



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\left. \begin{array}{l} ab: 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc: 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac: 2^{23} \cdot 7^{39} \end{array} \right\} \Rightarrow ab \geq 2^{15} \cdot 7^{11}; bc \geq 2^{17} \cdot 7^{18}; ac \geq 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\text{Пусть } ab = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot x; bc = 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot y; ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot z;$$

$$\text{где } (x; y; z) \in \mathbb{N}; (x; y; z) \geq 1$$

$$\text{Тогда, } a \cdot b \cdot b \cdot c \cdot a \cdot c = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot x \cdot y \cdot z \Rightarrow$$

$$a \cdot b \cdot c = 2^{27} \cdot 7^{34} \cdot \sqrt{2 \cdot x \cdot y \cdot z}$$

$$a \cdot b \cdot c - \text{минимально, при } \sqrt{2 \cdot x \cdot y \cdot z} - \text{минимальным,}$$

$$\text{а } \sqrt{2 \cdot x \cdot y \cdot z} - \text{минимально при } x=1; y=1; z=1, \text{ т.к.}$$

$$x \geq 1; y \geq 1; z \geq 1 \Rightarrow$$

$$\min a \cdot b \cdot c = 2^{27} \cdot 7^{34} \cdot \sqrt{2}$$

$$\text{Ответ: } 2^{27} \cdot 7^{34} \cdot \sqrt{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~2

$$\frac{a}{b} - \text{несократима} \Rightarrow \text{НОД}(a; b) = 1; \text{НОК}(a; b) = a \cdot b$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} \text{ - найти max } m, \text{ при котором:}$$

$$(a+b) \bmod m = 0 \quad ((a+b) : m)$$

$$\frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-9ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} \quad a^2-7ab+b^2 \bmod m = 0 \quad ((a^2-7ab+b^2) : m)$$

Физически эту дробь можно сократить на m , где $a+b \geq m \geq -(a+b)$, т.к. после сокращения и числитель, и знаменатель должны остаться целыми числами. нас интересует макс. m , поэтому будем проверять, удастся ли найти такой случай, что $m = a+b$.

Дробь $\frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$ можно сократить на $(m = a+b)$ при $9ab : (a+b)$ или же $(a+b) : 9ab$, т.е. $(a+b) : 9$, а таких чисел

очень много: пример: $2; 7 : \frac{2+7}{2^2-7 \cdot 2 \cdot 7+49} = \frac{9:9}{-45:9}$ или же

$$4; 5 : \frac{4+5}{4^2-7 \cdot 4 \cdot 5+5^2} = \frac{9:9}{-99:9} \text{ } \rightarrow \text{ а значит макс. возможное}$$

m - достигнуто и равно $a+b$, ну а в общем случае, $m=1$

Ответ: при $m = a+b$ (при $(a+b) : 9$)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



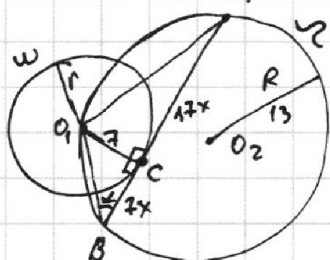
~ 3

$$AC:CB = 17:7$$

$$r = 7$$

$$R = 13$$

AB-?



Решение:

1) $O_1C \perp AB$; т.к. O_1C - радиус; AB - касат.

2) Пусть x - коэффициент пропорциональности, тогда

$$AC = 17x; AB = 7x$$

3) $O_1C = 7; BC = 7x \Rightarrow$ по т. Пиф.: $O_1B = 7\sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

4) $\triangle O_1BA$ - вписан в $\odot \Rightarrow$ по т. син.: $\frac{AO_1}{\sin \alpha} = 2R$

$$AO_1 = \sqrt{7^2 + 17^2 x^2} - \text{по т. Пиф.}; AO_1 = \sqrt{49 + 289x^2}$$

$$\text{По т. син.: } \frac{\sqrt{49 + 289x^2}}{\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}} = 2 \cdot 13 \Rightarrow \sqrt{49 + 289x^2} \cdot \sqrt{x^2 + 1} = 26$$

$$\sqrt{289x^4 + 338x^2 + 49} = 26$$

пачный квадрат

$$(17x^2 + 7)^2 = 289x^4 + 338x^2 + 49 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |17x^2 + 7| = 26 \Rightarrow 17x^2 + 7 = 26 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 17x^2 = 19 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{19}{17}}$$

$$AB = 17x + 7x = 24x = 24\sqrt{\frac{19}{17}}$$

$$\text{Ответ: } 24\sqrt{\frac{19}{17}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~4

