



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

Пусть $a = k \cdot 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$, $b = m \cdot 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$, $c = n \cdot 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$
 $(k, m, n \in \mathbb{N}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \geq 0)$. Тогда

$$\begin{aligned} ab &= km \cdot 2^{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot 3^{\beta_1 + \beta_2} \cdot 5^{\gamma_1 + \gamma_2} \\ bc &= mn \cdot 2^{\alpha_2 + \alpha_3} \cdot 3^{\beta_2 + \beta_3} \cdot 5^{\gamma_2 + \gamma_3} \\ ac &= kn \cdot 2^{\alpha_1 + \alpha_3} \cdot 3^{\beta_1 + \beta_3} \cdot 5^{\gamma_1 + \gamma_3} \end{aligned}$$

*[⊗] числа k, m, n не делятся на $2, 3, 5$; $\alpha_1, \dots, \gamma_3 \in \mathbb{Z}$

Тогда из условия кратности:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 8 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 12 \\ \alpha_3 + \alpha_1 \geq 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 34 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 17 \end{cases} \Rightarrow \text{мин. степень } 2 \text{ в пр-ии } abc - 17.$$

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 \geq 14 \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 20 \\ \beta_3 + \beta_1 \geq 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 55 \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq \frac{55}{2} \geq 27 \end{cases} \Rightarrow \text{мин степень } 3 \text{ в } abc - 28.$$

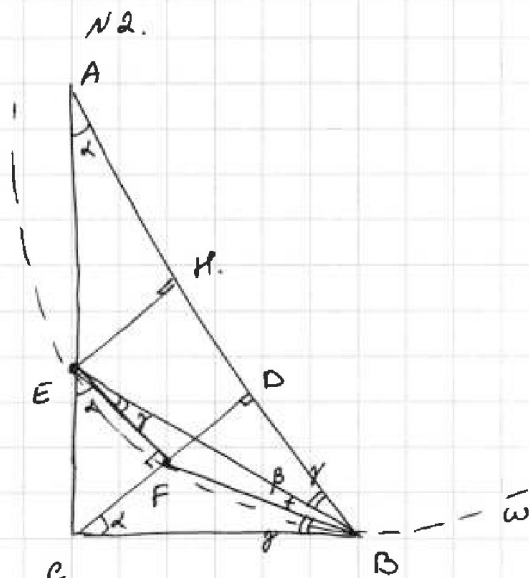
$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 \geq 12 \\ \gamma_2 + \gamma_3 \geq 17 \\ \gamma_3 + \gamma_1 \geq 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \geq 68 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 34, \text{ но т.к. } \gamma_1 + \gamma_3 \geq 39 \\ \text{и } \gamma_2 \geq 0, \text{ то } \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 39, \text{ мин степень } 5 \text{ в } abc - 39. \end{cases}$$

Тогда минимальное значение $abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$
 (это возможно при $a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{19}$, $b = 2^4 \cdot 3^7$, $c = 2^{10} \cdot 3^{14} \cdot 5^{20}$)

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порядк QR-кода не допускается!



Пусть $\angle BAC = \alpha$;
 $\angle EBF = \beta$, $\angle FBC = \angle FEB = \gamma$
 ($\angle FEB$ в окр-ти ω -
 вписанный, опирающийся
 на дугу $\widehat{BF}$; $\angle FBC$ -
 угол между касательной и
 хордой BF , стягивающей
 дугу $\widehat{BF} \Rightarrow \angle FBC = \frac{\widehat{BF}}{2} = \angle FEB$).

П.к. $EF \parallel AB$, то $EF \perp ED$;
 $\angle CEF = \angle CAD = \alpha$

В прямоугольном CEB $\alpha + \beta + 2\gamma = 90^\circ \Rightarrow 90^\circ - \alpha = \beta + 2\gamma =$
 $= \angle ABC \Rightarrow \angle ADE = 180^\circ - \beta + 2\gamma - (\beta + \gamma) = \gamma$.

Кроме того, $ED \perp AB \Rightarrow \angle DEB = \alpha$. Тогда
 $\triangle AEB \sim \triangle CEB$ по 2-м углам ($\angle BAE = \angle ECB = \alpha$;
 $\angle ABE = \angle CBE = \gamma$). Тогда $\frac{BE}{AB} = \frac{CE}{AE} = \sin \alpha$.

Пусть $EH \perp AB$. Тогда $EHDF$ - прим-к $\Rightarrow EH = FD$;
 $\sin \alpha = \frac{EH}{AE} = \frac{DF}{AE} = \frac{CF}{AE} \Rightarrow DF = CF \Rightarrow F$ - середина

высоты ED . П.к. $EF \parallel AB$, то $\triangle CEF \sim \triangle CAD$ с
 коэффициентом подобия $k = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{CAD}} = \frac{1}{4}$.

