



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 10

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем t могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на t ?

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

Докажем, что одно из чисел a, b, c имеет простое деление, отличное от 2 и 7. Тогда если мы разделим эти числа, то на числовые на деление это никак не повлияет, а произведение abc уменьшится. Тогда представим числа a, b, c в виде

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}, \quad \text{где } \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3 \in \mathbb{N}.$$

$$b = 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}, \quad ab = 2^{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2}, \quad \text{тогда } ab : 2^{15} \cdot 7^{11} \text{ можно делить}$$

$$c = 2^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3}, \quad \text{как } \alpha_1 + \alpha_2 \geq 15 \text{ и } \beta_1 + \beta_2 \geq 11.$$

П.О.,

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 15, & \beta_1 + \beta_2 \geq 11, \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 17, & \beta_2 + \beta_3 \geq 18, \\ \alpha_1 + \alpha_3 \geq 23, & \beta_1 + \beta_3 \geq 39, \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 39 \end{cases}$$

$$2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 55$$

Уг выше угле неравенств получаем,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 22,5$$

$$\text{т.н. } abc = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 28$$

$$\text{Пример: } a = 2^{14} \cdot 7^{20}, \quad b = 2^5 \cdot 7^0, \quad c = 2^{13} \cdot 7^{19}$$

$$abc = 2^{15} \cdot 7^{20} : 2^{15} \cdot 7^{11}; \quad abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

$$bc = 2^{18} \cdot 7^{19} : 2^{12} \cdot 7^{18};$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39} : 2^{23} \cdot 7^{39};$$

$$\text{Ответ: } 2^{28} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Сделан вывод

№2.

Если $\text{HCD}(x; y) = z$, то дробь $\frac{x}{y}$ сохраняется на z , а
если $\frac{x}{y}$ не сохраняется, то $\text{HCD}(x, y) = 1$.

Если $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} \text{HCD}(a+b; a^2+ab+b^2) = c$, то c - наибольшее
возможное число, на которое можно сократить дробь.

$$a^2 + b^2 - 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab - 2ab = (a+b)^2 - 9ab.$$

$\text{HCD}(a+b; (a+b)^2 - 9ab) = \text{HCD}(a+b; -9ab)$ по свойствам HCD.

$\text{HCD}(a+b; ab) = 1$, т.к. $\text{HCD}(a; b) = 1 \Rightarrow \text{ask} \quad \text{HCD}(a+b, b) = 1$
 $\text{HCD}(a+b, a) = 1$

Тогда $\text{HCD}(a+b; 9ab) \leq 9$. \Rightarrow дробь можно сократить на

$$m \leq 9.$$

Пример: $a = 4, b = 5$.

$$\frac{4+5}{4^2 - 3 \cdot 4 \cdot 5 + 5^2} = \frac{9}{76 + 25 - 140} = \frac{9}{41 - 140} = \frac{9}{-99}, \text{ сокращая на } 9.$$

Ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

Задача, что $3x^2 - 6x + 2 - (3x^2 + 3x + 1) = 7 - 9x$. Тогда

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 7 - 9x = (\sqrt{3x^2 - 6x + 2})^2 - (\sqrt{3x^2 + 3x + 1})^2. \text{ Если}$$

$$a = \sqrt{3x^2 - 6x + 2}, b = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}, \text{ то}$$

$$a - b = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

$$(a - b) / (a + b - 1) = 0 \Rightarrow 1) a - b = 0 \text{ или } 2) a + b - 1 = 0$$

$$1) a - b = 0 \Rightarrow 7 - 9x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{9}.$$

$$\sqrt{3 \cdot \frac{1}{9} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2} - \sqrt{3 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1} = \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 2} - \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 1} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{4}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} =$$

значит $x = \frac{1}{9}$ - корень уравнения

$$2) a + b - 1 = 0.$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 \quad (*)$$

$$(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})^2 = 1^2$$

$$3x^2 - 6x + 2 + 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)} + 3x^2 + 3x + 1 = 1$$

$$6x^2 - 3x + 2 = -2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)} \quad (**)$$

$$(6x^2 - 3x + 2)^2 = 4(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)$$

$$36x^4 - 18x^3 + 12x^2 - 18x^3 + 9x^2 - 6x + 12x^2 - 6x + 4 = 4(9x^4 - 18x^3 + 6x^2 + 9x^3 - 18x^2 + 6x + x^2 - 6x + 2)$$

$$36x^4 - 36x^3 + \cancel{12x^2} - 12x^4 = 36x^4 - 36x^3 - 36x^2 + 2$$

$$6x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 36 + 4 \cdot 89 = 36 + 276 = 312$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y_2 = \frac{6 - \sqrt{312}}{69} \quad (\sqrt{312} < 18)$$

$$x_3 = \frac{6 + \sqrt{312}}{69}$$

Запись членов, которые должны
выполняться для корней.