сопряженное

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x \quad | \cdot (\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$3x^2-6x+2 - 3x^2-3x-1 = (1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$(-9x+1) = (1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$\left[x = \frac{1}{9} \text{ (A)} \right] \text{ — или это}$$

$$\left[\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1 \text{ (B)} \right] \text{ — или это}$$

$$(B) \quad 6x^2+3x+3+2\sqrt{3x^2-6x+2}\sqrt{3x^2+3x+1}=1$$

$$6x^2-3x+2+2\sqrt{9x^4-9x^2-9x^2+2}=0$$

$$2\sqrt{9x^4-9x^2-9x^2+2} = -6x^2+3x-2$$

$$D = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = -39$$

$$D < 0; a(1-4) < 0 \Rightarrow$$

$$\text{при любых } x: -6x^2+3x-2 < 0$$

$$\Rightarrow \text{при любых } x: 2\sqrt{9x^4-9x^2-9x^2+2} < 0, \text{ а такого}$$

$$\text{быть не может, т.к. } \sqrt{a} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{вариант (B) — не подходит} \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

Ответ: $\frac{1}{9}$.



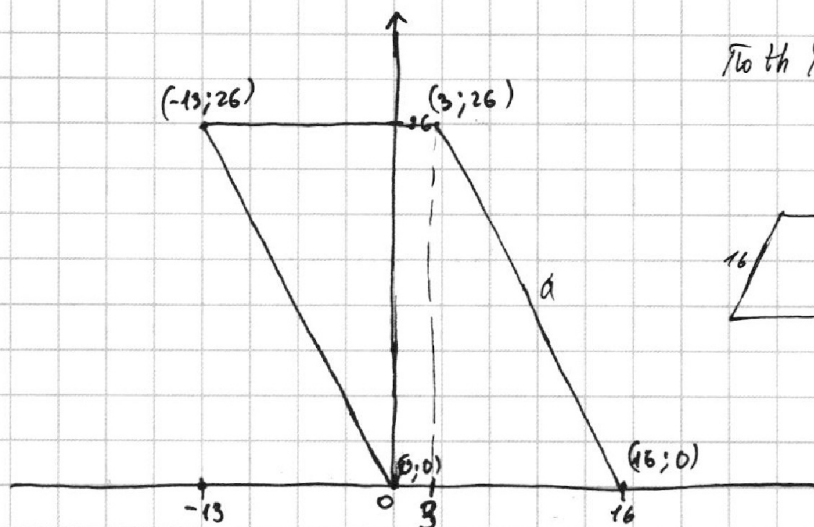
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

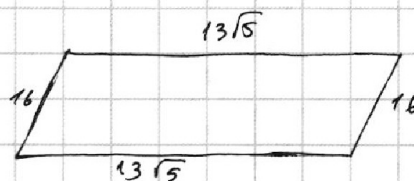
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{По теореме Пифагора: } \sqrt{13^2 + 26^2} = a$$

$$a = \sqrt{13^2 + 4 \cdot 13^2} = 13\sqrt{5}$$



$$(2x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14 \quad A$$

Для решения необходимо посчитать все ~~возможные~~ точки с
целыми координатами в этой параллели (K); посчитать
все-возможные точки, являющиеся решениями ур-ня A ~~(A)~~ и при этом
в этой параллели. Таких, что $0 \leq y_1, y_2 \leq 26$; $0 \leq x_1, x_2 \leq 16$ (M)

$$\text{и воспользоваться формулой } C = \frac{K!}{(K-M)! \cdot M! \cdot 2!}$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~6

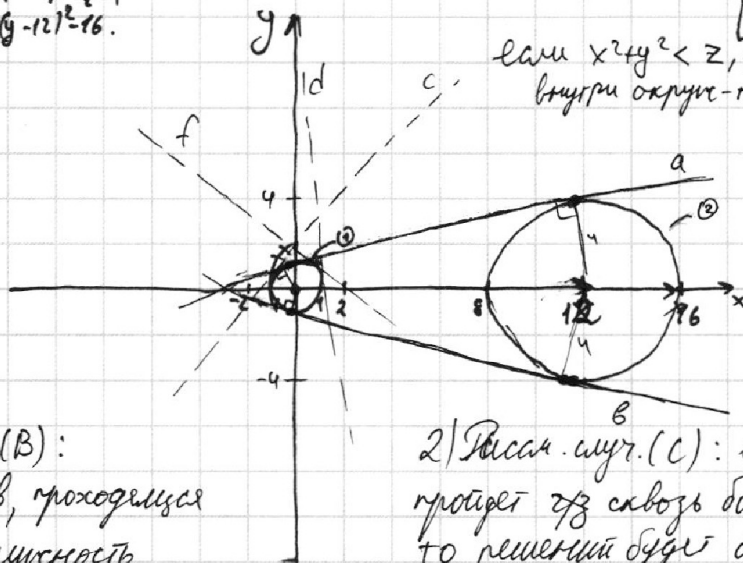
$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \quad (A) \end{cases}$$

