

$$m_c \geq 23 \Rightarrow m_a \geq 16 \Rightarrow m_b \geq 0$$

возможны минимальные значения m и n для каждого

числа:

тогда

$$a = 2^{10} \cdot 7^{16}$$

$$b = 2^5$$

$$c = 2^{15} \cdot 7^{23}$$

тогда

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{16} : (2^{15} \cdot 7^{11})$$

$$bc = 2^{18} \cdot 7^{23} : (2^{18} \cdot 7^{18})$$

$$ac = 2^{25} \cdot 7^{39} : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\Rightarrow a \cdot b \cdot c = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

$$\text{Итого: } 2^{28} \cdot 7^{39}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2.

$\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2}$, если a и b имеют общий множитель m , то

$$(a+b):m$$

$$(a^2-2ab+b^2):m$$

$$\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-2ab} \Rightarrow \frac{(a+b)^2-2ab}{(a+b)^2-2ab}$$

$$\text{т.к. } (a+b):m \Rightarrow (a+b)^2:m^2 (a:m)$$

$$\Rightarrow 2ab:m$$

$$\text{пусть } \begin{cases} a:m \\ ab:m \end{cases}$$

Рассмотрим второй случай

$$\text{если } ab:m \Rightarrow 2ab:m \Rightarrow (a^2-2ab+b^2):m$$

$$(a^2+b^2):m$$

$$\text{т.к. } a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2:m^2$$

$$\begin{array}{l} a^2+b^2:m \\ 2ab:m \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a^2-2ab+b^2:m \\ (a-b)^2:m \end{array}$$

$\Rightarrow$ если m - простое число,
то $a-b:\sqrt{m}$, если нет,

$$a-b:m \text{ (т.к. делимое меньше делителя)}$$

$$\Rightarrow \text{т.к. } a+b:m, \Rightarrow \sqrt{m}$$

$$\text{пусть } a+b+a-b=2a:m \text{ или }:\sqrt{m}$$

$$\text{или } a+b-(a-b)=2b:m \text{ или }:\sqrt{m}$$

пусть $2:\sqrt{m}$ или m , тогда a,b делители



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

общий десятичный m или $\sqrt{m}$ $\rightarrow \frac{a}{b}$ - дробная - упрощаем

пусть $g : m$ или $2 : m$ или $2 : \sqrt{m}$

т.е. искомое m - минимальное, $m = g$:

пример при $a = 4$, $b = 5$ $\frac{4}{5}$ - дробная

$$\frac{4+5}{16-140+25} = \frac{9}{-99} = -\frac{1}{11}$$

Ответ: $m = 9$.

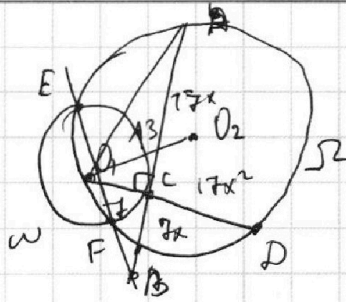
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть O_1 и O_2 - центры окр. ω и Ω
соответственно; Проведем O_1C до пересечения с Ω
и назовем точку D

тогда $AC \cdot CB = O_1C \cdot CD$ как перпендикуляр из центра

$$\Rightarrow FH \cdot GH = r^2 \Rightarrow CD = r^2$$

Замечает, что радиусы имеют центры O_1, O_2 и AB

(прямые Ω)

Проведем отрезок EF где окр ω и Ω

они $\perp O_1O_2$, тогда $\angle$ который нас интересует

$$\angle FGH = \angle O_2O_1D \text{ (из подобия)}$$

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4.

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 1 - 9x$$

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 1 - 9x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 + 2(1 - 9x) \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \end{cases}$$

Рассмотрим 2 варианта:

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 + 2(1 - 9x) \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \end{cases}$$

$$-6x = 3x + 81x^2 - 88x + 2(1 - 9x) \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$-2(1 - 9x) \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 81x^2 - 9x;$$

$$(9x - 1) \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 9x(9x - 1)$$

$$\begin{cases} 9x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 9x \quad \text{и} \quad 9x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3x + 1 = 81x^2 \end{cases}$$

Рассмотрим $3x^2 + 3x + 1 = 81x^2$

$$78x^2 - 3x - 1 = 0;$$

$$D = 9 + 312 = 321$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{321}}{156}$$

Проверим условие $\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 1 - 9x \geq 0$

$$\text{или } 9x - 1 = 0 \quad \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 0 \geq 0$$

$$\text{или } \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 9x \quad 9x + 1 - 9x \geq 0$$

Проверим ОДЗ: или $x = \frac{1}{9}$ $\frac{1}{9} < 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow$ не подходит;

