



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = k 2^7 3^{11} 5^{14} \quad bc = \ell 2^{13} 3^{15} 5^{18} \quad ac = m 2^{14} 3^{12} 5^{43}; k, \ell, m \in \mathbb{N}$$

$$(abc)^2 = k \ell m ab \cdot ac \cdot bc = k \ell m \cdot 2^{34} 3^{43} 5^{75}$$

$$(abc)^2 : 3^{43} \Rightarrow (abc)^2 : 3^{44} \text{ (rem. степеней всех делителей)}, (abc)^2 : 5^{75} \Rightarrow (abc)^2 : 5^{76}$$

$$\Rightarrow k \ell m : 15 \quad k \ell m = 15t, t \in \mathbb{N}$$

$$(abc)^2 = \left(\frac{k \ell m}{15}\right) \cdot 2^{34} 3^{44} 5^{76} \quad abc = \sqrt{t} 2^{17} 3^{22} 5^{38}$$

$$abc : ac \Rightarrow abc : 5^{43} \Rightarrow \sqrt{t} : 2^5 \quad t : 2^{10}; k \ell m : (3 \cdot 5 \cdot 2^{10})$$

$$\sqrt{t} = f 2^5, f \in \mathbb{N}$$

$$abc = f 2^{17} 3^{22} 5^{43} \quad abc : (2^{17} 3^{22} 5^{43})$$

Докажем, что возможно, $f=1$ (и тогда $(abc)_{\min} = 2^{17} 3^{22} 5^{43}$)

Если $k \ell m = 3 \cdot 5 \cdot 2^{10}$ это не вступает в конфликт ни с одним из условий. Тогда $t = \frac{k \ell m}{15} = 2^{10}$, $\sqrt{t} = 2^5$, $f = \frac{\sqrt{t}}{2^5} = 1$ — это возможно. Ч.т.д.

$$\text{Ответ: } (abc)_{\min} = 2^{17} 3^{22} 5^{43}$$

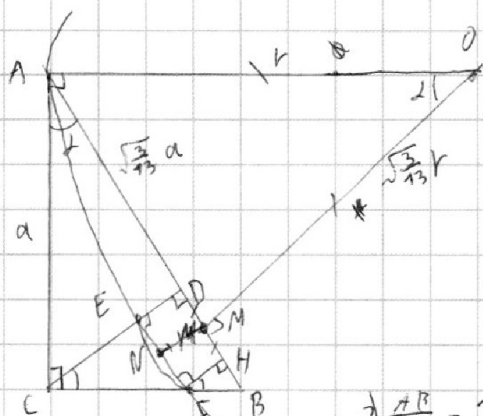
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $W(O, OA) \cap CD = E, \cap CB = F$

$AB \parallel EF \quad \frac{AB}{BD} = 1,3$

$k = \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} - ?$

1) $FH \perp AB; EF \parallel AB \Rightarrow ED = FH$

$OE = OF \Rightarrow O \in \text{ср. пер. к } EF (\text{и } DH)$

$M - \text{ср. } DH; OM \perp AB; N - \text{ср. } EF; ON \perp EF$

$OA \perp AC, OM \perp AB \Rightarrow \angle AOM = \angle CAB = \alpha$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10} \quad \frac{AB + BD}{BD} = \frac{13}{10} \quad 1 + \frac{AD}{BD} = 1 + \frac{3}{10} \quad \frac{AD}{BD} = \frac{3}{10}$$

$$\cos \alpha = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} \quad AC^2 = \frac{3}{13} AB^2 \quad BC^2 = AB^2 - AC^2 = \frac{10}{13} AB^2$$

$$\frac{AC}{AB} = \sqrt{\frac{3}{13}} \quad OM = R \cos \alpha = \sqrt{\frac{3}{13}} R, \sin \alpha = \sqrt{\frac{10}{13}}$$

$OF = OA = OM = R \quad \cos \alpha =$

$AM = R \sin \alpha = \sqrt{\frac{10}{13}} R$

$AB = \sqrt{\frac{13}{3}} \alpha$

$AD = \sqrt{\frac{3}{13}} \alpha$

$HM = DM = AM - AD = \sqrt{\frac{10}{13}} R - \sqrt{\frac{3}{13}} \alpha$

$DB = \frac{10}{13} AB = \frac{10}{13} \alpha \quad BH = DB - 2DM = \frac{10}{13} \alpha + 2\sqrt{\frac{3}{13}} \alpha - 2\sqrt{\frac{10}{13}} R = \frac{10+6}{13} \alpha - \frac{40}{13} R$