У $\triangle CAD$ и EBD общая высота $ED \Rightarrow \frac{S_{CAD}}{S_{EBD}} = \frac{AD}{BD} = \frac{5}{2}$;
 $S_{CAD} + S_{EBD} = S_{ABE}$

$\frac{S_{CAD}}{S_{ABE}} = \frac{5}{7}$, тогда $S_{CAD} = \frac{5}{7} S_{ABE}$; $S_{CEF} = \frac{1}{4} S_{CAD} =$
 $= \frac{5}{28} S_{ABE} \Rightarrow \frac{S_{ABE}}{S_{CEF}} = \frac{28}{5}$

Ответ: $\frac{28}{5}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N3.

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x \Leftrightarrow \arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right) = \cos x & (1) \\ -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2} & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (2): \quad & -5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi \\ & -6\pi \leq -2x \leq 4\pi \\ & -4\pi \leq 2x \leq 6\pi \\ & -2\pi \leq x \leq 3\pi \quad (*) \end{aligned}$$

$$(2): \quad \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right) = \cos x$$

$$\cos x - \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi - 2x}{5}\right) \cos\left(\frac{3\pi - 6x}{10}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi - 2x}{5}\right) = 0 & (3) \\ \cos\left(\frac{3\pi - 6x}{10}\right) = 0 & (4) \end{cases}$$

$$(3): \quad \sin\left(\frac{\pi - 2x}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi - 2x}{5} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi - 2x = 5\pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi - 5\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

С учётом (*) получаем $x = \frac{\pi}{2} (k=0), x = 3\pi (k=-1),$
 $x = -2\pi (k=1)$

$$(4): \quad \cos\left(\frac{3\pi - 6x}{10}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{3\pi - 6x}{10} = \frac{\pi}{2} + \pi h, h \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\pi - 6x = 5\pi + 10\pi h, h \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 6x = -2\pi - 10\pi h, h \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi + 5\pi h}{3}, h \in \mathbb{Z}$$

Условия (*) удовлетворяют $x = -\frac{\pi}{3}$ (или $h=0$),
 $x = -2\pi (h=1), x = \frac{4\pi}{3} (h=-1), x = 3\pi (h=-2)$

Ответ: $-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi.$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4.

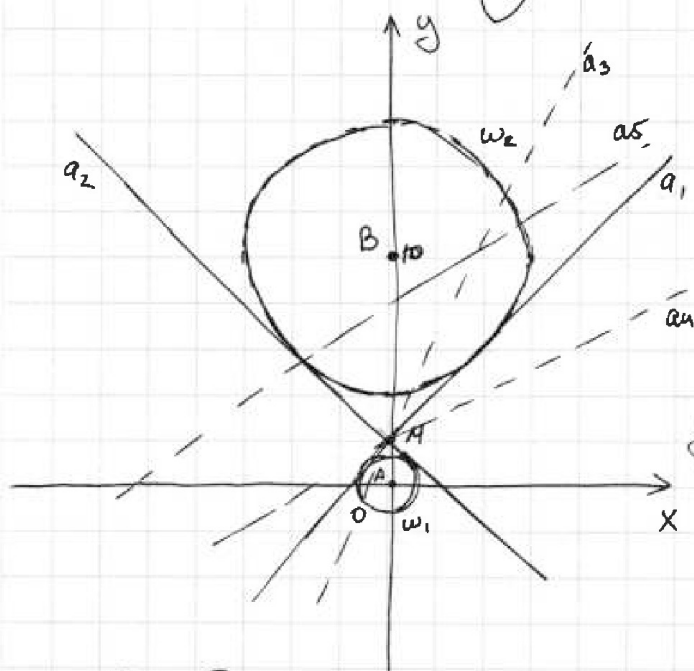
$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 & (2) \end{cases}$$

Ур-е (2) системы равносильно $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 20y + 64 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & (3) \\ x^2 + (y - 10)^2 = 36 & (4) \end{cases}$$

Ур-е (3) задаёт на координатной пл-ти окр-ть ω_1 с центром $A(0; 0)$ и радиусом $R_A = 1$; ур-е (4) - окр-ть ω_2 с центром $B(0; 10)$ и радиусом $R_B = 6$.

Ур-е (1) $\Leftrightarrow 3y = ax + 4b \Leftrightarrow y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$ - на координатной пл-ти прямая. Чтобы исходная система имела ровно 4 решения, эта прямая должна пересекать каждую из окр-тей ровно 2 раза.



