



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже ~~велосипедиста~~ ^{мотоциклиста}. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

Ответ: ~~3²⁵ · 4³⁸~~ $3^{25} \cdot 4^{38}$

Решение:

Предположим, что какое-то из чисел a, b или c кратно простому p , при этом $p \neq 3$ и $p \neq 7$. Поделим число a, b или c (которое кратно) на p . Тогда, на делимость на 3 и на 7 чисел ab, bc и ac наше действие не повлияет. Будем повторять это действие до тех пор, пока ~~будет~~ найдётся такое ^{простое} число p , что $p \neq 3$ и $p \neq 7$, при этом какое-то из чисел a, b или c кратно p . Нетрудно видеть, что такими операциями мы ~~ни~~ не повлияем на делимость чисел ab, bc и ac на 3 и 7; ~~но~~ при этом число abc мы можем только уменьшать с помощью таких операций.

По итогу, у нас останется три числа a, b, c , каждое из которых не имеет простого делителя ~~ни в разложении на простые множители, отличного от 3 и 7.~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

17 продолжение
не кратно никакому простому числу, отличному
от 3 и 4.

Тогда $a = 3^{a_1} \cdot 4^{b_1}$; $b = 3^{a_2} \cdot 4^{b_2}$; $c = 3^{a_3} \cdot 4^{b_3}$, где
числа $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ — целые неотрицатель-
ные.

$$\text{Тогда } ab = 3^{a_1+a_2} \cdot 4^{b_1+b_2}; \quad ac = 3^{a_1+a_3} \cdot 4^{b_1+b_3}; \quad bc = 3^{a_2+a_3} \cdot 4^{b_2+b_3};$$

$$abc = 3^{a_1+a_2+a_3} \cdot 4^{b_1+b_2+b_3}$$

$$\text{Так как } ab: (3^{11} \cdot 4^{11}); \quad ac: (3^{21} \cdot 4^{38}); \quad bc: (3^{18} \cdot 4^{16}),$$

то получаем систему:

$$\begin{cases} a_1+a_2 \geq 11 \\ a_1+a_3 \geq 21 \\ a_2+a_3 \geq 18 \\ b_1+b_2 \geq 11 \\ b_1+b_3 \geq 38 \\ b_2+b_3 \geq 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1+a_2+a_1+a_3+a_2+a_3 \geq 11+21+18 \\ b_1+b_2+b_1+b_3+b_2+b_3 \geq 11+38+16 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Так как } abc = 3^{a_1+a_2+a_3} \cdot 4^{b_1+b_2+b_3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(a_1+a_2+a_3) \geq 50 \\ 2(b_1+b_2+b_3) \geq 65 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1+a_2+a_3 \geq 25 \\ b_1+b_2+b_3 \geq 32,5 \end{cases} \Rightarrow$$

т.к. $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ — целые неотрицательные
 $\Rightarrow$

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3 \geq 25 \\ b_1+b_2+b_3 \geq 33 \end{cases}$$

минимальное значение
abc равно
 $3^{25} \cdot 4^{33}$

$$abc \geq 3^{25} \cdot 4^{33}. \text{ Но т.к. } b_1, b_2, b_3 \text{ — целые и неотрицательные, и т.к. } b_1+b_2+b_3 \geq 33, \text{ то } b_1+b_2+b_3 \geq 33 \Rightarrow abc \geq 3^{25} \cdot 4^{33}$$

Пример: $a_1=4, a_2=4, a_3=14, b_1=19, b_2=0, b_3=19$.

Как видно, эти числа удовлетворяют системе (1) и
 $a_1+a_2+a_3 \geq 25$ и $b_1+b_2+b_3 \geq 33$. Как видно, $a=3^4 \cdot 4^{19}$; $b=3^4$; $c=3^{14} \cdot 4^{19}$ и $abc=3^{25} \cdot 4^{38}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2 продолжение

$$m \leq 10$$

Пример на $m=10$: $a=7$; $b=3$, дробь $\frac{a}{b}$ - несократима

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} = \frac{10}{49-8 \cdot 21+9} = \frac{10}{58-168} = \frac{10}{-110} \Rightarrow \text{числитель}$$

и знаменатель дроби $\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}$ можно сократить

на $m=10$.

»

Ответ: $m=10$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2 пусть $c:d$, если $|c|:|d|$, числа c и d - целые, $d \neq 0$

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}$$

Если c числитель, c знаменатель кратна m , $m \in \mathbb{N}$,

то:

$$\begin{cases} (a+b):m \\ (a^2-8ab+b^2):m \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b):m \\ (a^2+2ab+b^2-10ab):m \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b):m \\ (a+b)^2-10ab:m \end{cases}$$

$\forall m, x (a+b):m, \text{ то } (a+b)^2:m.$

$$\begin{cases} (a+b):m \\ (-10ab):m \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b):m \\ 10ab:m \end{cases}$$

Если $\text{НОД}(a, m) = x$, причём $x \neq 1$, то т.к. $(a+b):m$ и $m:x$,

то x - натуральное, то и $a:x$, то $b:x \Rightarrow (a, b, \text{НОД}(a, b) \geq x$,

x - натуральное, $x \neq 1$. $\Rightarrow$ дроби $\frac{a}{b}$ сократима, что неверно

по условию. $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow \text{НОД}(a, m) = x, x = 1$.

