



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .
5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .
7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

^{№1}
Пусть p_i для $i = a, b, c$ — степень вхождения 3 в i
 q_i для $i = a, b, c$ — степень вхождения 7 в i

Из условия:

$$\begin{cases} p_a + p_b \geq 11 \\ p_b + p_c \geq 18 \\ p_c + p_a \geq 21 \end{cases}$$

$$p_a + p_b + p_c \geq 25$$

Но $p_a + p_b + p_c$ — степень вхождения 3 в $abc \Rightarrow abc : 3^{25}$

$$q_a + q_c \geq 38 \Rightarrow q_a + q_b + q_c \text{ (степень вхождения 7 в } abc) \geq 38$$

$$\Rightarrow abc : 7^{38} \Rightarrow abc \geq 3^{25} \cdot 7^{38} \text{ Пример:}$$

$$a = 3^7 \cdot 7^{19}; \quad b = 3^4; \quad c = 3^{14} \cdot 7^{19}$$

$$\text{Ответ: } 3^{25} \cdot 7^{38}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

$$a^2 - 8ab + b^2 = (a+b)^2 - 10ab \quad (!!!) : (x, y) = \text{НОД}(x, y)$$

Если дробь сократима, то и числитель и знаменатель
: $m \Rightarrow$

$$a+b : m$$

$$\underbrace{(a+b)^2}_{:m} - 10ab : m \Rightarrow 10ab : m$$

Пусть $(a, m) = k$. Допустим, $k > 1$

так как $(a, b) = 1$, ~~$(a, m) = k$~~ $b \not: k$

$a+b \not: k$, но $a+b : m$ и $m : k$, противоречие $\Rightarrow$

$\Rightarrow (m, a) = 1$. Аналогично для $b : (m, b) = 1$.

Т.к. a и b взаимно просты с m , ^{на} делимость на
 m ~~и~~ в выражении $10ab$, они не влияют $\Rightarrow$

$$10 : m \Rightarrow \max m = 10.$$

Пример:

$$a = 3, b = 7$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 10ab} = \frac{10}{-10} \quad \begin{matrix} 10 : 10 \\ -10 : 10 \end{matrix} \quad \textcircled{a}$$

Ответ: 10.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Пусть $t = 2x^2 - x + 3,5$;

$k = 2x - 0,5$. Тогда система переписывается:

$$\sqrt{t-k} - \sqrt{t+k} = -2k \quad | +2$$

Так как ограничения: $t \geq k$; $t+k \geq 0$.

$$t-k - 2\sqrt{t^2-k^2} + t+k = 4k^2$$

$$2\sqrt{t^2-k^2} = 2t - 4k^2 \quad | :2$$

$$\sqrt{t^2-k^2} = t - 2k^2 \quad | +2$$

Ограничения:

$$t^2 \geq k^2$$

$$t^2 - k^2 = t^2 - 4k^2t + 4k^4$$

$$4k^4 - 4k^2t + k^2 = 0$$

$$k^2(4k^2 - 4t + 1) = 0$$

или $k = 0$

или

$$4k^2 - 4t + 1 = 0$$

$$2x - 0,5 = 0$$

$$4(4x^2 - 2x + 0,25) - 4(2x^2 - x + 3,5) + 1 = 0$$

$$x_1 = 0,25$$

$$2 \cdot (0,25)^2 - 0,25 + 3,5 \geq 0 \quad \text{О}$$

$$(2 \cdot (0,25)^2 - 0,25 + 3,5)^2 \geq 0^2 \quad \text{О}$$

$$2 \cdot (0,25)^2 - 0,25 + 3,5 + 0 \geq 0 \quad \text{О}$$

$$16x^2 - 8x + 1 - 8x^2 + 4x - 14 + 1 = 0$$

$$8x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$2x^2 - x - 3 = 0$$

$$D = 1 + 24 = 5^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x_2 = \frac{1+5}{4} = 1,5$$

$$x_3 = \frac{1-5}{4} = -1$$

$$2 \cdot (1,5)^2 - 1,5 + 3,5 \geq 2 \cdot 1,5 - 0,5 \quad \textcircled{0}$$

$$(2 \cdot (1,5)^2 - 1,5 + 3,5)^2 \geq (2 \cdot 1,5 - 0,5)^2 \quad \textcircled{0}$$