Всё первое, $3x^2 - 6x + 2 \geq 0$ и $3x^2 + 3x + 1 \geq 0$, т.к. берутся
под корнями не должны быть отрицательными

$$3x_2^2 - 6x_2 + 2 = 3 \cdot \frac{(6 - \sqrt{312})^2}{69^2} - 6 \cdot \frac{6 - \sqrt{312}}{69} + 2 \geq 0$$

$$3x_2^2 + 3x_2 + 1 = 3 \cdot \frac{(\sqrt{312} - 6)^2}{69^2} - 3 \cdot \frac{\sqrt{312} - 6}{69} + 1 \geq 0$$

$$12 \leq \sqrt{312} < 18, \quad 11 < \sqrt{312} - 6 < 12, \quad 33 \leq 3(\sqrt{312} - 6) < 36,$$

$$3 \cdot \frac{\sqrt{312} - 6}{69} < 1 \Rightarrow 1 + 3 \cdot \frac{\sqrt{312} - 6}{69} > 0 \Rightarrow 3x_2^2 + 3x_2 + 1 \geq 0;$$

$$3x_3^2 - 6x_3 + 2 = 3 \cdot \frac{(6 + \sqrt{312})^2}{69^2} + 2(-3 \cdot \frac{6 + \sqrt{312}}{69} + 1) =$$

$$= \frac{(6 + \sqrt{312})^2}{69 \cdot 23} - \frac{2 \cdot (6 + \sqrt{312})}{23} + 2 = \frac{36 + 312 + 12\sqrt{312} - 828 - 128\sqrt{312} + 312}{1582} =$$

$$= \frac{2594 - 196\sqrt{312}}{1582} > 0 \quad 2088 = 116 \cdot 18 > 116\sqrt{312}$$

$$3x_3^2 + 3x_3 + 1 = 3x_3^2 + 3 \cdot \frac{6 + \sqrt{312}}{69} + 1 > 0$$

Всё второе, где каждое уравнение в квадрате, поэтому
нужно проверить знаки двух сторон выражений.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

*). $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$ - где гасим баллы курса,

проверка искушна

**) $6x^2 - 3x + 2 = -2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)}$ - корень неотрицательный,

$6x^2 - 3x + 2 \leq 0$. Учтем, правая часть ≤ 0 ,

тогда и левое должно ≤ 0 .

$$6x_2^2 - 3x_2 + 2 = 6 \cdot \frac{(\sqrt{3x_2} - 6)^2}{69^2} - 3 \cdot \left(\frac{6 - \sqrt{3x_2}}{69} \right) + 2 > 0, \text{ значит, } x_2$$

$\sqrt{3x_2}$ $\sqrt{6 - \sqrt{3x_2}}$ $\sqrt{0}$
 0 0 0

исчезают корни.

$$6x_3^2 - 3x_3 + 2 = 6 \cdot \frac{(\sqrt{3x_3} + 6)^2}{69^2} - 3 \cdot \frac{(\sqrt{3x_3} + 6)}{69} + 2 = 2 \cdot \frac{(6x_3 + 6)^2}{69 \cdot 23} - 3 \cdot \frac{(\sqrt{3x_3} + 6)^2}{69}$$
$$= \frac{624 + 72\sqrt{3x_3} + 72 - 69\sqrt{3x_3} - 414 + 3144}{69 \cdot 23} = \frac{3452 - 57\sqrt{3x_3}}{69 \cdot 23} \quad \text{лв}$$

$$\frac{3452 - 57\sqrt{3x_3}}{69 \cdot 23} > 0 \Rightarrow x_3 \text{ не является корнем}$$
$$57\sqrt{272} < 57 \cdot 18 = 1026$$

Ответ: $\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6. (чертежи!!!)

$x^2 + y^2 - 1 = 0$ — окружность с центром $(0, 0)$ и радиусом 1,

$x^2 + y^2 - 1 < 0$, если $(x; y)$ внутри окружности, $x^2 + y^2 - 1 > 0$, если
на окружности, и $x^2 + y^2 - 1 > 0$, если вне окружности.

