



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $a = 2^{\alpha_1} 7^{\beta_1}$, $b = 2^{\alpha_2} 7^{\beta_2}$, $c = 2^{\alpha_3} 7^{\beta_3}$, тогда

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \neq 15 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \neq 17 \\ \alpha_3 + \alpha_1 \neq 23 \end{cases} \Rightarrow 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \neq 55 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \neq 27,5$$

но т.к. $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$, то $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 28$

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = 11 \\ \beta_2 + \beta_3 = 16 \\ \beta_3 - \beta_1 = 39 \end{cases} \Rightarrow 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \neq 68 \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \neq 34$$

т.к. степень единицы не может быть меньше 0
 $\beta_1 + \beta_2$, поэтому градусы увеличатся $\beta_1 + \beta_2 \geq 4$
 $\beta_2 + \beta_3$ т.к. $\beta_3 \geq 10$, значит $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 39$

~~$abc = 2^{\alpha_1} 7^{\beta_1} 2^{\alpha_2} 7^{\beta_2} 2^{\alpha_3} 7^{\beta_3} = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} 7^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} = 2^{27,5} 7^{34}$~~
 ~~$= 2^{27,5} 7^{34}$, но т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, то степень должна быть целой~~

~~Значит степень должна быть целой, значит $abc = 2^{28} 7^{34}$~~

~~Пример: $a = 2^{11}$, $b = 2^5$, $c = 2^2$~~

Значит $abc = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} 7^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} = 2^{28} \cdot 7^{39}$

Пример: $a = 2^{11} 7^{11}$, $b = 2^5$, $c = 2^{12} 7^{28}$

Ответ: $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$
$$\frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

$\frac{a}{b}$ - не св. дроби $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$$

т.к. $\text{НОД}(a, b) = 1$, то

$$\text{НОД}(ab, a+b)$$

$$\text{НОД}(a, a+b) = 1$$

$$\text{НОД}(1, a+b) = 1$$

$$\Rightarrow \text{НОД}(ab, a+b) = 1$$

$$\text{НОД}(a+b)^2-9ab, a+b$$

$\downarrow$

значит $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ - не св. дроби $\Rightarrow$ значит

$$a^2-7ab+b^2 - \text{не св. дроби} \Rightarrow \text{значит}$$

тогда можно найти такие $a \geq 2$ и $b \geq 2$,
которые $m=1$

$$m=1$$

$$\text{Ответ: } m=1$$

рассмотрим значение m , тогда

$$a=2, b=2, \text{ тогда}$$

$$\frac{5}{4+4+8}$$

$$m=3$$

$$\text{Ответ: } m=3, m=4$$



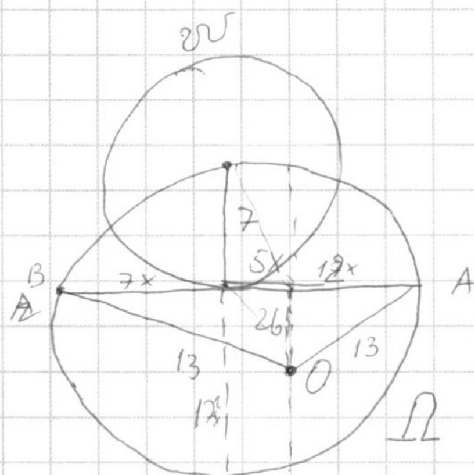
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

Q23:

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \quad \textcircled{1}$$

$$D < 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0$$

справа

$$9x - 1 < 0$$

$$9x - 1 < 0$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq (9x - 1)^2$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 81x^2 - 18x + 1$$

$$78x^2 - 21x \leq 0$$

$$26x^2 - 7x \leq 0$$

$$x(26x - 7) \leq 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq \frac{7}{26} \end{cases}$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$3x^2 - 6x + 2 = (9x - 1)^2 + 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 3x^2 + 3x + 1$$

$$-9x + 1 - (1 - 9x)^2 = 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$(1 - 9x) - (1 - 9x)^2 = 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$1. \quad 1 - 9x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{9} \Rightarrow 0 - 0 = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$0 \leq \frac{1}{9} \leq \frac{7}{26} \quad \textcircled{2}, \text{ так как } \frac{1}{9} \text{ входит.}$$

$$2. \quad x \neq \frac{1}{9} \Rightarrow 1 - (1 - 9x) = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \Rightarrow 81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$$

$$x \geq 0$$

$$x \geq 0$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 36 + 69 \cdot 4 = 276 + 36 = 312 > 0$$

$$x = \frac{\pm \sqrt{312} + 6}{69}, \text{ т.к. } -\sqrt{312} + 6 < 0 \text{ м.к.}$$