$NM = FH = HB \quad \sin \alpha = \sqrt{\frac{3}{10}} \cdot \left(\frac{16}{\sqrt{39}} \alpha - 2\sqrt{\frac{10}{13}} R \right) = 16\sqrt{\frac{10}{13}} \alpha - 2\sqrt{\frac{3}{13}} R$

$ON = OM + NM = \sqrt{\frac{3}{13}} R + 16\sqrt{\frac{10}{13}} \alpha - 2\sqrt{\frac{3}{13}} R = 16\sqrt{\frac{10}{13}} \alpha - \sqrt{\frac{3}{13}} R; EN = DM = \sqrt{\frac{10}{13}} R - \sqrt{\frac{3}{13}} \alpha$

$OE = R; \text{Тогда по теореме: } ON^2 + NE^2 = OE^2$

$(16\sqrt{\frac{10}{13}} \alpha - \sqrt{\frac{3}{13}} R)^2 + (\sqrt{\frac{10}{13}} R - \sqrt{\frac{3}{13}} \alpha)^2 = R^2$

$\left(\frac{16}{\sqrt{39}} \alpha - \sqrt{\frac{3}{13}} R \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{13}} \alpha - \sqrt{\frac{10}{13}} R \right)^2 = R^2$

$\frac{16^2}{30} \alpha^2 + \frac{3}{13} \alpha^2 + \frac{3+10}{13} R^2 - 2 \cdot \frac{16}{\sqrt{39}} \alpha \cdot \sqrt{\frac{3}{13}} R - 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{13}} \alpha \cdot \sqrt{\frac{10}{13}} R = R^2$

$\left| \frac{\sqrt{43}}{3} - \sqrt{\frac{3}{13}} = \frac{13-3}{\sqrt{39}} = \frac{10}{\sqrt{39}} \right| + 2 \sqrt{\frac{30}{13}} R = \left(\frac{32}{13} \sqrt{\frac{35}{30}} + \frac{2}{13} \sqrt{30} \right) R = \frac{2}{13} (16\sqrt{\frac{35}{30}} + \sqrt{30}) \alpha R$

$\frac{256 \cdot 13 + 30}{30 \cdot 130} \alpha^2 = \left(\frac{32}{13} \sqrt{\frac{35}{30}} + 60 \right) R \quad \frac{R}{\alpha} = \frac{3+10}{30(32\sqrt{\frac{35}{30}} + 60)}$

$\triangle ACD \sim \triangle CEF; k = \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \left(\frac{CD}{EF} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\frac{10}{13}} \alpha}{2\sqrt{\frac{10}{13}} R - 2\sqrt{\frac{3}{13}} \alpha} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{10} R - 2\sqrt{3}} \right)^2$

$\frac{16^2}{130} \alpha^2 + \frac{30}{130} \alpha^2 + \frac{3+10}{13} R^2 - \left(2 \frac{16\sqrt{3}}{13\sqrt{10}} + 2 \frac{10\sqrt{3}}{13\sqrt{10}} \right) \alpha R = R^2$

$\frac{256+30}{130} \alpha^2 = \frac{2 \cdot 26\sqrt{3}}{13\sqrt{10}} R = 4\sqrt{\frac{3}{10}} R = \frac{286}{130} \alpha \quad \sqrt{\frac{3}{10}} R = \frac{143}{65} \alpha$

$\frac{R}{\alpha} = \frac{143\sqrt{10}}{65\sqrt{3}} = \frac{1430\sqrt{3}}{195\sqrt{10}} \quad k = \left(\frac{\sqrt{10}}{2 \cdot \frac{1430\sqrt{3}}{195} - 2\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{10}{12} \left(\frac{1}{\frac{1430}{195} - 1} \right)^2 = \frac{10}{12} \left(\frac{195}{1235} \right)^2$

$= \frac{10}{12} \left(\frac{15}{95} \right)^2 = \frac{10}{12} \cdot \left(\frac{3}{19} \right)^2 = \frac{5}{6} \cdot \frac{3^2}{19^2} = \frac{15}{2 \cdot 19^2} = \frac{15}{722} \quad \text{Ответ: } \frac{15}{722}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