В прямую $y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$ a отвечает за угловой коэффициент ($\frac{a}{3}$ - тангенс угла наклона прямой), b - за смещение вдоль оси ОУ. Пусть прямые a_1 и a_2 - общие касательные к ω_1 и ω_2 . Из симметрии $a_2 = -a_1$. Для прямой $y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$ найдётся коэффициент b такой, что она пересечёт ω_1 и ω_2 по 2 раза каждую, при $a \in (a_1; a_2)$,

Пусть M - точка пересечения "крайних" прямой a_1 и $a_2 = -a_1$ (из симметрии M лежит на ОУ). Тогда при $a \in (a_1; a_2)$ прямая $y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$, проведённая из M , пересечёт каждую из 2-х окр-тей 2 раза; при $a \leq a_1$ или $a \geq a_2$ прямая, проведённая из M , пересечёт либо обе окр-ти по 1 разу (при a_1 и a_2) (см. на след. стр.)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

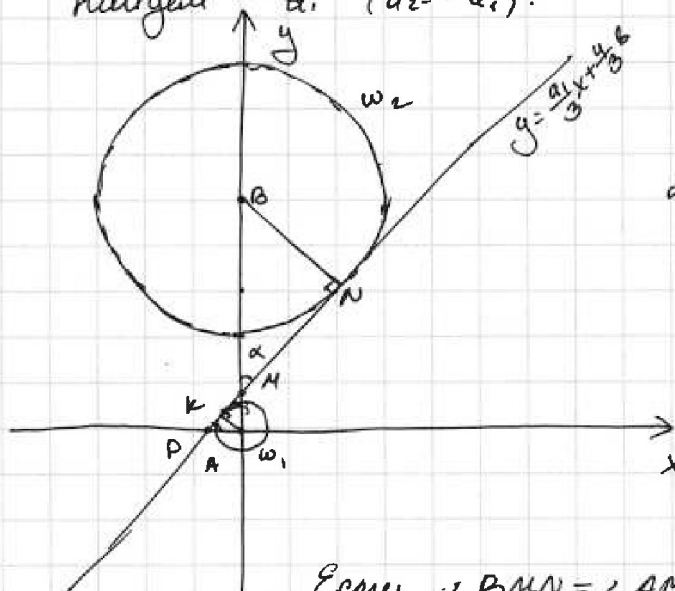
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



14 (продолжение) (а. на рисунке)
либо на одну из осей и при движении вверх/вниз
вдоль оси Ox (а. на рисунке) пересекёт не более 1-ой
окр-ти в одной или 2-х точках.

Найдём a_1 ($a_2 = -a_1$):



Пусть прямая касается
 ω_1 в т. K , ω_2 в т. N .
Тогда $\triangle MBN \sim \triangle MAK$
($\angle BMN = \angle AMK$ как
вертикальные, $\angle MNB =$
 $= \angle MKA = 90^\circ$).

$$AK = 1, BN = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{AK}{BN} = \frac{1}{6};$$

$$AB = 10 \Rightarrow AM = \frac{10}{7}, \text{ тогда } BM = \frac{60}{7}.$$

Если $\angle BMN = \angle AMK = \alpha$, то в $\triangle MAP$
(P - точка пересечения прямой и Ox) $\angle MPA = 90^\circ - \alpha = \beta \Rightarrow$
 $\Rightarrow \tan \beta = \frac{a_1}{3} = \tan \alpha. \sin \alpha = \frac{BN}{BM} = \frac{6}{\frac{60}{7}} = \frac{7}{10}. \cos \alpha$ (т.к. $\alpha < 90^\circ$)
 $= \sqrt{1 - \frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10}; \tan \alpha = \frac{a_1}{3} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{\sqrt{51}}{10}} = \frac{7}{\sqrt{51}}. \text{ Тогда}$
 $a_1 = 3 \tan \alpha = \frac{3\sqrt{51}}{7}$

Ответ: $(\frac{3\sqrt{51}}{7}; -\frac{3\sqrt{51}}{7})$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5.

Заметим, что, т.к. есть слагаемые $\log_5^4(2x)$, $3\log_{2x}5$, $\log_5^4 y$, $4\log_y 5$, то $2x > 0$ и $2x \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$ и $y > 0$ и $y \neq 1$ (заметим, что при таких знаках-ях x и y $\log_5^4(2x) \neq 0$ и $\log_5^4 y \neq 0$).