$$t + k \geq 0 \quad \textcircled{0}$$

$$2 \cdot (-1)^2 + 1 + 3,5 \geq -2 - 0,5 \quad \textcircled{0}$$

$$6,5 \geq (-2,5)^2 \quad \textcircled{0}$$

$$6,5 + (-2,5) \geq 0 \quad \textcircled{0}$$

Ответ: $-1; 0,25; 1,5$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

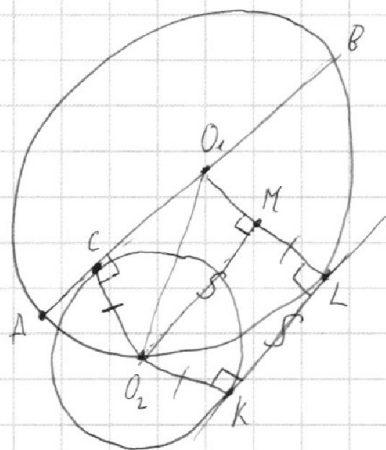
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 4



Пусть KL - общая касательная, касается Ω в L , и в K , O_1 - центр Ω , O_2 - центр ω .

Проведём O_1O_2 , O_2C - радиус в точку касания, O_2K - радиус в точку касания

O_1L - радиус в точку касания, $O_2M \parallel KL$ и пересекает O_1L в M .

AB - диаметр, следовательно радиус большей окружности = $\frac{16+1}{2} = \frac{17}{2}$

По Тх Пифагора для ΔO_1O_2C :

$$O_2C^2 + \left(\frac{17}{2} - 1\right)^2 = \left(\frac{17}{2}\right)^2$$

$$O_2C^2 = 16$$

$$O_2C = 4 \quad (KL \text{ - общий перпендикуляр к } ML \text{ и } O_2K, O_2M \parallel KL \text{ по построению})$$

$$MO_2KL - \square \Rightarrow KL = O_2M, O_2K = ML \Rightarrow O_1M = O_1L - O_2K$$

По Тх Пифагора для ΔO_1MO_2 :

$$O_2M^2 + \left(\frac{17}{2} - 4\right)^2 = \left(\frac{17}{2}\right)^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$O_2 M^2 = 4 \cdot 13$$

$$O_2 M^2 = 2\sqrt{13} = KL$$

Ответ: $2\sqrt{13}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 5

Рассмотрим числитель этой дроби:

$$3x^2 - 4y^2 - z^2 = 3x^2 - 4y^2 - (3x + 2y)^2 = 3x^2 - 4y^2 - 9x^2 - 4y^2 + 12xy = -6x^2 - 8y^2 + 12xy$$

$$\frac{3x}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3x + 2y}$$

$$\frac{3y + x}{xy} = \frac{2}{3x + 2y}$$

$$2xy = 11xy + 3x^2 + 6y^2$$

$$3x^2 + 6y^2 + 9xy = 0$$

$$x^2 + 2y^2 = -3xy$$

$$-6x^2 - 8y^2 - 4(x^2 + 2y^2) = -(10x^2 + 16y^2) = -2(5x^2 + 8y^2)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

☐

2

☐

3

☐

4

☐

5

☐

6

☒

7

☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 6

Пусть $S = AB$; a - скорость велосипедиста; b - скорость мотоцикла

$$\begin{cases} \frac{S}{a} = \frac{S}{b} + 2 & (1) \\ \frac{bS}{a} = \frac{aS}{b} + 96 & (2) \\ \frac{S}{a+b} = \frac{S}{b+b} + \frac{5}{4} & (3) \end{cases}$$

$$(1) \frac{S}{ab} (b-a) = 2$$

$$(2) \frac{S}{ab} (b^2 - a^2) = 96$$

$$(2) / (1):$$

$$b+a = 48$$

$$b = 48 - a$$

$$\text{в (1):}$$

$$\frac{S}{a} = \frac{S}{48-a} + 2$$

$$\frac{S}{-a^2 + 48a} (48 - 2a) = 2$$

$$S(48 - 2a) = 2a(48 - a)$$

$$(3):$$

$$\frac{S}{a+b} = \frac{S}{54-a} + \frac{5}{4} \quad | \cdot (a+b)(54-a) |$$

$$54b - aS = aS + 6S + \frac{5}{4} a^2$$

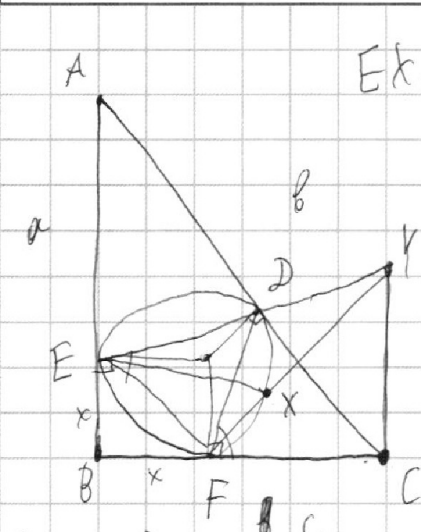
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$EX = 2\sqrt{2}XY$$