$\sqrt{312} > 6$, значит

$$x = \frac{\sqrt{312} + 6}{69}$$

$$x = \frac{2\sqrt{78} + 6}{69}$$

$$\frac{2\sqrt{78} + 6}{69} \vee \frac{7}{26}$$

$$\frac{2\sqrt{78} + 6}{69} \vee \frac{7}{26} \quad 52\sqrt{78} + 156 \vee 183$$

$$52\sqrt{78} \vee 327$$

$$\sqrt{78} \vee \frac{327}{52}$$

$$\text{м.к. } \frac{327}{52} < 7, \text{ а } \sqrt{78} > 7, \text{ м.к.}$$

$$78 > 49, \text{ т.к.}$$

$$\sqrt{78} > \frac{327}{52}, \text{ а значит}$$

$$\frac{2\sqrt{78} + 6}{69} > \frac{7}{26}$$

Ответ: $\frac{1}{9}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$k = \frac{|ax+y-8b|}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\begin{cases} 4 = \frac{8b-12}{\sqrt{a^2+1}} \\ 1 = \frac{|8b|}{\sqrt{a^2+1}} \end{cases}$$

1. случай $b \leq 0 \Rightarrow \frac{3}{2}$

$$\begin{cases} 4 = \frac{8b-12}{\sqrt{a^2+1}} \\ 1 = \frac{8b}{\sqrt{a^2+1}} \end{cases} \Rightarrow \frac{8b-12}{8b} = 4 \Rightarrow 8b-12=32b \Rightarrow \\ \Rightarrow 24b=-12 \Rightarrow b=-\frac{1}{2} \text{ (X)}$$

II случай $0 \leq b \leq \frac{3}{2}$

$$\begin{cases} 4 = \frac{12-8b}{\sqrt{a^2+1}} \\ 1 = \frac{8b}{\sqrt{a^2+1}} \end{cases} \Rightarrow \frac{12-8b}{8b} = 4 \Rightarrow 12-8b=32b \Rightarrow \\ \Rightarrow 40b=12 \Rightarrow b=\frac{12}{40} \Rightarrow b=\frac{3}{10} \Rightarrow \\ \Rightarrow b=0,3 \text{ (✓)}$$

$$1 = \frac{2 \cdot 8 \cdot 0,3}{\sqrt{a^2+1}} \Rightarrow \sqrt{a^2+1} = \frac{8 \cdot 3}{4} \text{ (✓)}$$

$$\sqrt{a^2+1} = \frac{12}{5}$$

$$a^2+1 = \frac{144}{25}$$

$$a^2 = \frac{119}{25} \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{119}}{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

II случай $b \leq 0$

$$\begin{cases} y = \frac{8b-12}{\sqrt{a^2+1}} \\ 1 = \frac{-8b}{\sqrt{a^2+1}} \end{cases} \Rightarrow \frac{8b-12}{8b} = 4 \Rightarrow 8b-12=32b \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 24b = -12 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = -0,5$$

$$1 = \frac{-8 \cdot (-0,5)}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\sqrt{a^2+1} = 4 \Rightarrow a^2+1=16 \Rightarrow a^2=15 \Rightarrow a = \pm \sqrt{15}$$

$$\text{Ответ: при } a \in \left\{ -\frac{\sqrt{15}}{25}, -\sqrt{15}, -\frac{\sqrt{15}}{25}, \frac{\sqrt{15}}{25}, \sqrt{15} \right\},$$

найдётся такое b , что система имеет ровно 2 решения.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

Чтобы выписать
2 неравенства
нам подходят все точки,
которые лежат
внутри 1 или 2 окружностей