При этих ограничениях для x и y пусть

$$\log_5 2x = u \neq 0; \log_5 y = v \neq 0. \text{ Тогда:}$$

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 - \log_{2x} 5 + 3 = 0$$

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 - \frac{4}{3}\log_{2x} 5 + 3 = 0 \quad \text{— приклад вет}$$

$$u^4 - \frac{3}{u} - \frac{4}{3u} + 3 = 0 \quad | \cdot 3u \neq 0$$

$$3u^5 - 9 - 4 + 9u = 0$$

$$3u^5 - 13 + 9u = 0 \quad (1) \Rightarrow 3u^5 + 9u = 13$$

$$\log_5^4 y + 4\log_y 5 - \log_{30,2} 5 + 3 = 0$$

$$\log_5^4 y + 4\log_y 5 + \frac{1}{3}\log_y 5 + 3 = 0 \quad (7\text{-к. } \log_y 30,2 = \frac{1}{3})$$

$$= \log_5^4 \frac{1}{5} = \frac{1}{3}\log_y 5, \text{ или } v^4 + \frac{4}{v} + \frac{1}{3v} + 3 = 0 \quad | \cdot 3v \neq 0$$

$$3v^5 + 12v + 1 + 9v = 0$$

$$3v^5 + 13 + 9v = 0 \quad (2) \Rightarrow 3(-v)^5 + 9 \cdot (-v) = 13$$

$$(1) + (2): 3u^5 + 9u + 3v^5 + 9v = 0 \Rightarrow 3(u^5 + 3u + v^5 + 3v) = 0 \Rightarrow u^5 + 3u + v^5 + 3v = 0 \Rightarrow u^5 + 3u = (-v)^5 + 3 \cdot (-v)$$

Получим $f(u) = f(-v)$, где $f(t) = 3t^5 + 9t$. Заметим, что $f(t)$ — возрастающая функция (как сумма возр. гр-й $3t^5$ и $9t$; $f'(t) = 15t^4 + 9 \geq 9 > 0$ при $\forall t$) $\Rightarrow \Rightarrow f(u) = f(-v)$ выполняется только при $u = -v$,

т.е. $u + v = 0$

$u + v = \log_5(2x) + \log_5 y = \log_5(2xy) = 0$, откуда $2xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{2}$ — единственное возможное значение для xy .

Ответ: $\frac{1}{2}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

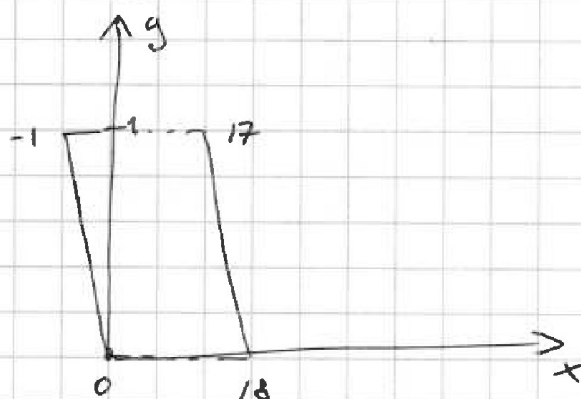
№ 6

Точки P и Q лежат на прямой $y = -5x$; точки
O и R - на прямой $y = -5x + 90$.

$$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$$

$(y_2 - y_1) : 5$. Для $y_2 - y_1 = 0$ должно быть

$$x_2 - x_1 = 9$$



для $y_1, y_2, \dots \in \mathbb{Z}$
всех x_2 - от 0 до 18 -
19 вар $\Rightarrow$ 10 пар $x_2 - x_1 = 9$.
0; 9, 1; 10, ..., 9; 18.
 $y \in \mathbb{Z}$ - от 0 до 81 - 81
вар. Пар такого вида -
10 · 81 = 810.

Всего пар с $x_1, x_2, y, y_2 \in \mathbb{Z}$:
19 · 81.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

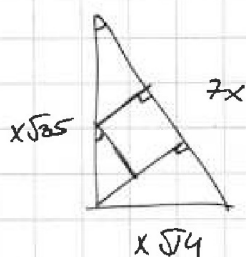
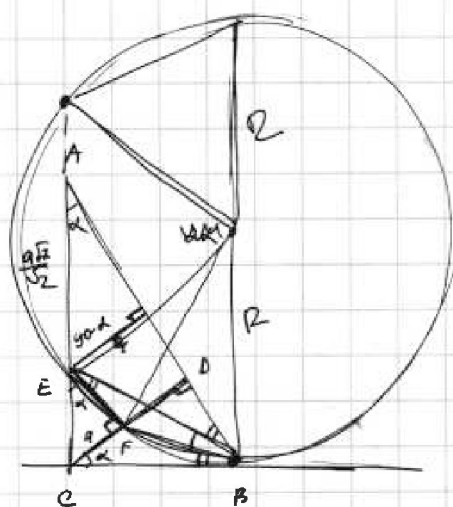
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