$$x^2+y^2=1; x^2+(y-12)^2=16.$$

ур-ия окруж-ти

$$ax+y=8b$$

$$y=-a \cdot x+8b$$



(A) выполняется, если:

$$\begin{cases} x^2+y^2-1 < 0 \\ x^2+(y-12)^2-16 > 0 \\ x^2+y^2-1 > 0 \\ x^2+(y-12)^2-16 < 0 \\ x^2+y^2-1 = 0 \\ x^2+(y-12)^2-16 = 0 \end{cases} \begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ x^2+(y-12)^2 > 16 \quad (B) \\ x^2+y^2 \geq 1 \\ x^2+(y-12)^2 \leq 16 \quad (C) \\ x^2+y^2 = 1 \quad (D) \\ x^2+(y-12)^2 = 16 \quad (E) \end{cases}$$

если $x^2+y^2 < 1$, то все решения - внутри окруж-ти, если $x^2+y^2 > 1$, то все реш. вне окр.

1) Рассм. случай (B):

прямая $y=-ax+8b$, проходящая
сквозь малую окружность
будет иметь бесконечно
много решений, а если
проходить сквозь нее не будет,
то решений будет 0.

2) Рассм. случай (C): если прямая
пройдет скз большую окр-ть,
то решений будет бесконечно много
в противном случае, их будет 0.

3) Рассм. случай (D): $x^2+y^2=1$

$$\text{при } x^2+(y-12)^2 < 16 \text{ или } x^2+(y-12)^2 > 16$$

система ^{не} будет иметь решений, т.к. области
значений ур-ий 2-х окр. не будут
пересекаться

4) Рассм. случай (E): $x^2+(y-12)^2=16$

при $x^2+y^2 < 1$, система
решений иметь не будет.

значит, нам интересны только случаи: 1) $x^2+y^2=1; x^2+(y-12)^2 > 16$.

5) Рассм. 1-ый случай: ~~прямая решен~~

2) $x^2+(y-12)^2=16; x^2+y^2 > 1$.

искомые прямые - все прямые, касат. к. малой (с; d; f; u; g)
окружности, кроме тех, что проходят скз большую окружность

Прямые a и b - касат. к. большой окр-ти - крайний случай.

Подставим значения x и y в ур-ие прямой: a.

Для случая 2 прямые a и b - тоже кр. погранич. случаи.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



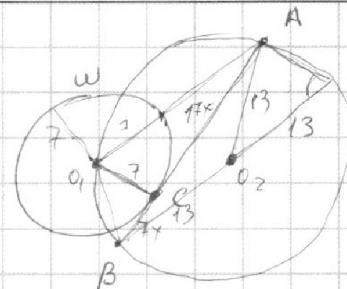
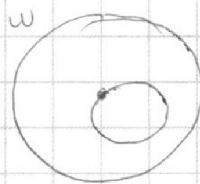
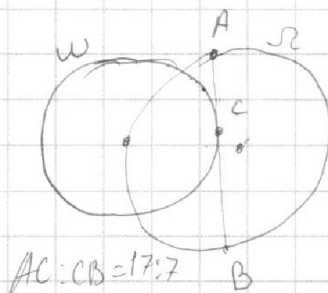
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

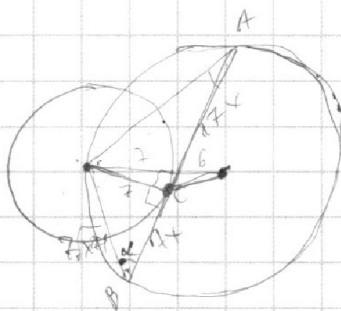
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AC:CB=17:7$



$$\sqrt{49+289x^2}$$

$$119x^2=7$$

$$x^2 = \sqrt{\frac{7}{119}} = \sqrt{\frac{1}{17}}$$

$$\sqrt{49x^2+49} = 2\sqrt{x^2+1}$$

$$(7\sqrt{x^2+1})$$

$$\operatorname{tg} \angle = \frac{1}{x}$$

$$\cos \angle =$$

$$\operatorname{tg}^2 \angle + 1 = \frac{1}{\cos^2 \angle}$$

$$\frac{1}{x^2} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \angle} \Rightarrow \frac{x^2+1}{x^2} = \frac{1}{\cos^2 \angle} \Rightarrow \cos \angle = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