$$3x + 2y = z$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$$

$$\frac{a-x}{c-x}$$

$$x^2 - 6y^2$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3x+2y}$$

$$\frac{3y+x}{xy} = \frac{2}{3x+2y}$$

$$t = 2x^2 - x + 3,5$$

$$k = 2x - 0,5$$

$$\sqrt{t-k} + \sqrt{t+k} = -2k$$

$$1/2 \quad 2xy = 11xy + 3x^2 + 6y^2$$

$$3x^2 - 4y^2 - 9x^2 + 12xy - 4y^2 =$$

$$t-k + 2\sqrt{t-k^2} + t+k = 4k^2$$

$$x^2 - 6y$$

$$2\sqrt{t-k^2} = 2t - k^2$$

$$= \frac{-6x^2 - 8y^2 + 12xy}{x^2 - 6y} =$$

$$k^2 - k^2 = k^2 - 4k^2 + 4k^4$$

$$= \frac{-6x^2 - 8y^2 + 12xy}{x^2 - 6y} =$$

$$k(4k^3 - 1) = 4k^4 \quad k^2 = 0$$

$$2x - 0,5 = 0$$

$$t \geq k$$

$$4t - 1 = 4k^2$$

$$x = 0,25$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b: \begin{matrix} 11 & 11 \\ 3 & 7 \end{matrix}$$

$$b, c: \begin{matrix} 18 & 16 \\ 3 & 7 \end{matrix}$$

$$a, c: \begin{matrix} 21 & 38 \\ 3 & 7 \end{matrix}$$

$$p_a + p_b \geq 11$$

$$p_b + p_c \geq 18$$

$$p_a + p_c \geq 21$$

$$p_a + p_b + p_c \geq 50$$

$$2x^2 + x + 3$$

$$a + b \neq m; m$$

$$a^2 + 8ab + b^2; m$$

$$2x^2 - 3x + 4 \geq 0$$

$$2x^2 + x + 3 \geq 0$$

$$9 - 24 = -16 < 0$$

$$\begin{matrix} 2x^2 + x + 3 \\ - 2x^2 - 3x + 4 \\ \hline 4x - 1 \end{matrix}$$

$$\sqrt{t} + \sqrt{t + (4x - 1)} = 1 - 4x$$

$$t + t + 4x - 1 - 2\sqrt{t^2 + t(4x - 1)} = (4x - 1)^2$$

$$2t + (4x - 1)(4x - 2)$$

$$2x^2 - x + 3,5$$

$$+ 2x - 0,5$$

$$\sqrt{t + (2x - 0,5)} - \sqrt{t - (2x - 0,5)} = (2x - 0,5)$$

$$= 1 - 4x \quad / \cdot 12$$

$$t + t - 2\sqrt{t^2 - (2x - 0,5)^2} = (1 - 4x)^2$$

$$2t$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть p_a - степень вхождения 3 в a
 p_b - $a+b \div m$ 3 в b $(m, a) = k$
 p_c - $(a, b) = 1$ $m=1$ 3 в c $a \div k$
 q_a - $a \div b \div m$ $m=2$ 7 в a $a+b \div k \Rightarrow \div m$
 q_b - $a^2 - 8ab + b^2 \div m$ $m=5$ 7 в b $(m, a) = 1$
 q_c - $(a+b)^2 - 10ab$ $m=10$ 7 в c $(m, b) = 1$

Так как $ab \div 3^{11} 7^{11}$, $ab \div 3^{11} \Rightarrow p_a + p_b \geq 11$

Аналогично:

$$\begin{cases} p_a + p_b \geq 11 \\ p_b + p_c \geq 18 \\ p_c + p_a \geq 21 \end{cases}$$

$$2(p_a + p_b + p_c) \geq 50$$

$$p_a + p_b + p_c \geq 25$$

Аналогично:

$$\begin{cases} q_a + q_b \geq 11 \\ q_b + q_c \geq 16 \\ q_c + q_a \geq 38 \end{cases}$$

$$2(q_a + q_b + q_c) \geq 65$$

$$q_a + q_b + q_c \geq 32,5$$

Так как $q_a, q_b, q_c \in \mathbb{N}$,

$$q_a + q_b + q_c \geq 33$$

В abc 3 входит в
степени $p_a + p_b + p_c$, а 7 в
степени $q_a + q_b + q_c$

$$\left. \begin{aligned} abc &\div 3^{25} \\ abc &\div 7^{33} \end{aligned} \right\} abc \div 3^{25} \cdot 7^{33} \Rightarrow$$