МФТИ



$$CB^2 = CE \dots$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{12}}{7} = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$\frac{q}{AE} = \sqrt{\frac{2}{7}} = AE = \frac{q\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$$

$$CE = x\sqrt{35} - \frac{\sqrt{14}}{79} \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{5}{7}}$$

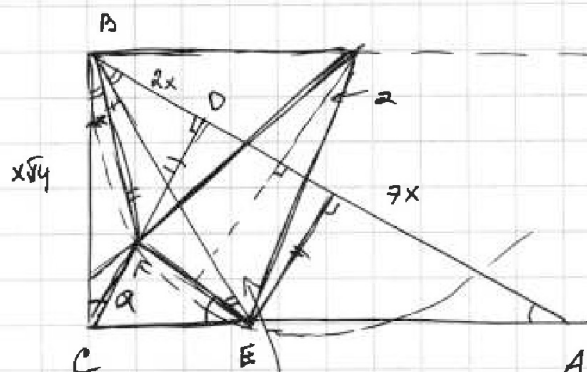
$$CE \sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{7}} (\sqrt{35} - \frac{\sqrt{14}}{2}) = \frac{CE}{CE} \sin \alpha \Rightarrow CE =$$

$$= x\sqrt{10} - a$$



$$\frac{\frac{9\sqrt{7}}{\sqrt{2}}}{8} = \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

$$h = \frac{\frac{9\sqrt{7}}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \left(\frac{7^9}{2^9} \right)$$



$$\frac{CP}{AP} = \frac{CF}{AF} = \frac{BF}{BE}$$

$$\frac{CF}{AE} = \frac{CB}{AB} = \frac{x\sqrt{4}}{7x} = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$CF = Q$$

$$AE = \frac{CF\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!