У касательных, это
и есть когда у нас ровно
2 решения
теперь с помощью

формулы выписываем касательные

$$d = \frac{|ax + y - 8b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

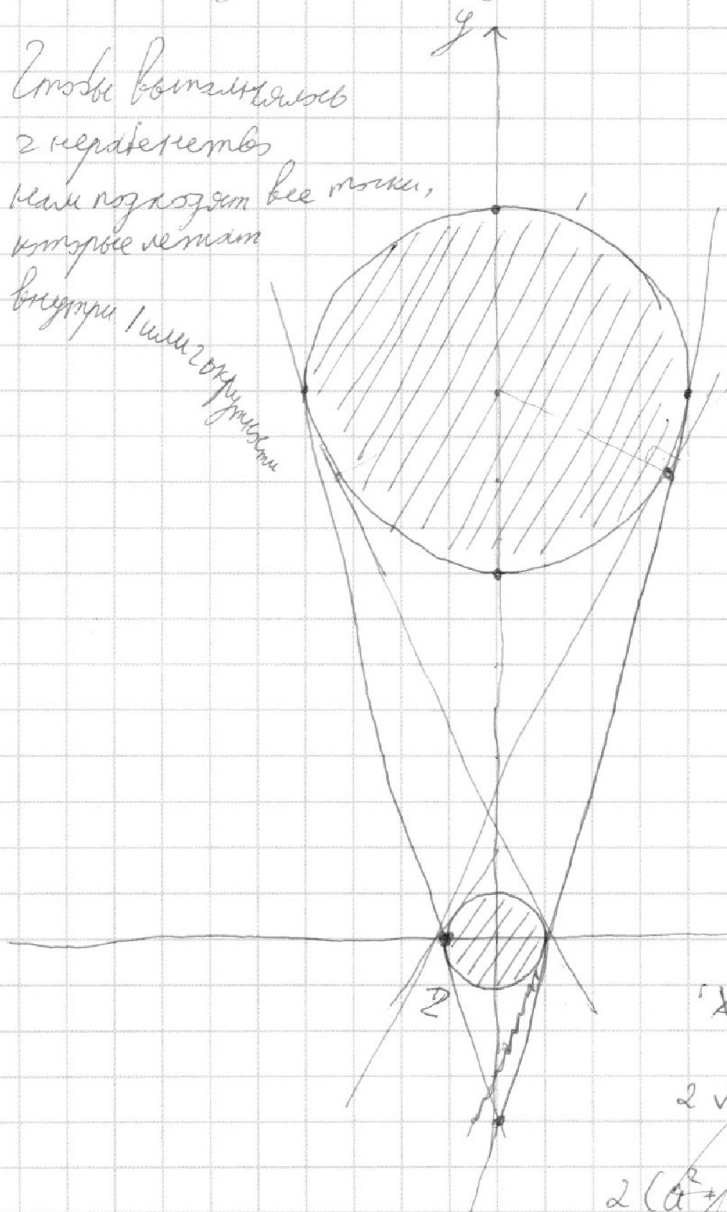
или

$$d = \frac{|12 - 8b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

где x, y будут
либо $(0, 12)$,
либо $(0, 0)$

$$2 = \frac{|3 - 2b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

$$d = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



$$2\sqrt{a^2 + 1} = |3 - 2b|$$

$$2(a^2 + 1) = 9 - 12b + 4b^2$$

$$a^2 + 1 =$$

$$d(Ax + y)$$

$$d = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

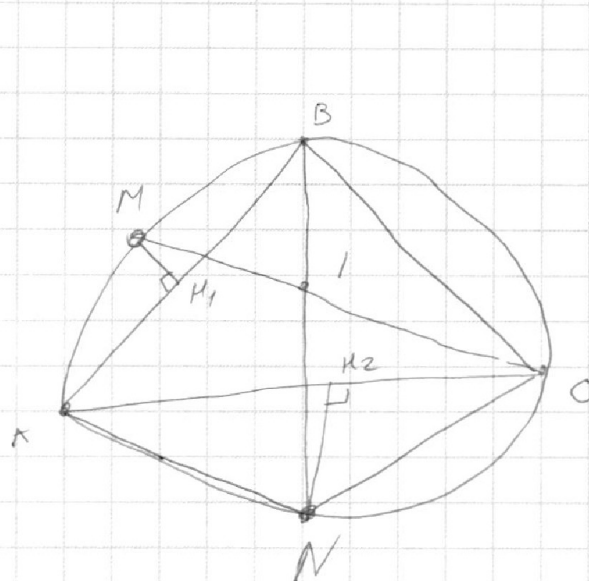
5
☐

6
☐

7
☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$NH_2 = 2,5$$

$$MH_1 = 5$$

$$AM = MB \text{ (п. к. } \angle MC - \text{ дуг.)}$$

$$AN = NC \text{ (п. к. } \angle BN - \text{ дуг.)}$$

$$AN = IN = NC$$

$$AM = MB = MI$$



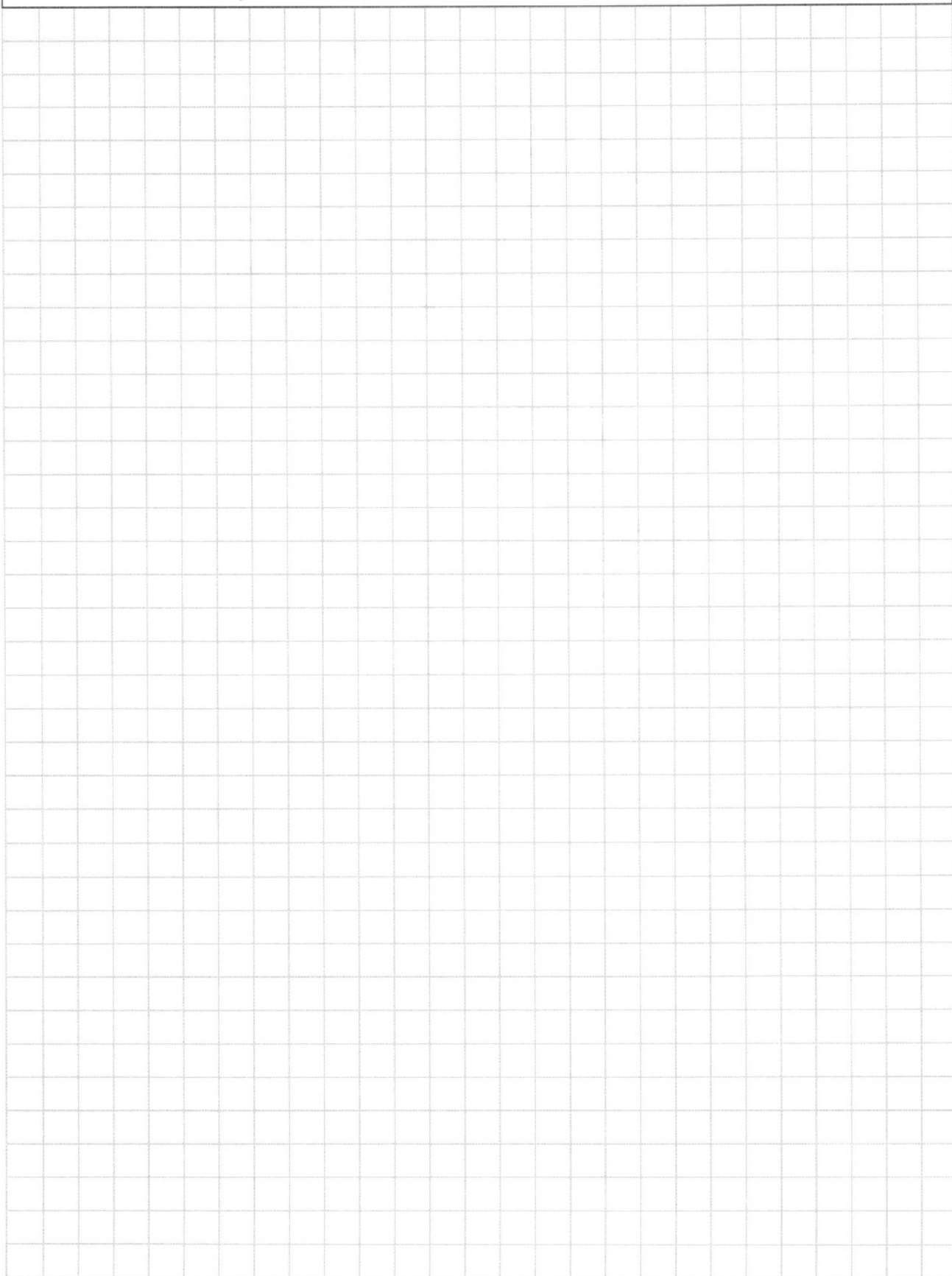
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



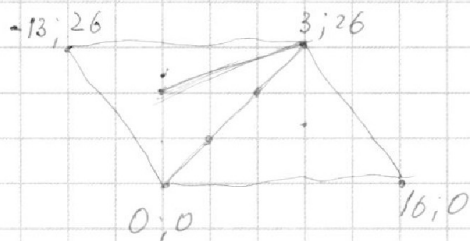
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 = 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 14$$

$$A - 2B = 14$$

x_1, y_1
 x_2, y_2

$$\frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{y_2 - y_1}$$

$$A = 2B + 14$$

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$$