Аналогично $\text{НОД}(b, m) = 1$.

$\forall m, x. \text{НОД}(a, m) = 1$ и $\text{НОД}(b, m) = 1$ и $(10ab):m$

$$10 \cdot m$$

$$m \leq 10.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

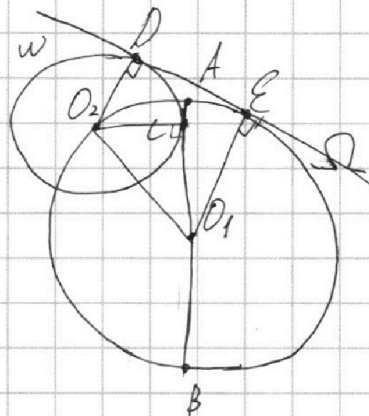
№4. $\triangle XYZ$ - треугольник XYZ .

Дано:
 Ω, ω ,
центр ω лежит
на Ω , AB - диаметр Ω ,
касается ω в
точке C .

$AC = 1$, $BC = 16$,
 PE - общая касательная
к ω и Ω .

$PE = ?$

* PE касается
 ω в точке P ,
 Ω в точке E .



Пусть R -
радиус Ω ,
 r - радиус ω ,
 O_1 - центр Ω ,
 O_2 - центр ω ,
 $O_2 \in \Omega$.

$$\begin{cases} AC = 1 \\ AB = 2R \Rightarrow AB = AC + BC = 2R = 17 \Rightarrow R = 8.5 \\ BC = 16 \end{cases}$$

т.к. AB касается ω в точке C , то $O_2C \perp AB$.

Тогда, $\triangle O_1O_2C$ - прямоугольный, где $O_1O_2 = R$ - гипотенуза, $O_2C = r$ - катет и $CO_1 = R - r$ - катет.

$$CO_1 = O_1A - AC = R - 1 = 7.5.$$

$$O_2C^2 + CO_1^2 = O_1O_2^2 \text{ по Теореме Пифагора}$$

$$O_2C = \sqrt{O_1O_2^2 - CO_1^2}$$

$$O_2C = \sqrt{8.5^2 - 7.5^2}$$

$$O_2C = \sqrt{16} \Rightarrow O_2C = 4 \Rightarrow r = 4.$$

Докажем, что если x - длина общей внешней
касательной двух окружностей с радиусами R и r
то и расстоянием между центрами, равным y , равно $\sqrt{y^2 - (R - r)^2}$:

1



2



3



4



5



6

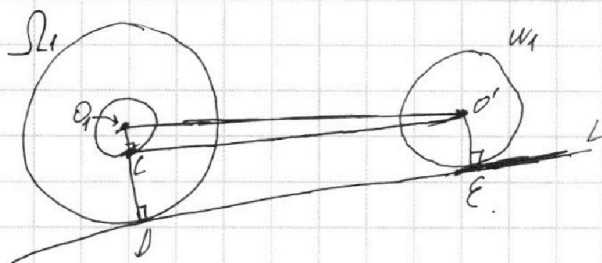


7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 продолжение



у Ω_1 радиус R , у Ω_2 радиус r .

у Ω_1 - центр O_1 , у Ω_2 - центр O_2

L - общая касательная

$L \cap \Omega_1 = \{D\}$; $L \cap \Omega_2 = \{E\}$

пусть Ω_2 - окружность с центром O_2 и радиусом $R-r$.

Проведем касательную a из O_2 к Ω_1 так, чтобы a пересекала O_1D . (см. рисунок). Пусть $\Omega_2 \cap a = \{C\} \Rightarrow O_2C = R-r$

Параллельно перенесем a на вектор $\vec{O_2E}$. Тогда,

т.к. $|\vec{O_2E}| = r$ и $O_2C = R-r$, то прямая a' , полученная

параллельным переносом a из O_2 на вектор $\vec{O_2E}$, касается и Ω_1 и Ω_2 (это следует из построения общей

касательной для двух окружностей, у которых не

совпадают центры). Тогда, $O_2C \parallel DE$. Также $DE = O_2C$, и $C \in O_1D$,

таким образом из построения общей касательной

для двух неконцентрических окружностей.

П.к. $DE \parallel O_2C$ и $DE \perp O_1D$, то $O_2C \perp O_1D$, т.к. $C \in O_1D$.

Тогда треугольник O_2CO_1 - прямоугольный с прямым углом $\angle O_2CO_1$. Тогда, по теореме Пифагора, $O_2C^2 + O_1C^2 = (O_1O_2)^2 \Rightarrow O_2C = \sqrt{(O_1O_2)^2 - O_1C^2}$,

т.к. $O_1O_2 = d$ и $O_1C = R-r$, то $O_2C = \sqrt{d^2 - (R-r)^2}$. Это и требовалось доказать. Тогда, для окружностей Ω и ω из задачи, т.к. они неконцентрические,



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 продолжение 2

верно, что $DE = \sqrt{O_1O_2^2 - (R-r)^2}$.