МФТИ

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_x 5 = \log_{2x} 625 - 3$$

$$\log_5 2x = 4$$

$$u^4 - \frac{3}{4} - \frac{4}{34} + 3 = 0 \quad | \cdot 34$$

$$34^5 - 9 - 4 + 94 = 0$$

$$34^5 + 94 - 13 = 0 \quad |1|$$

$$v^4 + \frac{4}{v} + \frac{1}{3v} + 3 = 0 \quad | \cdot 3v$$

$$3V^5 + 12 + 1 + 9 = 0$$

$$3V^5 + 9V + 13 = 0 \quad (2)$$

$$\log_5^4 9 + 4 \log_5 5 = \log_5 30, 2-3$$

$$\log_5^4 + 4 \log_5 5 + \frac{1}{3} \log_5 5 + 3 = 0$$

$$\log_5 y = u$$

$u+v=?$

$$u+v=0$$

$$\log_5 24 = 0$$

$$\sum xy = 1 \quad xy = \frac{1}{2}$$

$$(1) + (2): 3u^5 + 9u + 3v^5 + 9v = 0$$

$$u^5 + 3u + v^5 + 3v = 0$$

$$(u+v)(\dots) = 0$$

$$u^5 + v^5 = (u+v)(u^4 + u^3v + u^2v^2 + uv^3 + v^4) \quad | : v^4$$

$$t^4 + t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{3}{t^4} = f(t)$$

$$4t^3 + 3t^2 + 2t + 1 = \frac{12}{t+5}$$

$$45 + 30 = -15 + 30$$

$$f(u) = f(-v)$$

$$f(t) = t^5 + 3t$$

$$\Rightarrow u = -v$$

6

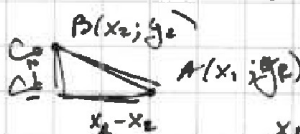


$$(x_1; y_1) \quad (x_2; y_2)$$

1 kA - 8

$$5x_2 - 5x_1 + y_1 - y_2 = 45 \quad P(-16; 80)$$

$Q(2; 80)$



$$x_2 - x_1 \leq 34$$

$$5x_2 - 5x_1 \leq 170$$

$$y_2 - y_1 \leq 80$$

$$a; 6 \quad 5a+6=45$$

1041
-9

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

④
$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 & (2) \end{cases}$$

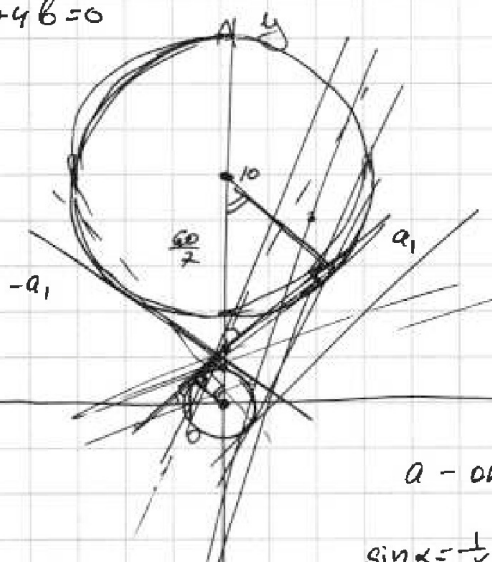
(2):
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 10)^2 = 6^2 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 20y + 64 = 0$$

$$= x^2 + (y - 10)^2 + 100 - 36$$

(1): $ax - 3y + 4b = 0$

$3y = ax + 4b$
 $y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$



$$\frac{1}{x} = \frac{3}{5-x}$$

$$5-x = 3x$$

$$4x = 5$$

$$x = \frac{5}{4}$$

$$\frac{3}{\frac{5}{4}} = \frac{12}{5}$$

$a - \text{от } a_1 \text{ до } a_1$

$\sin \alpha = \frac{1}{x} = \frac{3}{5-x}$

$5-x = 3x$ $4x = 5$
 $x = \frac{5}{4}$

$\tan \beta$

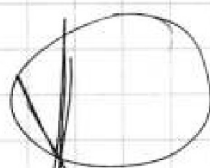
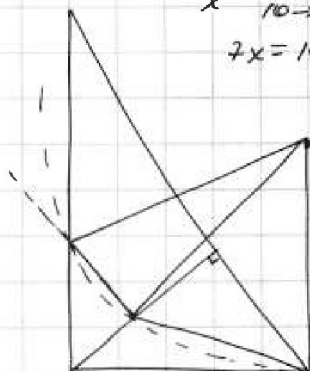
$\sin \alpha = \frac{4}{5}$ $5 - \frac{5}{4} = \frac{15}{4}$
 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

$\tan \beta = \frac{4}{3}$

$\frac{4}{3} - \text{от } \frac{3}{4} \text{ до } \frac{3}{4}$
 $a - \text{от } \frac{3}{4} \text{ до } \frac{3}{4}$
 $(\frac{4}{3}; -\frac{3}{4})$

$\frac{1}{x} = \frac{6}{10-x}$
 $7x = 10$
 $x = \frac{10}{7}$

$\frac{6}{\frac{10}{7}} = \frac{7}{10}$



$\frac{1}{x} = \frac{6}{10-x}$ $10-x = 6x$
 $7x = 10$ $x = \frac{10}{7}$

⑤ $\log_5^4(ax) - 3\log_{ax} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$; $\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0.2 - 3$

$\log_5(ax) = t$

$\frac{4}{3}\log_{ax} 5$

$\log_{y^3} 0.2 = \log_{y^3} \frac{1}{5} = \frac{y > 0, y \neq 1}{x > 0, x \neq \frac{1}{2}}$
 $= -\frac{1}{3}\log_5 625 = -5$

$t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3}t - 3$ $1 \cdot 3t$

$3t^5 - 9 - 4t^2 + 9t = 0$ $b = 4$

$3t^5 - 4t^2 + 9t - 9 = 0$

$\log_5 y = v$

$v^4 + \frac{4}{v} = -\frac{1}{3}v - 3$ $1 \cdot 3v$

$3v^5 + 12 + v^2 + 9v = 0$

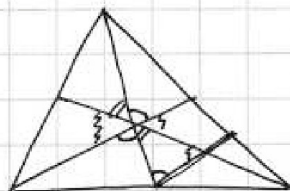
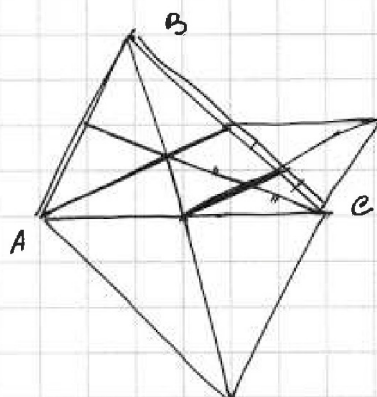
$3v^5 + v^2 + 9v + 12 = 0$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