Аналогично $x^2 + (y-12)^2 - 16 = 0$ — окр. с центром $(0; 12)$ и радиусом

4. Эти две окружности не пересекаются. Возьмем

$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0$, если точка $(x; y)$ лежит

на одной из окружностей либо внутри обеих окружностей.

$ax + y - 8b = 0 \Rightarrow y = 8b - ax$ — прямая. Если у прямой и
округа есть 2 общие точки, то у них бесконечно много других
общих точек. Значит, прямая $y = 8b - ax$ должна касаться
одной окружности. Таких прямых

может быть всего 4, из которых есть

2 симметричные (справа влево, например)

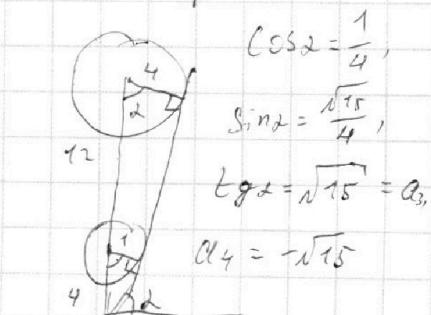
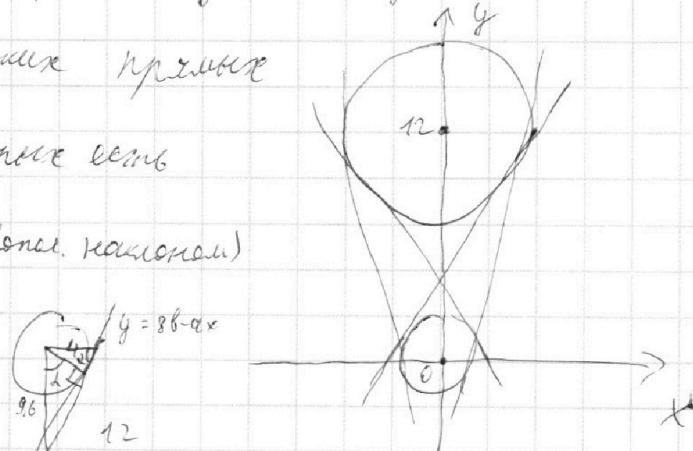
$$\cos \alpha = \frac{4}{9,6} = \frac{5}{12},$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \sqrt{\frac{144-25}{144}} = \frac{\sqrt{119}}{12}$$

$$a_1 = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{119}}{5}$$

$$a_2 = -\frac{\sqrt{119}}{5}$$

$$\text{Ответ: } \pm \frac{\sqrt{119}}{5}; \pm \sqrt{15}$$



$$\cos \alpha = \frac{1}{4},$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{15} = a_3,$$