$$xy_2 - xy_1 - x_1y_2 + x_1y_1 = x_2y - x_1y - y_1x_2 + x_1y_1$$

$$x(y_2 - y_1) + y(x_1 - x_2) + x_2y_1 - x_1y_2 = 0$$

$$Ax + By + C = 0$$

$$26 \cdot 6 = 156$$

$$(2B + 14)x + By + C = 0$$

$$y = -\frac{2B + 14}{B}x + \frac{C}{B}$$

$$78 \overline{) 2}$$

$$y = -2 \cdot (-2 + \frac{14}{B})x + \frac{C}{B}$$

$$0 + 26 = 0$$

$$32$$

$$6.4 \cdot 2$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 68 \\ \times 4 \\ \hline 276 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 156 \overline{) 2} \\ -14 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$2\sqrt{28}$$

$$\begin{array}{r} -3/2 \overline{) 2} \\ -2 \\ \hline 11 \\ -10 \\ \hline 12 \end{array}$$

$$\frac{26}{26.8} \leq \frac{7.8}{26.8}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 118 \overline{) 7} \\ - 7 \\ \hline 48 \\ - 48 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 16$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 = 17$$

$$\alpha_3 + \alpha_1 = 23$$

$$\begin{array}{r} 483 \\ - 156 \\ \hline 327 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 28 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 327 \overline{) 13} \\ - 28 \\ \hline 67 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 18 \\ 9 \\ 263 \end{array}$$

$$16$$

$$\alpha_1 + \alpha_2$$

$$5 + 12$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \alpha_1 = 11 \\ \alpha_2 = 5 \\ \alpha_3 = 12 \end{array}$$