Пл.к. $R=8,5$, $r=1$, а $O_1O_2=R$, то $DE = \sqrt{8,5^2 - 8,5^2 - 1^2}$

$$DE = \sqrt{8,5^2 - 4,5^2}$$

$$DE = \sqrt{1 \cdot 16}$$

$$DE = \sqrt{16}$$

$$DE = 4$$

Ответ: 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 продолжение

если $y = -\frac{z}{4}$:

$$\frac{2yz}{-yz-6y^2} = \frac{-2 \cdot \frac{z^2}{4}}{\frac{z^2}{4} - 6 \cdot \frac{z^2}{16}} = \frac{-\frac{z^2}{2}}{\frac{z^2}{4} - \frac{3z^2}{8}} = \frac{-\frac{z^2}{2}}{\frac{2z^2}{8} - \frac{3z^2}{8}} = \frac{-\frac{z^2}{2}}{-\frac{z^2}{8}} = 4$$

$$= +\frac{8}{2} = 4$$

м.к. $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{2yz}{-yz - 6y^2}$ то $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = 4$

$$\begin{cases} \frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = 0,4 \\ \frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = 4 \end{cases}$$

Очевидно тогда, что наибольшим возможным значением
выражения $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2}$ является 4.

Пример: $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=4 \end{cases}$

Тогда $3x+2y=z$, м.к. $3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 6 - 2 = 4$, м.е. $3x+2y=z$.

Также, $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{z}{2}$, $\frac{3}{2} + \frac{2}{-1} = \frac{4}{2}$, $\frac{3}{2} - 2 = \frac{4}{2}$. Да, тогда выполняется
равенство $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{z}{2}$ (м.к. $\frac{3}{2} + (-1) = \frac{4}{2}$).

Тогда $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3 \cdot 2^2 - 4 \cdot (-1)^2 - 4^2}{2^2 - 6 \cdot (-1)^2} = \frac{12 - 4 - 16}{4 - 6} = \frac{-8}{-2} = 4$

$= \frac{12 - 20}{4 - 6} = \frac{-8}{-2} = 4$, $\Rightarrow$ пример верен, м.к. числа 2, -1, 4 - ненулевые
действительные,
равенства $3x+2y=z$ и $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{z}{2}$ выполняются.
и $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = 4$.

Ответ: 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5.

$$3x + 2y = z \quad (1) \quad \text{и} \quad \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \quad (2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{обозначения: } a \stackrel{\text{по (1)}}{=} b - \text{означает,} \\ \text{что } a=b \text{ по утверждению (1).} \end{array} \right.$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{2}{z} - \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{2y - z}{yz} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{-3x}{yz} \Rightarrow -x^2 = yz \quad (3)$$

$$3x + 2y = z \Rightarrow 3x = z - 2y$$

$$\text{из (1): } x = \frac{z - 2y}{3} \Rightarrow x^2 = \left(\frac{z - 2y}{3} \right)^2 \quad (4)$$

из (3) и (4):

$$-\left(\frac{z - 2y}{3} \right)^2 = yz.$$

$$\frac{-(4y^2 + z^2 - 4yz)}{9} = yz.$$

$$-4y^2 - z^2 + 4yz = 9yz$$

$$-4y^2 - z^2 = 5yz \quad (5)$$

$$4y^2 + z^2 + 5yz = 0.$$

$$(4y + z)(y + z) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = -\frac{z}{4} \\ y = -z \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} \stackrel{\text{по (5) и (6)}}{=} \frac{-3yz + 5yz}{x^2 - 6y^2} \stackrel{\text{по (6)}}{=} \frac{2yz}{-yz - 6y^2} \quad (7)$$

$$\text{по (6)} \quad \begin{cases} y = -\frac{z}{4} \\ y = -z \end{cases}$$

если $y = -z$:

$$\frac{2yz}{-yz - 6y^2} \stackrel{\text{по (6)}}{=} \frac{-2y^2}{y^2 - 6y^2} = \frac{-2}{1 - 6} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$\text{и.к.} \quad \frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} \stackrel{\text{по (4)}}{=} \frac{2yz}{-yz - 6y^2} \stackrel{\text{по (7)}}{=} \frac{2yz}{-yz - 6y^2} \stackrel{\text{по (6)}}{=} \frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = 0,4.$$



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 продолжение

из (8) и (6):
$$\begin{cases} v_1 v_2 = 540 \\ v_1 + v_2 = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 48 - v_2 \\ (48 - v_2) v_2 = 540 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 48 - v_2 \\ -v_2^2 + 48v_2 - 540 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 48 - v_2 \\ v_2^2 - 48v_2 + 540 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 48 - v_2 \\ v_2^2 - 48v_2 + 540 = 0 \end{cases}$$