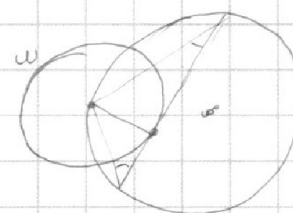
$$\frac{\sqrt{49+289x^2} \cdot \sqrt{x^2+1}}{1} = 26$$

$$(49+289x^2)(x^2+1) =$$

$$49x^2 + 49 + 289x^4 + 289x^2 = 676$$

$$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0$$

$$3x^4 - 6x^2 + 12 - 3x^3 - 3x - 1 = (x^2 - 9x) \left(\sqrt{3x^2+6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} \right) (-9x+1)$$



$$\begin{array}{r} 3 \\ 26 \\ \times 26 \\ 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$17x^2+7^2$$

$$\cos$$

$$576x^2 = 49+289x^2 + 49x^2+49-$$

$$576x^2 - 338x^2 = 96 - 2\sqrt{(x^2+1)(49+289x^2)} \cdot \cos \angle$$

$$238x^2 = 96 - 2\sqrt{289x^4+338x^2+49} \cdot \cos \angle$$

$$119x^2 = 49 - \cos \angle \cdot \sqrt{289x^4+338x^2+49}$$



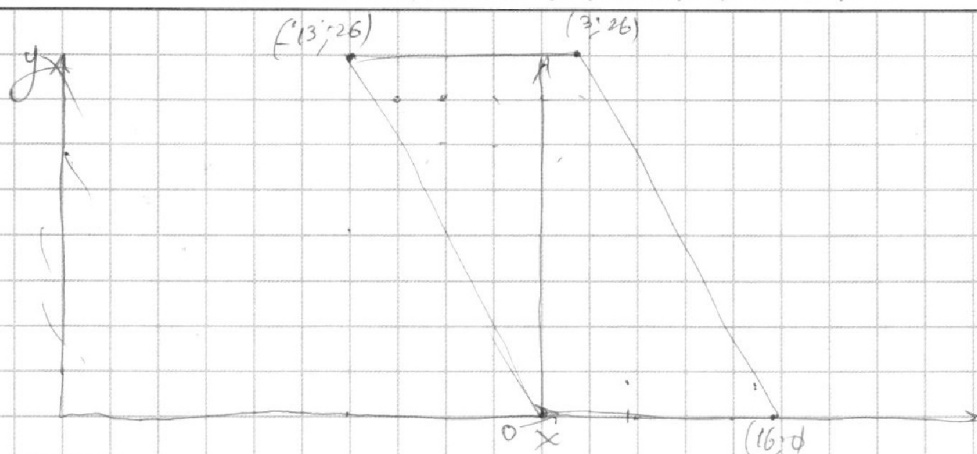
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$(x_1, y_1); (x_2, y_2)$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

$$2(16 - 7) + (4 - 26) = 14$$

$$x_{\max} = 16$$

$$y_{\max} = 26$$

$$x_{\min} = -13$$

$$y_{\min} = 0$$

$$(7; 6); (15; 4)$$

$$2(16 - 13) + (8 - 4) = 14$$

$$(13; 4); (16; 8)$$

$$3x^2 = 6$$

$$x = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$$

$$ax + y - 8b = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 0 \\ x^2 + y^2 = 0 \\ x^2 + (y - 12)^2 = 0 \end{cases}$$

$$y = Kx + b$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 2x$$

$$3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 = 8(1 - 2x)^2$$

$$7.5x^2 - 15x - 2 = \sqrt{64 - 64x + 32x^2} = \sqrt{64(1 - x + 0.5x^2)} = 8\sqrt{1 - x + 0.5x^2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$abc$$

$$\begin{cases} ab \div 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot x \\ bc \div 2^{17} \cdot 7^{16} \cdot y \\ ac \div 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot z \end{cases}$$