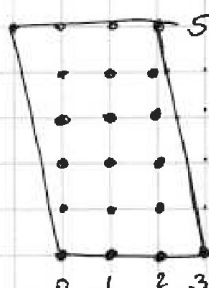
$34 - 16 = 18$
 $\frac{253}{2}$ ← когда поворачиваю
 $\frac{3}{4}$
 3-й шаг - 75

$$5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45$$

$\uparrow$
 0, 1, 2, 3, 4, ..., 9

$$x_2 - x_1 = 9 \quad 0, 9 \quad 1, 10, \dots, 9 \quad 18$$

$$18 \cdot 5 = 90$$



$$QR = 19$$

$$19 \cdot 16 +$$

$$19 \cdot 17 + (80 - 17) \cdot 18 - \text{целых точек}$$

$$y_2 = y_1: \quad 10 \cdot 17 + (80 - 17) \cdot 9$$

$$\leftarrow 16$$

$$\uparrow 80$$

$$\leftarrow 2$$

$$\leftarrow 1$$

$$\uparrow 10$$

$$\uparrow 5$$

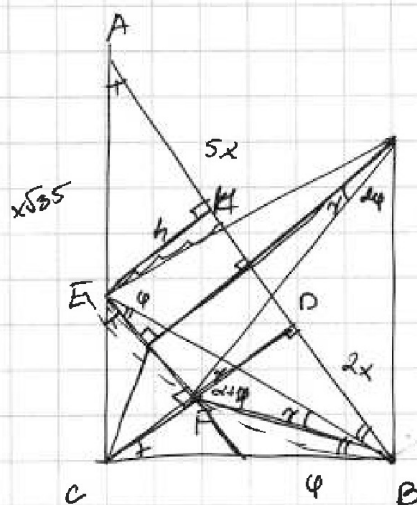
$$PO: y = -5x$$

$$-16; 0$$

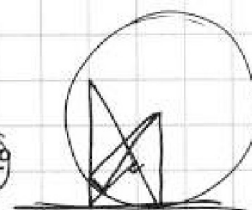
$$QR: y = -5x +$$

$$-5x + 80$$

$$y_2 - y_1: 5$$



$$\frac{x \cdot 2 \cdot \sqrt{5}}{2}$$



$$\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$2\varphi + \gamma + \alpha = 90^\circ$$

$$2\varphi + \gamma = 90^\circ - \alpha$$

$$\sin \alpha = \dots$$

$$EF = a \quad AE = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{h}{AE} = \sin \alpha = \frac{EF}{AE} = h = EF$$

F - середина BC

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порядк QR-кода неопустима!

① $ab = k \cdot 2^8 3^{14} 5^{12}$; $bc = m \cdot 2^{13} 3^{20} 5^{12}$; $ac = n \cdot 2^{14} 3^{21} 5^{23}$

$a^2 b^2 c^2 = mnk \cdot 2^{55} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}$

$2^{36} \cdot 3^{56} \cdot 5^{68}$

$abc = 2^{14} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$

$ab = 2^8 3^{14} 5^{12}$

$k=1, m=2, n=3$

$abc = 2^{14} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$

$b = 2^4 \cdot 3^7$

$a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{12}$

$c = 2^{10} \cdot 3^{13} \cdot 5^5$

$a = 2^{21} \cdot 3^{11} \cdot 5^8$

$b = 2^{12} \cdot 3^{12} \cdot 5^7$

$c = 2^{23} \cdot 3^{13} \cdot 5^7$

$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 8$
 $\alpha_2 + \alpha_3 \geq 13$
 $\alpha_3 + \alpha_1 \geq 14$
 $20, 14$

$\beta_1 + \beta_2 \geq 14$
 $\beta_2 + \beta_3 \geq 20$
 $\beta_3 + \beta_1 \geq 21$
 $\beta_2 = 0$

$2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 55$
 $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 28$

$2^{18} \cdot 3^{23} \cdot 5^{33}$

$a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{13}$

$b = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{14}$

$c = 2^{10} \cdot 3^{14} \cdot 5^{20}$

$\gamma_1 + \gamma_2 \geq 12$
 $\gamma_2 + \gamma_3 \geq 17$
 $\gamma_3 + \gamma_1 \geq 39$
 $2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \geq 68$
 $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 34$
 $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 39$

$\gamma_1 = 12$
 $\gamma_2 = 0$
 $\gamma_3 = 17$
 $20, 13$

③ $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10} \Leftrightarrow$

$\sin(\frac{\pi - 2x}{10}) = \cos x$

$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2}$

$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$\sin(\frac{\pi - 2x}{10}) - \cos x = 0$