решим уравнение $v_2^2 - 48v_2 + 540 = 0$ (D -дискриминант)

$$D = 48^2 - 540 \cdot 4 = 2304 - 2160 = 144 = 12^2$$

$$v_2 = \frac{48 \pm 12}{2}$$

$$\begin{cases} v_2 = \frac{48 + 12}{2} \\ v_2 = \frac{48 - 12}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_2 = \frac{48 + 12}{2} \\ v_2 = \frac{48 - 12}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_2 = 30 \\ v_2 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_2 = 30 \\ v_1 = 48 - v_2 \\ v_2 = 18 \\ v_1 = 48 - v_2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} v_2 = 30 \\ v_1 = 18 \\ v_2 = 18 \\ v_1 = 30 \end{cases}$$

Полок как мотоциклист изначально примет равные велосипедиста, а стартовал от двигателя, но $v_1 > v_2$

$$\begin{cases} v_1 = 30 \\ v_2 = 18 \end{cases}$$

по (5), $2 = S \cdot \frac{v_1 - v_2}{v_1 v_2} \Rightarrow S = \frac{2 v_1 v_2}{v_1 - v_2} \Rightarrow S = \frac{2 \cdot 30 \cdot 18}{30 - 18} \Rightarrow$

$$\Rightarrow S = \frac{2 \cdot 540}{18} \Rightarrow S = \frac{540 \cdot 2}{18} \Rightarrow S = \frac{270}{3} \Rightarrow S = 90 \text{ км.}$$

Ответ: 90 км.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

т. - час, км/ч - километр в час; км. - километр.
 №6. Пусть S км. - путь из A в B , V_1 км/ч - скорость

мотоциклиста, V_2 км/ч - скорость велосипедиста. (зна-
 чимые)

Тогда мотоциклист ехал $\frac{S}{V_1}$ часов, а велосипедист - $\frac{S}{V_2}$ ч.

Тогда, по условию, $\frac{S}{V_1} = \frac{S}{V_2} - 2$ (всё в часах)

Если мотоциклист ехал бы время, за которое
 велосипедист проехал весь путь S , то еще мотоциклист
 проехал бы $\frac{S}{V_2} \cdot V_1$ км. Если бы велосипедист ехал время,
 затраченное мотоциклистом на путь S , то велосипедист бы
 проехал бы $\frac{S}{V_1} \cdot V_2$ км. Тогда, по условию, $\frac{S}{V_1} \cdot V_2 + 96 = \frac{S}{V_2} \cdot V_1$ (всё км.)

Если бы каждый увеличил скорость на 6 км/ч, то
 мотоциклист бы ехал $\frac{S}{V_1+6}$ часов, а велосипедист - $\frac{S}{V_2+6}$ ч. По
 условию, $\frac{S}{V_1+6} = \frac{S}{V_2+6} - 1,25$ (всё в ч.).

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{S}{V_1} = \frac{S}{V_2} - 2 & (1) \\ \frac{S}{V_1+6} = \frac{S}{V_2+6} - 1,25 & (2) \\ \frac{S}{V_2} \cdot V_1 = \frac{S}{V_1} \cdot V_2 + 96 & (3) \end{cases}$$

из (3) следует, что $96 = S \cdot \frac{V_1^2 - V_2^2}{V_1 V_2}$ (4)

из (1) следует, что $2 = S \cdot \frac{V_1 - V_2}{V_1 V_2}$ (5)

из (4) и (5) следует, что $V_1 + V_2 = 48$. (м.к. $S \cdot \frac{V_1^2 - V_2^2}{V_1 V_2} = S \cdot \frac{(V_1 + V_2)(V_1 - V_2)}{V_1 V_2}$) (6)

из (2) следует, что $1,25 = \frac{S}{V_2+6} - \frac{S}{V_1+6}$, м.к. $S \cdot \frac{V_1 - V_2}{(V_2+6)(V_1+6)} = 1,25$. (7)

из (5) и (7) следует, что $S \cdot \frac{V_1 - V_2}{V_1 V_2} = \left(\frac{V_1 V_2}{(V_1+6)(V_2+6)} \right)^{-1} \cdot \frac{2}{1,25} = \frac{2}{\frac{5}{4}} = \frac{8}{5} = \frac{16}{5}$

$$\left(\frac{2(V_1 - V_2)}{(V_1+6)(V_2+6)} \right)^{-1} = 1,6 \Rightarrow \frac{(V_1+6)(V_2+6)}{V_1 V_2} = 1,6 \Rightarrow \frac{V_1 V_2 + 6(V_1 + V_2) + 36}{V_1 V_2} = \frac{8}{5} \Rightarrow$$

$$\text{м.к. } V_1 + V_2 = 48 \Rightarrow \frac{V_1 V_2}{V_1 + V_2} + \frac{6 \cdot 48 + 36}{V_1 + V_2} = \frac{8}{5} \cdot 1,6 \Rightarrow 1 + \frac{324}{V_1 V_2} = 1,6 \Rightarrow \frac{324}{V_1 V_2} = 0,6 \Rightarrow \frac{V_1 V_2}{324} = \frac{5}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1 V_2 = \frac{324 \cdot 5}{3} \Rightarrow V_1 V_2 = 108 \cdot 5 \Rightarrow V_1 V_2 = 540. \quad (8)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№7 продолжение

Поскольку $BF = BE$ (см. выше обоснование), то
 $\triangle BFE$ — равнобедренный с основанием FE . Так как $\angle FBE = \angle CAB = 90^\circ$,
то $\angle BFE = \angle BEF = 45^\circ$ — по сумме углов $\triangle BFE$.

$$\begin{cases} \angle BFE = 45^\circ \\ \angle CFY = 45^\circ \text{ (см. выше обоснование)} \end{cases} \Rightarrow \angle EFY = 90^\circ, \text{ т.к.}$$

углы $\angle BFE$, $\angle CFY$, $\angle EFY$ в сумме дают 180° .