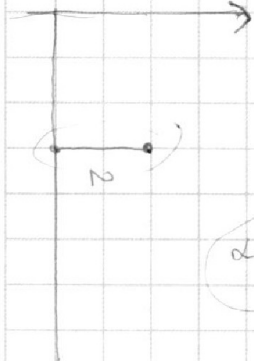
$$327 \overline{) 52}$$

$$52 \cdot 6 = 312$$

$$\begin{array}{r} 327 \\ - 312 \\ \hline 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 52 \end{array}$$

$$3$$



$$\begin{array}{l} \beta_1 \geq 5,5 \\ \beta_1 \leq 11 \end{array}$$

$$\alpha_3 - \alpha_2$$

$$\beta_3 \leq 28$$

$$8 - 27$$

$$\beta_3$$

$$\beta_3 \geq 19,5$$

$$\beta_1 \geq 5,5$$

$$\beta_2 \geq 10$$

$$\beta_3 \geq 28$$

$$\begin{array}{l} 13 \\ 12 \end{array}$$

$$\alpha = 0$$

$$\beta_1 = 0$$

$$\beta = 0$$

$$\begin{array}{l} a = 0 \\ b = -\frac{1}{5} \\ c = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5 \\ 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} ax + by + c = 0 \\ x + c = 0 \\ c = 0 \end{array}$$

$$ax + by + c = 0$$



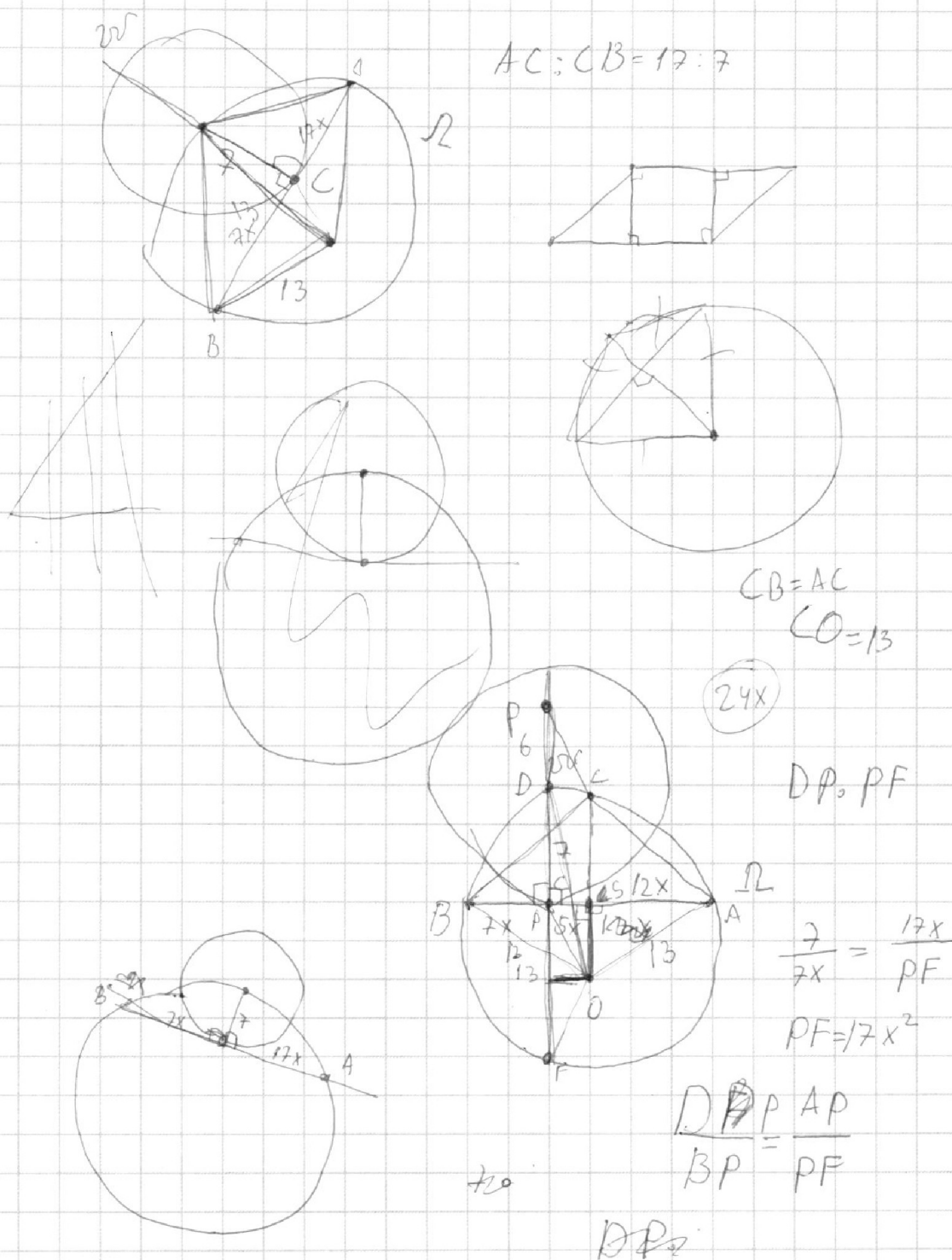
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a}{b}$$