$$\frac{c}{a} \div 2^2 \cdot 7^7$$

$$64 \mid a; 2^5$$

$$\frac{a}{b} \div 2^6 \cdot 7^{11}$$

$$108 \mid b; 3^3 \cdot 2$$

$$ab \cdot bc \cdot ac \div 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$\frac{b}{a} \div \frac{3^3}{2^4} = \frac{108}{64} = \frac{27}{16}$$

$$\frac{c}{b} \div 2^2 \cdot 7^7$$

$$ab \cdot x = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot x$$

$$bc \div 2^{17} \cdot 7^{16} \cdot y$$

$$ac \div 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot z$$

$$(a+b+c)^2 =$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc$$

$$a+b$$

$$a^2 - 7ab + b^2$$

$$D = 49b^2 - 4b^2 = 45b^2$$

$$a_{1,2} = \frac{7b \pm b\sqrt{45}}{2} = \frac{7b \pm 3\sqrt{5}b}{2}$$

$$\frac{a+b}{(a - \frac{7b+3\sqrt{5}b}{2}) / (a - \frac{7b-3\sqrt{5}b}{2})}$$

$$\frac{c}{a} = 2^2 \cdot 7^7 \cdot \frac{y}{x}$$

$$\frac{a}{b} = 2^6 \cdot 7^{11} \cdot \frac{z}{y}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 18x$$

$$6x^2 - 3x + 3 - 2\sqrt{9x^4 + 9x^3 + 9x^2 + 2} = 1 - 18x$$

$$6x^2 - 3x + 3 - 2\sqrt{9x^4 + 9x^3 + 9x^2 + 2} = 1 - 18x$$

$$-2\sqrt{9(x^4 - x^2x^2) + 2} = 75x^2 - 15x - 2$$

$$-4(9x^4 - 9x^2 \cdot 9x^2 + 2) = 75^2 x^4 + 225x^2 + 4 - 30 \cdot 75x^3 - 4 \cdot 75x^2 + 30 \cdot 2x$$

$$-36x^4 + 36x^3 + 36x^2 - 8 = 5625x^4 + 225x^2 - 2250x^3 - 300x^2 + 60x$$

$$5661x^4 + 189x^2 - 2286x^3 - 300x^2 + 60x + 8 = 0$$

$$5661x^4 - 111x^2 - 2286x^3 + 60x + 8$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a \cdot b = 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$b \cdot c = 2^{47} \cdot 7^{18}$$

$$a \cdot c = 2^{23} \cdot 7^{29}$$

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$a b c = 2^{27} \cdot 7^{34}$$

$$\frac{c}{a} = 2^2 \cdot 7^7$$

НОК. НОД

$$\frac{2+7}{4+49-7 \cdot 2 \cdot 7} a = 1$$

$$= \frac{9}{53-98} = \frac{9}{-45} \quad b = 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$c = 2^{23} \cdot 7^{29}$$

$$a \cdot b \cdot c = 2^{38}$$

$$a^2 + b^2 < > 7ab$$

$$\frac{a}{b} = 2^6 \cdot 7^{11}$$

$$\frac{a}{b} = 2^8 \cdot 7^{18}$$

$$a^2 + b^2 - 7ab < > 0$$

$$(a+b)^2 - 2ab - 7abc > 0$$

$$(a+b)^2 - 9ab < > 0$$

$$\text{НОД}(ab; bc; ac) = 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$\text{НОК. НОД} = (abc)^2$$

$$\text{НОК}(ab; bc; ac) = 2^{23} \cdot 7^{29}$$

$$2^{38} \cdot 7^{50} = (abc)^2$$

$$3; 18; 8$$

$$\text{НОД}(3; 18; 8) = 1$$

$$\text{НОК}(3; 18; 8) = 72$$

$$10000 + 40000$$

$$7 \cdot 100 \cdot 200 = 140000$$

$$\frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}$$

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b}$$

$$a+b < > 3\sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{3} < > \sqrt{ab}$$

$$\frac{6}{7}$$

$$a(a-35b) + b(b-35a)$$

$$\frac{90}{81+100-70 \cdot 9}$$

$$4; 5$$

$$(a+b) : m$$

$$a^2 - 7ab + b^2 : m$$

$$a+b : m$$

$$\frac{90}{181-639}$$

$$36+169=205$$

$$\frac{9}{16+25-7 \cdot 20}$$

$$= \frac{9}{-99}$$

$$\frac{2}{3}$$

$$16+25=41$$

$$42-7$$

$$\frac{3}{4+9-7 \cdot 6} = \frac{5}{-29}$$

$$\frac{13}{36+49-6 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{13}{85-294} = \frac{13}{-209}$$