$\angle EFY = \angle EFY$, т.к. $Y \in FY$. ~~Кто-то в $\triangle EFX$, кто-то в $\triangle EFY$.~~

~~точки X, Y, F лежат на одной прямой.~~

$$\angle EFX = 90^\circ \text{ (т.к. } \angle EFY = \angle EFY = 90^\circ)$$

т.к. точки E, F, X — лежат на w , то $\angle EFX$ опирается
опирается на диаметр $w \Rightarrow EX$ — диаметр w .

и $\angle EDX = 90^\circ$, т.к. точка D тоже лежит на w

$$\angle XDY = 90^\circ, \text{ как угол, смежный с } \angle EDX = 90^\circ.$$

т.к. $\angle EDX = 90^\circ$ и $\angle XDY = 90^\circ$, то $\triangle EXD$ — н/у с
 $\angle EDX = 90^\circ$ и $\triangle XDY$ — н/у с $\angle XDY = 90^\circ$.

по теореме Пифагора

$$\begin{cases} EX^2 = ED^2 + XD^2 \\ XY^2 = DY^2 + XD^2 \end{cases}$$

т.к. $EX = 2\sqrt{2}XY$

$$\begin{cases} EX^2 = 8XY^2 \\ XY^2 = DY^2 + XD^2 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7. $\triangle ABC$ - треугольник ABC ; ρ/b - равнобедренный
ч/у - равнобедренный.

Дано: $\triangle ABC$;

ω - вписанная

окружность $\triangle ABC$;

$\omega \cap AC = D$; $\omega \cap AB = E$;

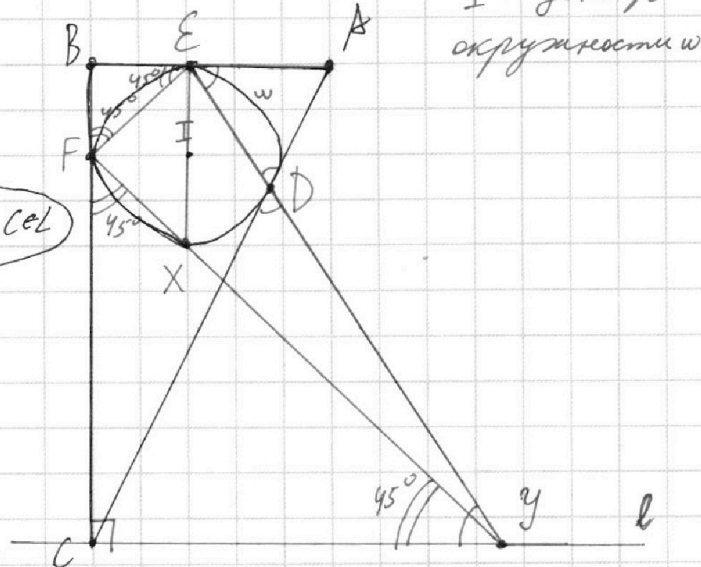
$\omega \cap BC = F$; $EL \perp BC$, L - проекция E на BC , $EL \perp BC$, $CE \perp L$

луч ED пересекает L

в точке Y ; $FY \cap \omega = \{F, X\}$;

$EX = 2\sqrt{2}XY$

$AD/DC = ?$



Заметим, что т.к. отрезки касательных из
одной точки к одной окружности, равны, то
 $AE = AD$, $BE = BF$ и $CF = CD$.

Тогда $\triangle EAD$ - ρ/b с основанием ED , $\triangle BEF$ - ρ/b с осно-
ванием EF и $\triangle FDC$ - ρ/b с основанием FD .

Тогда, углы $\angle AED$ и $\angle ADE$ равны ($\angle AED = \angle ADE$).

Так как $EL \perp BC$, т.е. $YL \perp BC$, то $YL \parallel AB \Rightarrow \angle CYD = \angle AED$.

т.к. $\angle AED = \angle EDA$, и $\angle EDA = \angle CBY$ (как вертикальные
углы), то $\angle AED = \angle EDA = \angle CYD = \angle YDC \Rightarrow \triangle CDY$ - ρ/b с основа-
нием $DY \Rightarrow CY = CD$

т.к. $CF = CD$ (см. выше, посыл) и $CY = CD$, то $CF = CY \Rightarrow \triangle FCY$ - ρ/b
с основанием $FY \Rightarrow$ т.к. $\angle FCY = 90^\circ$ (т.к. $CY \perp BC$), то $\angle CFY = \angle CYF = 45^\circ$,
по сумме углов $\triangle FCY$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7 продолжение 2.