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

гум-1-в:

$$D = 36 - 24 = 12$$

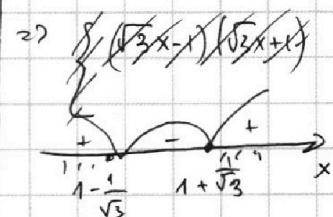
$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} =$$

$$= 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$D = 9 - 12 < 0$$

$\Rightarrow$ всегда > 0



(гум-1-в)

$$\text{ОДЗ: } x \in (-\infty; 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}] \cup$$

$$[1 + \frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{нпр } x = \frac{3 + \sqrt{321}}{156}$$

$$17 < \sqrt{321} < 18 \Rightarrow x \approx \frac{3+18}{156} = \frac{21}{156} = \frac{7}{52} < 1 \Rightarrow u$$

логич. интервал $[1 + \frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty)$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3} \approx 1,4$$

$$\Rightarrow \frac{0,4}{1,4} > \frac{7}{52}$$

$$\text{нпр } x = \frac{3 - \sqrt{321}}{156} < 0 \Rightarrow < 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ т.к. } gx > 0$$

$x > 0$
 $\Rightarrow u$ не подходит

~~не подходит~~

$$\text{Или: } x = \frac{1}{9}; \frac{3 + \sqrt{321}}{156}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

√6.
$$\begin{cases} ax + y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

Рассмотрим: $ax + y - 3b = 0$

$y = 3b - ax$ — линейная функция, график — прямая;
пересечение с Oy $(0; 3b)$, угловой коэффициент $= -a$

Рассмотрим: $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$;

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 1) = 0 & (1) \\ (x^2 + (y - 12)^2 - 16) = 0 & (2) \\ \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 < 0 \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 > 0 \end{cases} & (3) \\ \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 > 0 \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 < 0 \end{cases} & (4) \end{cases}$$

Рассмотрим $x^2 + y^2 - 1 = 0$

$x^2 + y^2 = 1$ — график окружности с центром $(0; 0)$

и радиусом 1;

Рассмотрим: $x^2 + (y - 12)^2 - 16 = 0$

$x^2 + (y - 12)^2 = 16$ — график окружности с центром $(0; 12)$;

и радиусом 4.

Всего решений на графике решения неравенства:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

к пунктам касания C и A соответственно, тогда

$$\triangle BCO_1 \sim \triangle BAO_2 \quad (\text{т.к. } \angle CBO_1 = \angle ABO_2 \text{ как н/к/н/к вершинные})$$

$$\Rightarrow \frac{O_1C}{O_2A} = \frac{O_1B}{O_2B}$$

$$\text{т.к. из условия знаем, что } O_1C = 4; O_2A = 1; \text{ ~~AB=~~$$

$$O_1O_2 = 12 = AO_1 + BO_2$$

$$\Rightarrow \frac{4}{1} = \frac{O_1B}{12 - O_1B} \Rightarrow 46 - 4O_1B = O_1B$$

$$O_1B = 9,6$$

Заметим, что $-a = \text{tg}$ угла наклона графика к Ox

Можно считать ~~нужно~~ $\text{tg} \angle CBO_1$, который будет
= tg угла наклона (вектора ~~касательной~~ ~~антенны~~)

Поэтому ~~по $\triangle CBO_1$ по теореме Пифагора~~

$$\text{CB} = \sqrt{(9,6)^2 - 4^2} =$$

$$\text{или } 1 + \text{tg}^2 \angle CBO_1 = \frac{1}{\sin^2 \angle CBO_1} = \frac{1}{\left(\frac{4}{9,6}\right)^2} = \left(\frac{9,6}{4}\right)^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 = 24^2$$

$$\Rightarrow \text{tg} \angle CBO_1 = \sqrt{4,76} = -a$$

$$\Rightarrow a = \pm \sqrt{4,76};$$

Рассмотрим внешний касательный:

Пусть $\triangle O_1FD$ и $\triangle O_2ED$ вписаны в круги,

тогда аналогично $\triangle BCO_1$ и $\triangle BAO_2$ (прямоугольные

с углами $\angle D$)

$$\Rightarrow \frac{O_2E}{O_1F} = \frac{DO_2}{DO_1}, \quad O_2E = 1, \quad O_1F = 4 \text{ как радиусы;}$$

$$DO_1 = DO_2 + O_2O_1 = DO_2 + 12$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{DO_2}{DO_2 + 12} \Rightarrow DO_2 + 12 = 4DO_2$$

$$DO_2 = 4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Реша аналогично первому углу α найдем

$$\angle \text{ctg} \angle EDO_2$$

$$\Rightarrow 1 + \text{ctg}^2 \angle EDO_2 = \frac{1}{\sin^2 \angle EDO_2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 4^2$$

$$\Rightarrow \text{ctg} \angle EDO_2 = \sqrt{15}$$

$$\Rightarrow a = \pm \sqrt{15}$$

$$\text{Отв. } a = \pm \sqrt{15}; \pm \sqrt{4,76}.$$