$$a_4 = -\sqrt{15}$$

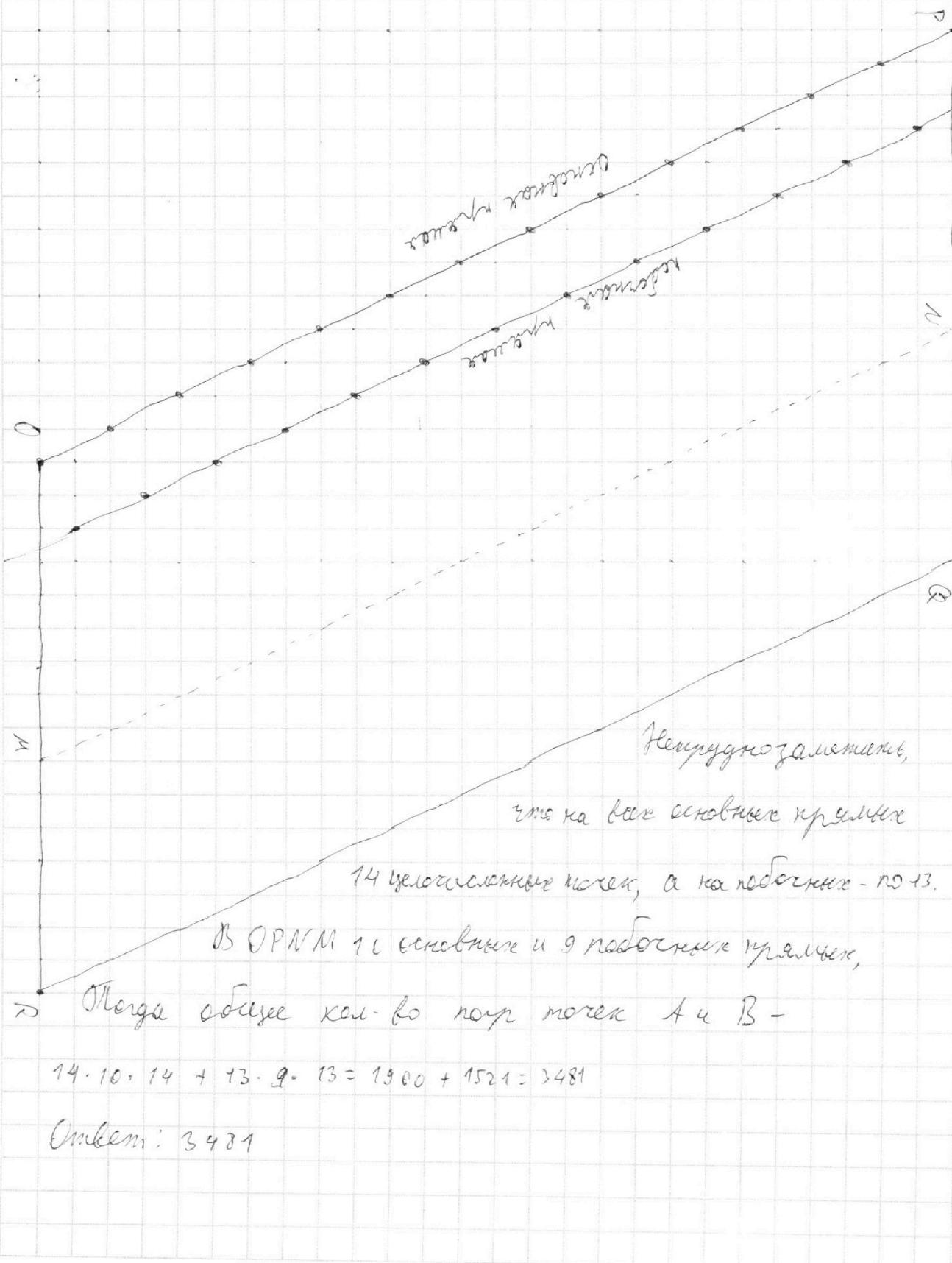
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

n5.

Заданы две точки $A(x_1; y_1)$. Нужна точка $B(x_2; y_2)$

составим уравнение $2x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + y_1$,

$y_2 = 14 + 2x_1 + y_1 - 2x_2$ — уравнение прямой с наклоном -2 .

Найдем на этой прямой точку с координатой y_1 .

$$y_1 = 14 + 2x_1 + y_1 - 2x_1$$

$2x_1 = 14 + 2x_1 \Rightarrow x_1 = 7$. Тогда вторая точка

$A(x_1; y_1)$ подходит точке B , некоторые лежат на прямой,

проходящей через точку $(x_1 + 7; y_1)$, и наклоном -2 .

Если мы построим параллограмм ОРQR (на эту сторону),
то заметим, что его боковые стороны имеют наклон -2 , а осто-

баки параллельны. Если мы выделим изобуба точку A в параллел-

ограмме ОРNM (NM на 7 клеток левее QR), то мы найдем

составим следующую об прямую точку B . После удаления,

что есть 2 вида прямых с наклоном -2 и различные начальные точки, то

„основное“, у которых есть общие точки на основании, и

„подобные“, у которых нет общих точек на основании. Точки

A , лежащих на основной прямой, составят прямую A на

другой основной прямой, аналогично следующему.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6