↓ м.к. $EX = 2\sqrt{2}XY$

$$\begin{cases} 8XY^2 = ED^2 + XD^2 \\ XY^2 = DY^2 + XD^2 \end{cases}$$

$$(ED^2 + XD^2) - (DY^2 + XD^2) = 7XY^2$$

$$ED^2 - DY^2 = XY^2 = 4$$

Заметим, что $\triangle EDA \sim \triangle DYC$ (по $\angle AED = \angle DYC$ и $\angle EDA = \angle YDC$).
↓ м.к. $CD = CY$ и $EA = AD$.

$$\frac{AD}{CD} = \frac{EP}{DY}$$



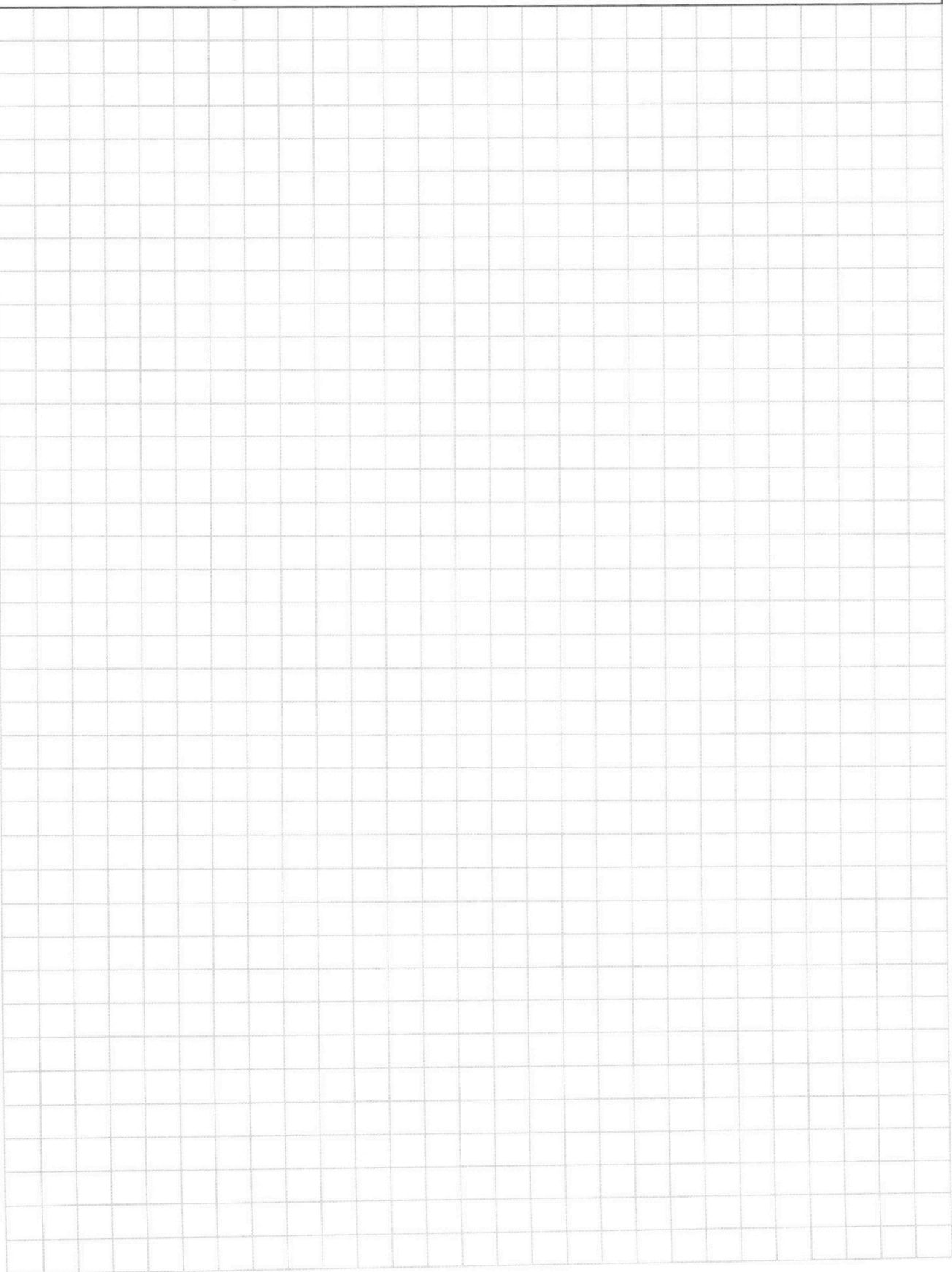
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 *Упрощение.*

$$ab : (3^{11} \cdot 4^{11}) ; bc : 3^{18} \cdot 4^{16} ; ac : 3^{21} \cdot 4^{38}$$

Очевидно, что если какие-то из чисел a, b, c кратны каким-то простым числам, ^{кратны 3 и 4,} то можно число, делящееся на простое число, разделить на это простое число столько раз.