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 7 \\ a_2 + a &= b^2 \end{aligned}$$

$$a+b$$

$$\begin{array}{r|l} a^2 - 7ab + b^2 & a+b \\ - a^2 + ab & \\ \hline -6ab + b^2 & ab - 3b \\ - -6ab + 3b^2 & \\ \hline 3b^2 & \end{array}$$

$$a - 3b + \frac{3b^2}{a+b}$$

$$\frac{(a-3b)(a+b) + 3b^2}{a+b} = \frac{a^2 + ab - 3ab - 3b^2 + 3b^2}{a+b}$$

$$\frac{a^2 - 7ab + b^2}{a+b}$$

$$\begin{array}{l} a+b \\ a+b \end{array}$$

$$\begin{aligned} (a+b)^2 - 8ab \\ (a+b-3\sqrt{ab})(a+b+3\sqrt{ab}) \end{aligned}$$

$$\frac{b(\pm+1)}{b^2(\pm^2-7\pm+1)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}-7a+\frac{b}{a}} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$y = -ax + 3b$$

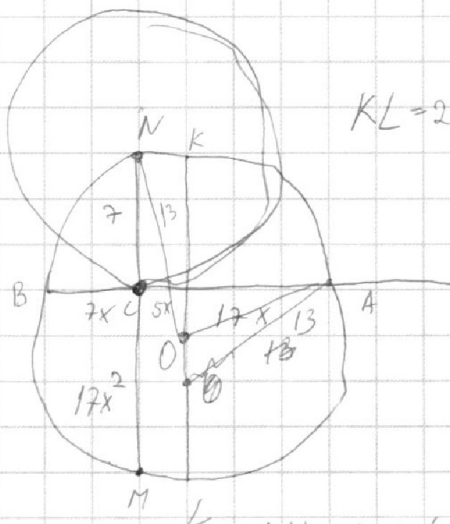
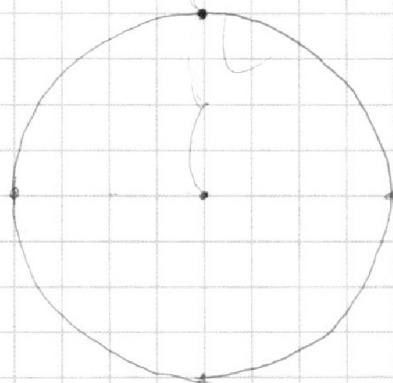
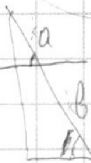
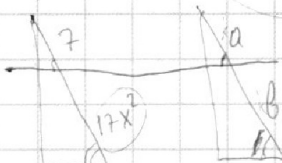
$(x-1)$

δ

$$\frac{a}{7} = \frac{b}{12x}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{7}{12x^2}$$