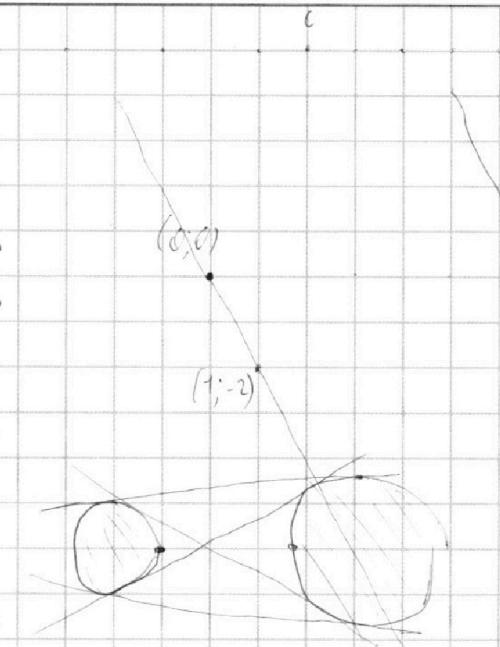
26

6

7

$$y = 8x - 2x^2$$

$$x^2 + y^2 - r^2 = 16 \quad \text{окружность } (0; 0) \text{ радиус } r$$



$$y_1 \approx y = -2x + 8$$

$$2x_1 + y_1 = 14 + 2x_1 + y_1$$

$$y_2 = 2(2+x_1) + y_1 - 2x_2$$

$$2x_2 + y_2 = 2(2+x_1) + y_1 - 2x_2$$

$$2x_2 = 2(2+x_1) + y_1$$

$$(0; 14+2x_1+y_1)$$

$$14+2x_1+y_1 = 14+2x_1+y_1$$

$$2x_1+y_1 = 2x_1+y_1$$

$$y_1 = 2x_1+y_1 - 2x_1$$

$$(3x^2 - 6x + 2) - (3x^2 + 3x + 4) = -9x + 1$$

$$(a-b) = ab - b^2$$

$$(a-b) = (a+b)(a-b)$$

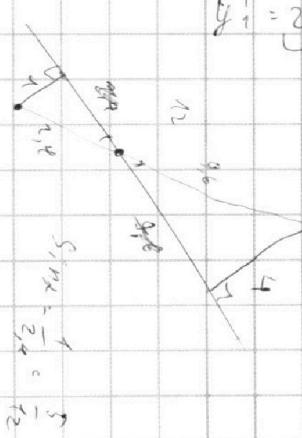
$$a-b=1$$

$$14 - 13 + 13^2 \cdot 9$$

14 - константа - 13
13 - переменная - 0

$$\sqrt{x} = 1 - \sqrt{y} + y$$

$$1521$$



$$\sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{4}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = k_1 \cdot 2^{15} \cdot 7^{\alpha}, \quad bc = k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{\beta}, \quad ac = k_3 \cdot 2^{23} \cdot 7^{\gamma}$$

$$abc \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 = k_1 k_2 k_3 \cdot 2^{55} \cdot 7^{18}$$

$$c^2 = \frac{(abc)^2}{(abc)} = \frac{k_1 k_2 k_3 \cdot 2^{55} \cdot 7^{18}}{k_1^2 \cdot 2^{20} \cdot 7^{22}} = \frac{k_2 k_3}{k_1} \cdot 2^{25} \cdot 7^{46}$$

$$2x_2 + y_2 = 76 + 2x_1 + y_1$$

$$a = 2^{\alpha} \cdot 7^{\beta}, \quad b = 2^{\gamma} \cdot 7^{\delta}, \quad c = 2^{\epsilon} \cdot 7^{\zeta}$$

$$y_2 = c - 2x_2$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 15$$

$$\alpha_1 \geq 15 - \alpha_2$$

$$\beta_1 + \beta_2 \geq 11$$

$$y_2 = 14 + 2x_1 + y_1 - 2x_2$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 \geq 12$$

$$\alpha_3 \geq 17 - \alpha_2$$

$$\beta_2 + \beta_3 \geq 18$$

$$y_2 = 2(7 + x_1) + y_1 - 2x_2$$

$$\alpha_3 + \alpha_1 \geq 23$$

Проверка

$$2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 55$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq \frac{55}{2} = 27,5$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 28$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 39 \\ \alpha_1 = 10, \quad \alpha_3 = 13, \quad \alpha_2 = 5 \end{array} \right.$$

$$y_2 = 7 + x_1$$

$$2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 68$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 34$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = 20, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 19 \end{array} \right.$$

$$12x_1 + 2x_2 = 32$$

$$12x_1 + 2x_2 = 7$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$\frac{(a+b)^2 - 9ab}{a+b}$$

$$\frac{(a+b)^2}{9ab} - \frac{9ab}{(a+b)}$$

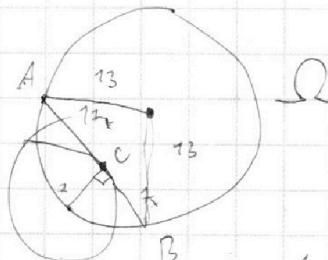
$$a = 2R \sin \frac{\pi}{2}, \quad \frac{a}{\sin \frac{\pi}{2}} = 2R, \quad \frac{a}{\sin \frac{\pi}{2}} = 2R \frac{a}{\sin \frac{\pi}{2}} = 2R$$