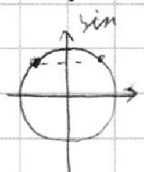
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$



$$\arccos(t) \in [0; \pi] \quad 5 \arccos(t) \in [0; 5\pi]$$

$$\frac{3\pi}{2} + x \in [0; 5\pi]; \quad x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$$

$$5 \arccos(\sin x) = 5 \frac{\pi}{2} - 5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x, \quad -5 \arccos(\sin x) = x - \pi$$

I) $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[2\pi k - \frac{\pi}{2}; 2\pi k + \frac{\pi}{2}\right] \quad \arccos(\sin x) = x + 2\pi k (k \in \mathbb{Z}) - x - 10\pi k = x - \pi$
 $2x = \pi(1 - 10k) \quad x = \frac{\pi}{2}(1 - 10k)$
 $x = \frac{\pi}{2}$ Проверка: $5 \arccos(\sin \frac{\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 2\pi$ - верно

II) $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(2\pi k + \frac{\pi}{2}; 2\pi k + \pi\right) \quad \arccos(\sin x) = \pi - x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
 $-5\pi + 5x - 10\pi k = x - \pi \quad 4x = (4 + 10k)\pi \quad x = \frac{\pi}{2}(2 + 5k)$
 $\begin{cases} 5k > -5 \\ 5k \leq 5 \end{cases} \quad k \in \{-1, 0, 1\} \quad \begin{cases} x = -\frac{3\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ Проверка: $x = -\frac{3\pi}{2}: 5 \arccos(\sin -\frac{3\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 3\pi$ - верно
 $x = \frac{\pi}{2}: 5 \arccos(\sin \frac{\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 2\pi$ - верно

Ответ: $x = \pi, x = \frac{7\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

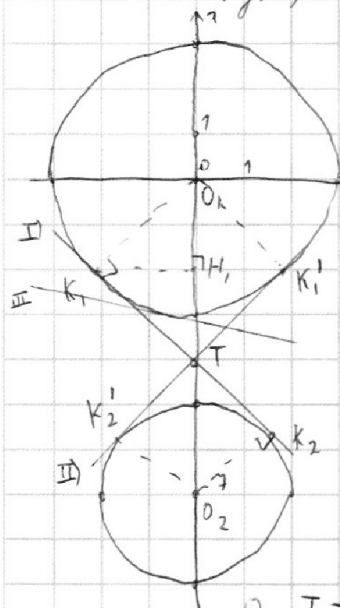
$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 5) = 0 \end{cases}$$

Задача: 7б; 4 решения

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно не содержит a и b

$$\begin{cases} x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 14x + 49 + y^2 = 2^2 \\ x^2 + y^2 = 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 2^2 \\ x^2 + y^2 = 3^2 \end{cases}$$

т.е. $(x; y)$ на координатной плоскости принадлежит окружностям $W_1(0; -7, 2)$ и $W_2(0; 0, 3)$



Первое уравнение задает прямую $x = -3ay + 7b$

Уравнения 4 решения $\Leftrightarrow$ прямая пересекает обе окружности

Рассмотрим те a , при которых условие не выполняется, т.е. прямая касается обеих окружностей либо касается лишь одной (и не имеет общих точек с другой), при этом, т.к. b варьируется, условие не должно выполняться при параллельной прямой, а значит, окружности в рассуждениях параллельности т.е. $x = -3ay + 7b$

I) $\triangle O_1 K_1 T \sim \triangle O_2 K_2 T$ $\frac{O_1 T}{O_2 T} = \frac{O_1 K_1}{O_2 K_2} = \frac{2}{3}$ $O_1 O_2 = 7$ $O_1 T = \frac{3}{5} O_2 T = \frac{21}{5}$

$O_2 T = \frac{21}{5}$ $O_1 O_2 = 7$ $H, T = \frac{21}{5} - \frac{15}{7} = \frac{3(49-25)}{35} = \frac{72}{35}$ $K_1 H = \sqrt{O_1 K_1^2 - O_1 H^2} = \sqrt{2^2 - \frac{15^2}{49}} = 3\sqrt{\frac{49-25}{49}} = \frac{3}{7}\sqrt{24} = \frac{6}{7}\sqrt{6}$

$\tan \angle H, K_1, T = \frac{H, T}{K_1 H} = \frac{\frac{72}{35}}{\frac{6}{7}\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{35}$ Угловой коэффициент - тангенс угла наклона: $-3a = -\frac{12\sqrt{6}}{35}$ $a = \frac{4\sqrt{6}}{35}$