$$\min abc = 3^{25} \cdot 7^{33}$$

Достигается при $a = 3^7$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x^2 - 4y^2 - 9x^2 + 12xy - 4y^2 = -6x^2 + 12xy - 8y^2 =$$

$$= -16x^2 - 16y^2$$

S - расстояние АВ

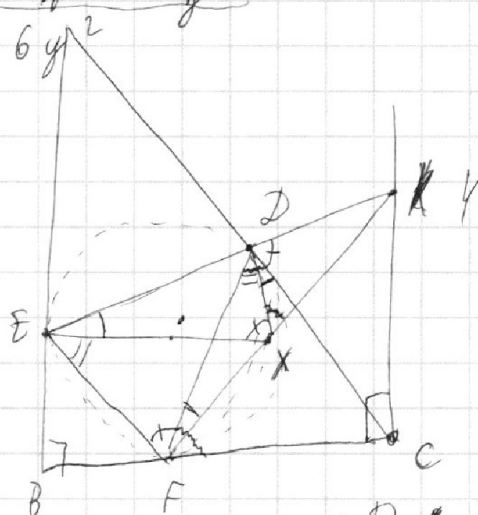
a - скорость велосипедиста

b - скорость мотоциклиста

$$\begin{cases} \frac{S}{a} = \frac{S}{b} + 2 \\ \frac{Sb}{a} = \frac{Sa}{b} + 96 \\ \frac{S}{a+b} = \frac{S}{b+b} + \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$1 \Rightarrow 2 \cdot S + 2b = \frac{Sa}{b} + 96$$

$$S \left(1 - \frac{a}{b}\right) = 96 - 2b$$

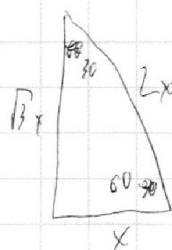


$$\angle DAE + \angle E = \angle X$$

$$\cdot \angle F$$

$$b = ka$$

$$k > 1$$

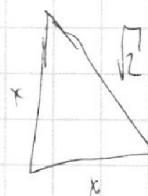


$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45 =$$

$$= \cos 45$$



$$\frac{S}{a} + k \frac{S}{b} = \frac{S}{ka} - \frac{S}{k} - \frac{S}{ka+b} =$$

$$kS = \frac{S}{k} + 96 \quad | \cdot k$$

$$k^2 S - 96k + S = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{3y + x}{xy} = \frac{2}{3x + 2y}$$

$$11xy + 3x^2 + 6y^2 = 2xy$$

$$3x^2 + 9xy + 6y^2 = 0$$

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$$

$$12xy = -(4x^2 + 8y^2)$$

$$3x^2 - 4y^2 - 2^2 = 3x^2 - 4y^2 - 9x^2 - 4y^2 + 12xy =$$

$$= -10x^2 - 16y^2$$

$$\frac{x^2 - 6y^2}{a} = \frac{5}{b} + 2$$

$$\frac{b^2 - a^2}{a+b} = \frac{5}{b} + 96$$

$$\frac{5}{a+b} = \frac{5}{b} + \frac{5}{4}$$

$$5 \frac{b-a}{ab} = 2$$

$$5(b-a) = 2ab$$

$$5(b^2 - a^2) = 96ab$$

$$a+b = 48$$

$$\frac{5}{a+b} = \frac{5}{54-a} + \frac{5}{4}$$

$$\frac{5}{a+b} = \frac{5}{54-a} + \frac{5}{4}$$

$$\frac{2548(24-a)}{ab} = \frac{25}{b} + 2$$

$$\frac{2548(24-a)}{ab} = 2$$

$$25(24-a) = 2ab$$

$$\frac{5}{a+b} = \frac{5}{54-a} + \frac{5}{4} \quad | \cdot 4(a+b)(54-a)$$

$$545 - a5 = a5 + 65 + \frac{5}{4}a^2 + 324 + 48a$$

$$5(48-2a) = -\frac{5}{4}a^2 + 48a - 324$$

$$\begin{array}{r} -\frac{5}{4}a^2 + 48a - 324 \\ -\frac{5}{4}a^2 + 30a \\ \hline 18a - 324 \end{array} \quad \begin{array}{r} -2a + 48 \\ +\frac{5}{8}a - 9 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ -54 \cdot 6 \\ \hline 4,2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 54 \\ -6 \\ \hline 324 \end{array}$$