$$a + b = km$$

$$y_2 = 21 \cdot 7$$

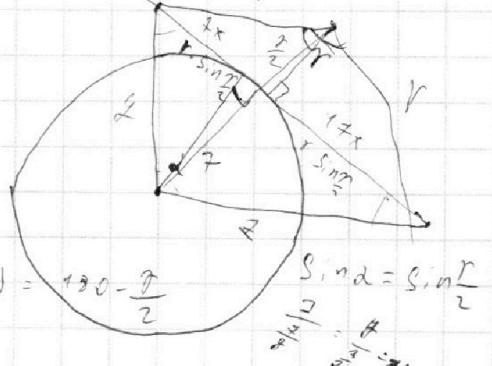
$$y_2 + S_{\text{нр}} = 2 \cdot 24x$$

$$26 = \frac{24x}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{42}{2}$$



$$w$$

$$\omega = \frac{1}{2}(360 - \theta) = 180 - \frac{\theta}{2}$$



$$S_{\text{нр}} = S_{\text{нр}} \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} = \omega$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

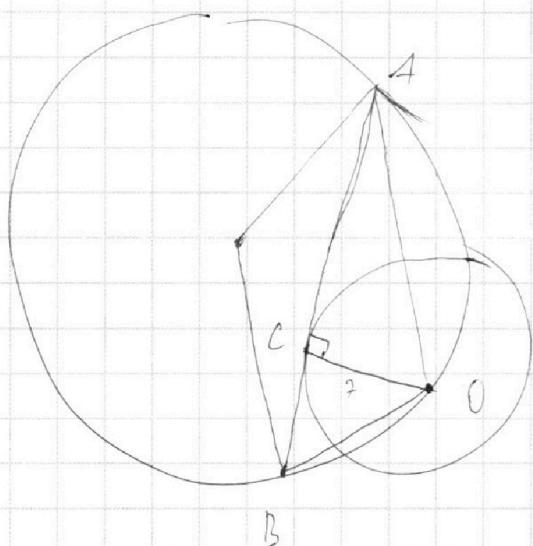
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



69
4

2+6

138

72

17

119

11

189

18

18

144

18

324

$$\frac{D}{4} = 9 - \delta = 4\sqrt{3}$$

$$D = 9 - 12$$

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

$$x^2 + x = \frac{1}{3}$$

$$69 \\ 6 \\ 4+4$$

$$y_2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$$

$$(x^2 + 0,5x)^2 + \dots$$

$$138 \\ 3 \\ 414$$

78

$$312 = 4 \cdot 78 = 4 \cdot 2 \cdot 39 = 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13$$

78

$$\frac{3 \cdot 12^2}{69^2} - 3 \cdot \frac{11}{69} + 1$$

$$\frac{3 \cdot 12^2}{69^2} - 3 \cdot \frac{12}{69} + 1$$

156

$$\frac{144}{22 \cdot 69} - \frac{11}{69} + 1$$

$$69 \\ 23 \\ 138 \\ 69 \\ 207$$

312

$$\frac{144 - 253}{23 \cdot 69} + 1$$

$$207 \\ 138 \\ 1581 \\ 928$$

69

12

138

69

828

828

2240

348

2594

$$116 \\ 18 \\ 7582 \\ 716 \\ 3174 \\ 2088$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

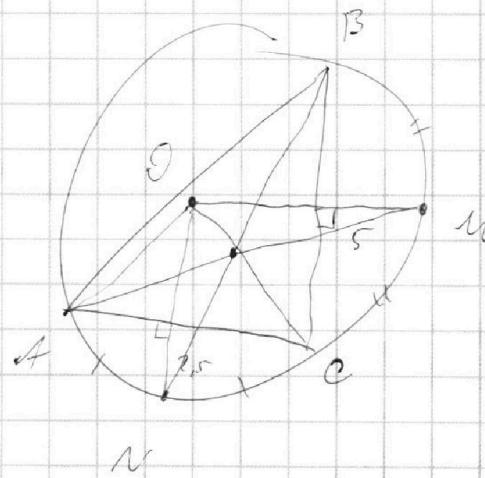
7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3974
414
2760
624
3380
72
3452

52.18
13
456
52
7028



$$2+6 - \frac{268}{262} \cdot 9 = 2 + \frac{60}{9+6} \cdot 9 - \frac{269}{2(9+8)} \cdot 9$$