II) для параллельности $-3a = \frac{12\sqrt{6}}{35}$ $a = -\frac{4\sqrt{6}}{35}$

III) $a \in (-\frac{4\sqrt{6}}{35}, \frac{4\sqrt{6}}{35})$ - прямая пересекает обе окружности

Когда нет 4 решений, $a \in [-\frac{4\sqrt{6}}{35}, \frac{4\sqrt{6}}{35}]$, когда есть

Ответ: $a \in (-\infty, -\frac{4\sqrt{6}}{35}) \cup (\frac{4\sqrt{6}}{35}, +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} \log_7^4(6x) - 2 \log_7 6x \cdot 7 &= \log_7^{343} 343 - 4 \\ \log_7^4 y + 6 \log_7 y \cdot 7 &= \log_7^{7^5} 7^5 - 4 \end{aligned}$$

0 3: $x, y > 0; y \neq 1, x \neq \frac{1}{6}$ пусть $k = \log_7 6x, t = \log_7 y, k, t \neq 0$

$$\begin{cases} k^4 - \frac{2}{k} = \frac{3}{2k} - 4 \\ t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k^4 = \frac{7}{2k} - 4 \\ t^4 = -\frac{7}{2t} - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k^5 + 4k = 3,5 \\ t^5 + 4t = -3,5 \end{cases}$$

$$k^5 + t^5 + 4(k+t) = 0 \quad (t+k)(k^4 - k^3t + k^2t^2 - kt^3 + t^4) = 0$$

$$(t+k)(k(k^3-t^3) - t(k^3-t^3) + 4) = 0 \quad (t+k)((k-t)^2(k^2+kt+t^2) + 4) = 0; (k-t)^2 > 0$$

$$k^2+kt+t^2 > 0 \quad (t \neq 0; (\frac{k}{t})^2 + (\frac{k}{t}) + 1 = 0; D = 1 - 4 < 0; \frac{1}{t} > 0), \Rightarrow (k-t)^2(k^2+kt+t^2) + 4 > 0$$

$$t+k=0 \quad t=-k$$

Замечаем следующее: $t = -k \quad \log_7 6x = -\log_7 y \quad 6x = \frac{1}{y}$

$xy = \frac{1}{6}$ - ед. возможное значение.

Проверка:

$$2k^5 + 8k - 7 = 0; k = \frac{7}{2}; 2 \cdot \frac{7^5}{2^5} + \frac{8 \cdot 32 \cdot 7}{2^5} - \frac{7 \cdot 32}{2^5} = 0; 7 \cdot 7^4 + 128 \cdot 7 - 16 = 0 \text{ - не угадано}$$

$$f(k) = 2k^5 + 8k; f(k) \uparrow; f(0) = 0; f(1) = 10 \Rightarrow \forall k \in (0; 10): f(k) = 7$$

$k \in (0; 10)$

- k угадано: если угадано k , то $t = -k$: $2t^5 + 8t = -(2k^5 + 8k) = -7$
 - t угадано: $\Rightarrow x$ и y угаданы. ($k, t \neq 0 \Rightarrow x, y \neq 1, x \neq \frac{1}{6}$ - угадано)

Ответ: $xy = \frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

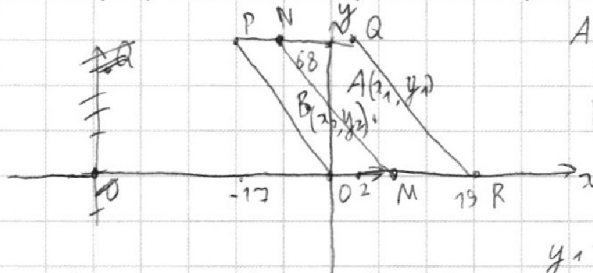
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$O(0,0)$, $P(-17,68)$, $Q(2,68)$, $R(19,0)$