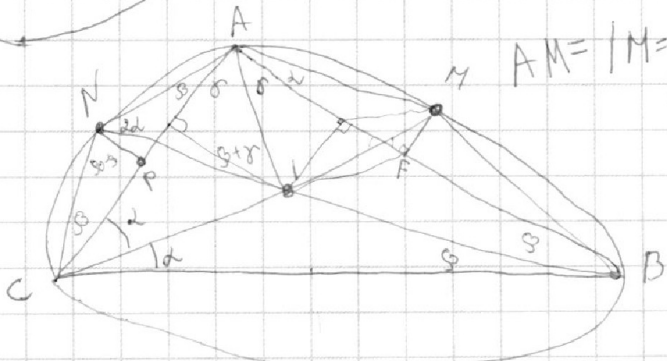
16



$KL = 26$

$NI = AN = CN$

$AM = MB$



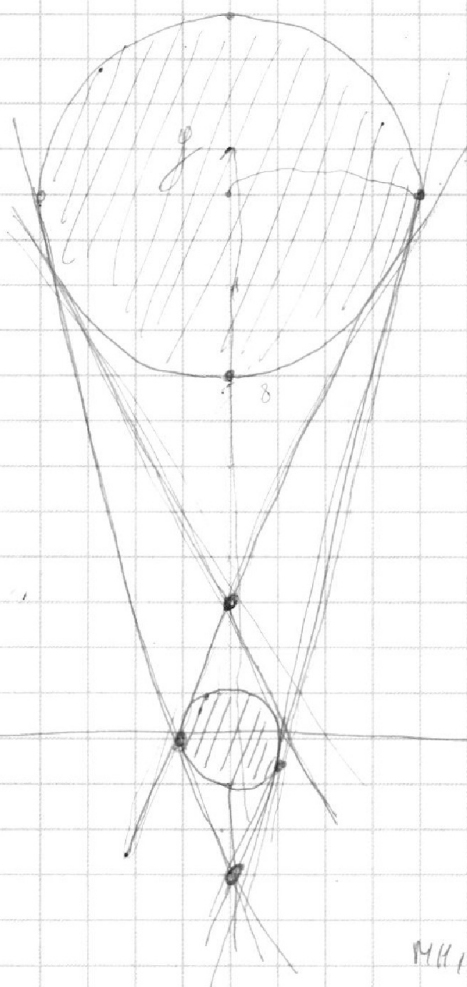
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2 \cdot 22 \cdot 2^{40}$$

$$y = -ax + 8b$$

$$ax + y - 8b = x^2 + y^2 - 1$$

$$y = -ax + 8b$$

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = 15 \\ d_1 + d_3 = 23 \\ d_2 + d_3 = 17 \end{cases}$$

A1-?

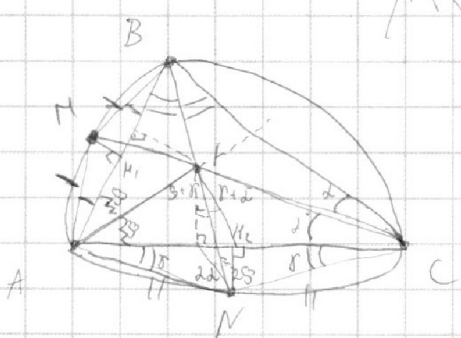
$$d_1 + d_2 + d_3 = 27,5$$

$$MH_1 = 5$$

$$NH_2 = 2,5$$

$$IN = AN = NC$$

$$IM = MB = AM$$



$$3 + \gamma$$

$$90 - \gamma$$

$$2\gamma + \gamma - 90$$

$$3 + \gamma - 90 + \gamma$$

$$2\gamma - 90 + \gamma = 2\gamma + \gamma - 90$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если $b \geq \frac{3}{2}$, то $\begin{cases} 1 = \frac{1-8b-1}{\sqrt{a^2+1}} \\ 4 = \frac{12b-1}{\sqrt{a^2+1}} \end{cases} \Rightarrow b = -\frac{1}{3} \quad \text{X}$

Ответ: при $a \in \left\{ \pm \frac{4\sqrt{6}}{5}; -\frac{4\sqrt{7}}{3}; -\frac{4\sqrt{6}}{5}; \frac{4\sqrt{6}}{5}; \frac{4\sqrt{7}}{3} \right\}$,

истема и выполняется условие параметра b , что

истема имеет ровно 2 решения

⑦

$$\begin{array}{r} 5+2 \\ a+b \\ a^2-7ab+b^2 \end{array}$$

$\frac{2}{3}$

$$\begin{array}{r} 5 \\ 4-4+3 \\ a+b \end{array}$$

$$(a+b)^2-9ab$$

2 5

$$\begin{array}{r} 7 \\ 4-3+5 \\ 70+25 \\ 3+5 \end{array}$$

$$9-7 \cdot 15+25$$

$$p_3 \dots \dots p$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 1-14+9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 7 \\ 84 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ -8 \end{array}$$

$$a, b \text{ НОД} = 1$$

$$\text{НОД}(a, b) = 1$$

⑦

$$a+b$$

$$ab$$

6

$$\begin{array}{r} 5 \\ -35 \\ 7 \cdot 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 105 \\ 15-34 \\ -71 \end{array}$$

$$34-105 = -71$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

⑦

$$\begin{array}{r} 5 \\ 31 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2+3 \\ 4-42-8 \end{array}$$

$$a = p_1 \dots p_n$$

$$b = p$$

$$42-13$$

$$a =$$

$$a^2-4ab+b^2-9ab+ab$$

$$a(a-4b)+b(b-4a)+ab$$

$$8$$

$$8-105+25$$

$$8$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

[illegible]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Играй

$$1 - 8b \geq 0 \Rightarrow b \leq \frac{1}{8}$$

$$m_b = -\frac{1}{24}, \textcircled{\times}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{1-8b}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\frac{12-8b}{1-8b} = 4 = 7$$