$\sin(\frac{\pi - 2x}{10}) - \sin(\frac{\pi}{2} - x) = 0$

$\sin(\frac{\pi}{10} - x) - \sin(\frac{\pi - 2x}{10}) = 0$

$\sin(\frac{\pi - 2x}{10}) \cos(\frac{3\pi - 6x}{10}) = 0$

$5\pi - 10x + \pi - 2x = 6\pi - 12x = \frac{3\pi - 6x}{10}$

$2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33}$

$b = 2^7 \cdot 3^{13}$

$c = 2^6 \cdot 3^7 \cdot 5^{22}$

$5\pi - 10x + \pi - 2x = \frac{3\pi - 6x}{10}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① $\sin\left(\frac{\pi - 2x}{5}\right) = 0$

$\frac{\pi - 2x}{5} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\pi - 2x = 5\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$2x = \pi - 5\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi - 5\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$k=0: \frac{\pi}{2} \quad k=-1: \frac{6\pi}{2} = 3\pi \quad k=1: \frac{-4\pi}{2} = -2\pi$

$-\pi \leq x \leq 3\pi$

2): $\cos\left(\frac{3\pi - 6x}{10}\right) = 0$

$\frac{3\pi - 6x}{10} = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$3\pi - 6x = 5\pi + 10\pi k$

$6x = -2\pi - 10\pi k$

$x = \frac{-2\pi - 10\pi k}{6} = \frac{-\pi - 5\pi k}{3}$

$k=0: -\frac{\pi}{3}$

$k=1: -\frac{6\pi}{3} = -2\pi$

$k=-1: -\frac{-4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

$k=-2: -\frac{8\pi}{3} = -\frac{8\pi}{3}$

$\begin{cases} -\frac{\pi}{3} \\ \frac{4\pi}{3} \\ -2\pi \\ 2\pi \end{cases}$

$3\pi: \cos x = -1$

$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$

$\frac{4\pi}{3}$

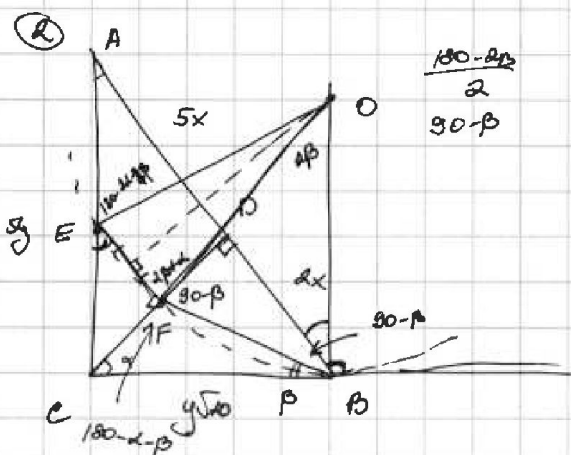
$\pi = 6\pi$

$\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

$-\frac{1}{2}: \cos x = \frac{1}{2}$

$10 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$

$\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$



$AP:PB = 5:2$

$\frac{S_{ABC}}{S_{EFP}} = ?$

$\tan \alpha = \frac{ch}{5x} = \frac{2x}{h}$

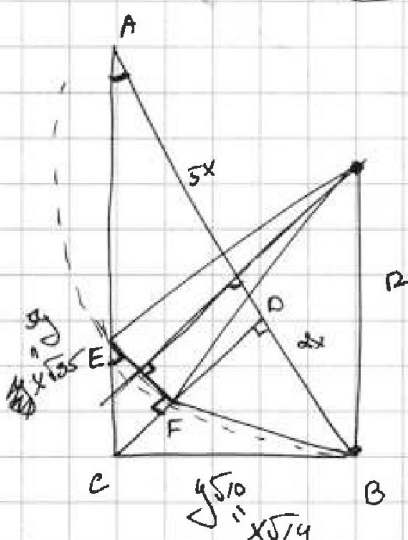
$AB \parallel EF$

$\frac{CF}{CD} = \frac{CE}{CA}$

$h^2 = 10x^2$

$h = x\sqrt{10}$

$\frac{BC}{AC} = \frac{h}{5x} = \frac{\sqrt{10}}{5}$



$25y^2 + 10y^2 = 35y^2$

$y\sqrt{35} = 7x$

$y = \frac{7x}{\sqrt{35}} = x\sqrt{\frac{7}{5}}$

$y \cdot 5 = \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{5}} x = \frac{25\sqrt{2}}{5}$

$\sqrt{10}y = \sqrt{\frac{20}{5}} x = \sqrt{4} x$

$360 - 180 + \alpha + \beta - 90 + \beta - 90 =$

$= 2\beta + \alpha$

$180 - \alpha - \alpha - 2\beta$