$$a = 3^{a_1} \cdot 4^{b_1}$$

$$b = 3^{a_2} \cdot 4^{b_2}$$

$$c = 3^{a_3} \cdot 4^{b_3}$$

25	33
$a_1 = 8$	$b_1 = 3$
$a_2 = 18$	$b_2 = 4$
$a_3 = 21$	$b_3 = 38$

Пример верен не всегда!

$$\begin{cases} a_1 + a_2 \geq 11 \\ b_1 + b_2 \geq 11 \\ b_2 + b_3 \geq 16 \\ a_2 + a_3 \geq 18 \\ a_1 + a_3 \geq 21 \\ b_1 + b_3 \geq 38 \end{cases}$$

$$abc = 3^{a_1 + a_2 + a_3} \cdot 4^{b_1 + b_2 + b_3}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 \geq (11 + 18 + 21)/3 = 7 + 6 + 3\frac{2}{3} = 16\frac{2}{3}$$

$$b_1 + b_2 + b_3 \geq (11 + 16 + 38)/3 = (27 + 38)/3 = 65/3 = 32\frac{2}{3}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 \geq 17$$

$$b_1 + b_2 + b_3 \geq 33$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик.

15

$$3x + 2y = z$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{2}{z} - \frac{1}{y} = \frac{2y - z}{yz}$$

$$\frac{3}{x} = \frac{-3x}{yz} \Rightarrow -x^2 = yz. \Rightarrow y \text{ и } z \text{ - разные по знаку}$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3(x^2 - 6y^2) + 14y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = 3 + \frac{14y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2}$$

если $z > 0$, $y < 0$, $3x + 2y > 0$, $x > 0$.

$$\frac{2}{z} = \frac{3}{x} + \frac{1}{y}$$

$$\frac{3y + x}{xy} = \frac{2}{z}$$

$$3y + x = \frac{2}{z} \cdot xy$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} > 0$$

$$\frac{3y + x}{xy} > 0$$

$$\begin{cases} 3y + x < 0 \\ 3x + 2y > 0 \end{cases}$$

$$-(2y - z)^2 = 4yz$$

$$y = -\frac{z}{4}$$

$$-x^2 = yz = -\frac{z^2}{4}$$

$$x^2 = \frac{z^2}{4}$$

пусть $z = 4$,
тогда $y = -1$.

$$3x + 2 = 4$$

$$3x = 2$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$\frac{3 \cdot \frac{2}{3} - 4 - 16}{4 - 6} = \frac{-8 - 16}{-2} = 12$$

$$\frac{3x - z}{2} = \frac{xz}{2x - 3z}$$

$$x = \frac{z - 2y}{3}$$

$$-\left(\frac{z - 2y}{3}\right)^2 = yz$$

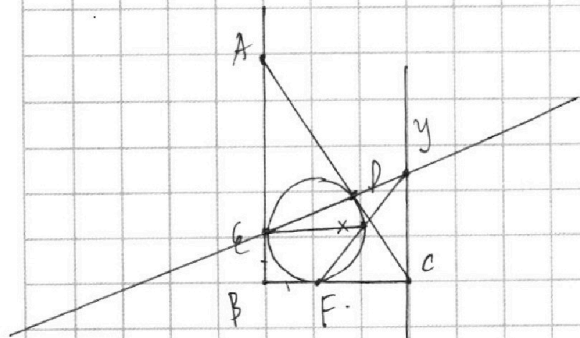
$$-4y^2 - z^2 + 4yz = 8yz$$

$$-4y^2 - z^2 = 5yz$$

$$-(2y + z)^2 = yz$$

$$4y^2 + 5yz + z^2 = 0$$

$$(4y + z)(y + z) = 0 \Rightarrow y = -\frac{z}{4} \text{ или } y = -z$$



$$\frac{2yz}{x^2 - 6y^2} = \frac{2yz}{(x - 3y)(x + 3y)} = \frac{2yz \cdot 2}{(x - 3y) \cdot 2xy} = \frac{2z^2}{(x - 3y) \cdot x} = \frac{2z^2}{x^2 - 3yz}$$

$$-3yz + 8yz = 2yz$$

$$5yz = 2yz$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$4x^2 - 2x + 7 - 2\sqrt{\dots} = 16x^2$$

$$3x + 2y = 2$$

$\sqrt{2}$

$\frac{a}{b}$ - несократима, т.е. $(a, b) = 1$.

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times 48 \\ \hline 144 \\ + 384 \\ \hline 2304 \end{array}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 3ab + b^2}$$

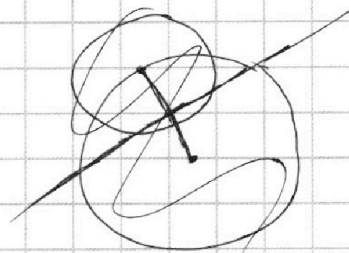
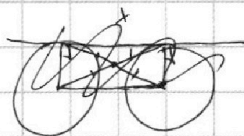
$$a+b : m$$