$$I = \frac{1 + \frac{8}{3}}{\sqrt{1^2 + 1}}$$

$$b = -\frac{1}{3} \quad \checkmark$$

~~$56b = -8$~~ $24b = -8$

$$\sqrt{a^2 + 1} = \frac{11}{3}$$
$$a^2 + 1 = \frac{121}{9}$$

$$a = \frac{112}{9}$$

$$a = \pm 4\sqrt{7}$$

$$b = -\frac{2}{1528}$$

$$b = -\frac{1}{14} \quad \checkmark$$

$$d = \frac{1 + 8 \cdot \frac{1}{16}}{\sqrt{16^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{257}} \approx \frac{2}{16.03} \approx 0.125$$

 a, b

~~$$a^2 + 1 = \frac{169}{49}$$~~

~~$$a = \pm \frac{\sqrt{120}}{7} \Rightarrow a = \pm \frac{2\sqrt{30}}{7}$$~~

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{85 - 1}{\sqrt{85}} \\ 8 &= \frac{1285 - 12}{\sqrt{1285}} \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} 1 = \frac{8b-12}{\sqrt{a^2+1}} \\ g = \frac{8b-12}{\sqrt{a^2+1}} \end{array} \right]$$

Или так:

$$\begin{cases} b \geq \frac{1}{8} \\ b \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\cancel{3b} \frac{12-8b}{\cancel{8b-1}} = 1 \Rightarrow 12-8b = \cancel{8b-1}$$

$$\left(-\frac{\sqrt{36}}{5}, \frac{2}{5}\right); \left(\frac{\sqrt{36}}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

~~$$92b - 20 \Rightarrow b = \frac{20}{92} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$~~

$$40b = 16 \Rightarrow b = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \quad (\checkmark)$$

$$1 = \frac{\frac{16}{5} - 1}{\sqrt{a^2 + 1}} \quad \sqrt{a^2 + 1} = \frac{11}{5}$$

$$a^2 = \frac{12P}{25} - 1 \quad a = \frac{\pm 4\sqrt{6}}{5}$$
$$a^2 = \frac{96}{25} \quad a = \frac{\pm \sqrt{96}}{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^{15} 7^{11}$$

$$bc: 2^{17} 7^{18}$$

$$ac: 2^{23} 7^{39}$$

a

$$ab = 2^{15} 7^{11}$$

$$bc = 2^{17} 7^{18}$$

$$ac = 2^{23} 7^{39}$$

$$ab: 2^{15} 7^{11}$$

$$bc: 2^{17} 7^{18}$$

$$ac: 2^{23} 7^{39}$$

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{55} 7^{68}$$

$$abc = 2^{22.5} 7^{27.5}$$

$$ab = k_1 \cdot 2^{15} 7^{11}$$

$$bc = k_2 \cdot 2^{17} 7^{18}$$

$$ac = k_3 \cdot 2^{23} 7^{39}$$

$$(abc)^2 = k_1 k_2 k_3 \cdot 2$$

$$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$$

$$\gcd(a, b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

$$\gcd(a+b, a^2-7ab+b^2) = m$$

$$\begin{array}{r|l} a^2-7ab+b^2 & a+b \\ \hline a^2+ab & a-8b \\ \hline -8ab+b^2 & \end{array}$$

$$\frac{a^2-7ab+b^2}{a+b}$$

$$\frac{(a-b)^2-9ab}{a+b}$$

$$\frac{(a+b)^2-9ab}{a+b} = a+b - \frac{9ab}{a+b}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~2/3~~

~~3/4~~

$$7a^2 - 7ab \quad a^2 - 7\ln(a, b) + b^2$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = (9x - 1) + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\frac{\frac{a}{b} + b}{a}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 7\left(\frac{a}{b}\right) + 1$$

$$t - 7t + 1$$

$$D = 49 - 4 = 45$$

$$\frac{a^2}{-a} = a < 0$$

$$a < 0$$

b^2

$$1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0$$

$$9x - 1 \leq \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$t = \frac{7 \pm 3\sqrt{5} + 7}{2}$$

$$\frac{\frac{a}{b^2} + \frac{1}{b}}{a}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = (9x - 1)^2 + 3x^2 + 3x + 1 + 2$$

$$a + b$$

$$8x^2 +$$

$$b^2$$

$$1, x = \frac{1}{9}$$

$$-9x + 1 - (9x - 1)^2 = 2(9x - 1)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$-(9x - 1) - (9x - 1)^2 = 2(9x - 1)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$-1 - (9x - 1) = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$-9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$