$$(a-b)^2 + 6ab : m$$

$$\sqrt{\frac{R^2 - r^2}{2}}$$

$$a+b : m$$

$$(a+b)^2 - 10ab : m$$

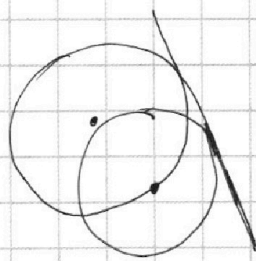


$$\begin{cases} 10ab : m \\ a+b : m \end{cases}$$

$$a : m \text{ и } b : m$$

если $(a, m) = x$, то и $x \neq 1$, то $b : x$, это противоречие

$$\begin{cases} (a, m) = 1 \\ (b, m) = 1 \end{cases}$$



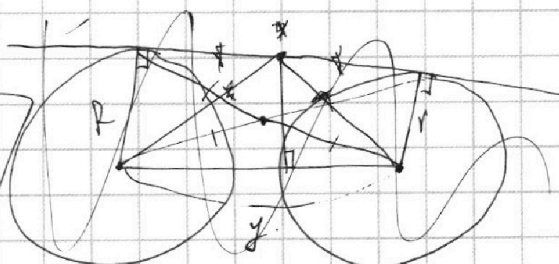
$$10 : m$$

$$m \leq 10$$

$$48^2 - 540 \cdot 4 =$$

$$= 2304 - 2160 =$$

$$= 144 = 12^2$$



$$S = x \cdot \frac{a+b}{2}$$

Пример: $a=7, b=3$

$$S =$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times 6 \\ \hline 288 \end{array}$$

$$288 + 36^2 =$$

$$= 288 + 1296 =$$

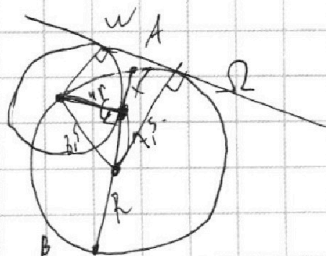
$$= 1584$$

$$\frac{10}{49+9-8 \cdot 21} = \frac{10}{58-168} = \frac{10}{-110}$$

$$\begin{array}{r} 8 \cdot 215 \\ - 160 \cdot 85 \\ \hline 168 \end{array}$$

$$\frac{324}{3} = 108$$

№3.



$$2R - x = 16$$

$$x = 1$$

$$R = 8,5$$

$$r = \sqrt{8,5^2 - 4,5^2}$$

$$r = \sqrt{1 \cdot 16}$$

$$r = 4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4 черновик.

$$3x + 2y = z.$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}.$$

$$\frac{3}{x} = \frac{2}{z} - \frac{1}{y}.$$

$$\frac{3}{x} = \frac{2y - z}{yz}.$$

$$\frac{3}{x} = \frac{-2x}{yz}.$$

$$-x^2 = yz.$$

$$2\sqrt{R^2 + d_1^2}$$

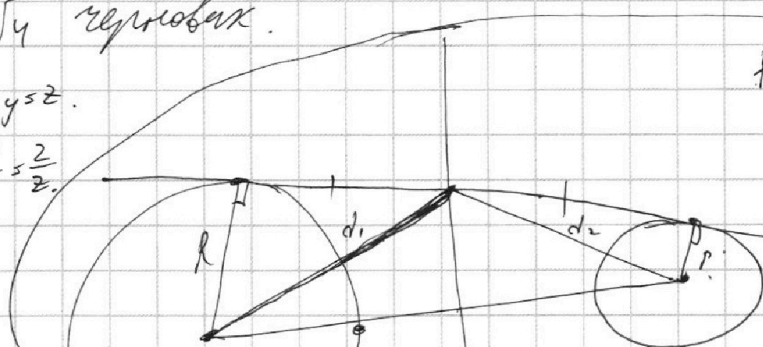
$$(d_1^2 - R^2)/(d_2^2 - R^2).$$

$$(d_1^2 - R^2)/$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} \neq \frac{1}{5}$$

$$\sqrt{y^2 - (R+r)^2}.$$

$$(R-r)^2 + y^2.$$



R, r;
y.

м. $\sqrt{1}$ и $\sqrt{2}$. в км/ч.

$$\frac{S}{\sqrt{1}} = \frac{S}{\sqrt{2}} - 2.$$

$$\frac{S}{\sqrt{1}} \cdot \sqrt{2} + 36 = \frac{S}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1}$$

$$\frac{S}{\sqrt{1} + 0} = \frac{S}{\sqrt{2} + 0} - 1,25.$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}} S + 36 = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} S.$$

$$96 = S \left(\frac{\sqrt{2}^2 - \sqrt{1}^2}{2\sqrt{1}\sqrt{2}} \right).$$

$$2 = \frac{S}{\sqrt{2}} - \frac{S}{\sqrt{1}}$$

$$2 = S \cdot \frac{\sqrt{1} - \sqrt{2}}{\sqrt{1}\sqrt{2}}.$$

$$48 = \frac{S}{\sqrt{1} + \sqrt{2}}.$$

$$R^2 - d_1^2 = R^2 - d_2^2$$

$$-R^2 + d_1^2 = -R^2 + d_2^2$$

$$R^2 - R^2 = d_1^2 - d_2^2$$

$$d_1^2 - R^2 = d_2^2 - R^2. \quad 1,25 =$$

$$d_1^2 - d_2^2 = R^2 - R^2.$$