A и B были OR , но линии PQ

$$0 \leq y_1, y_2 \leq 68$$

$$PO: y = -4x; QR: y = -4(x-19) = 76 - 4x$$

A и B были PO , но линии QR

$$-4x_1 \leq y_1 \leq 76 - 4x_1; -4x_2 \leq y_2 \leq 76 - 4x_2$$

$$y_1 + 4x_1 \in [0, 76] \quad y_2 + 4x_2 \in [0, 76]$$

$$4x_2 + y_2 - (4x_1 + y_1) = 40$$

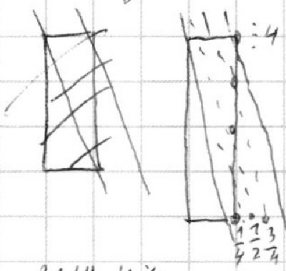
$$(y_1 + 4x_1) \in [0, 76] \quad 4x_2 + y_2 \in [40, 116] \quad y_2 + 4x_2 \in [40, 76]$$

$$(4x_1 + y_1) = (4x_2 + y_2) - 40 \quad (4x_1 + y_1) \in [0, 36]$$

$$y_1 = -4x_2 + b, \quad b \in [0, 36] \quad y_2 = -4x_2 + d, \quad d \in [40, 76]$$

— уравнения прямых, параллельных PO

$$(4x_2 + y_2) - (4x_1 + y_1) = 40 \quad d - b = 40$$



Все прямые, параллельные PQ имеют x через $1/4$. $x_1 = \frac{b-y}{4}$; $y = -4x + b$

I) при $y \equiv 0$: $x_1 = \frac{b}{4}$, $x_1 \in [0, 9]$ — 9 прямых — 9 пар прямых

$y \equiv 0$ $x_2 = \frac{y}{4}$, $x_2 \in [10, 19]$ — 10 прямых

на каждой прямой $\frac{68}{4} + 1$ точек (уч. по формуле)

— всего 18. На каждой из прямых 18 точек

Внутри $PQRO$. Итого $9 \cdot 18^2$ точек при $y \equiv 0$

II) при $y \equiv 1, 2, 3$ — у всех нет точек на границах, получаем из параллельных прямых $y \equiv 1$ $x \equiv \frac{b-1}{4}$, $x_1 \in [0, 8]$ — 8 прямых — 8 пар прямых

$x \equiv \frac{1-1}{4}$, $x_2 \in [10, 18]$ — 9 прямых —

и для $y \equiv 2, 3$. Итого $3 \cdot 8 \cdot 17^2$

$$| 9 \cdot 18^2 = (8+1)18^2$$

$$\text{Ответ: } 9 \cdot 18^2 + 3 \cdot 8 \cdot 17^2 \quad (= 9852)$$

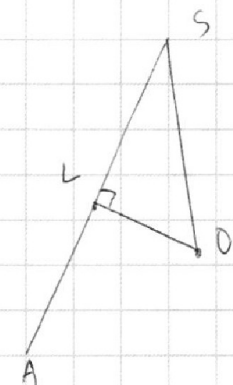
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$SO = 5; OL = 4 \Rightarrow SL = \sqrt{SO^2 - OL^2} = 3; AL = 7$$

$$AK = AL = 7 \quad AM = 10 \quad AA_1 = 15 \quad KM = 3$$

$$KA_1 = 15 - 7 = 8$$

$$OM = \sqrt{KM^2 + OK^2} = 5 = OS \quad OM = OS$$

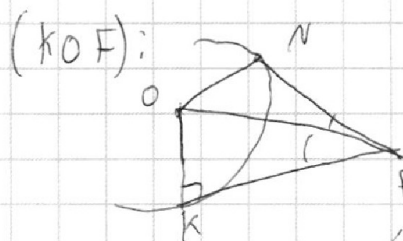
$\triangle SOM$ - равносторонний; OT - медиана, высота, биссектриса.

$$OA_1 = \sqrt{OK^2 + KA_1^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

$$OA = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65}$$

KF - медиана к BC

$$\frac{KF}{AH} = \frac{KA_1}{AA_1} = \frac{8}{10} \quad KF = \frac{8}{10} \cdot 12 = \frac{96}{10} = 9.6$$



$FN = FK$ (касательные)

$$OK = 4; KF = 9.6$$

$$\angle NFK = (\angle BOC), (\angle ABC)$$

$$\frac{\angle NFK}{2} = \arccos \frac{OK}{KF} = \frac{40}{96} = \frac{20}{48} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

$$\sin \frac{\angle NFK}{2} = \frac{5}{13} \quad (\text{так как } 5^2 + 12^2 = 13^2)$$

$$\cos \angle NFK = 1 - 2 \sin^2 = 1 - 2 \cdot \frac{25}{169} = 1 - \frac{50}{169} = \frac{119}{169}$$

$$= \frac{169 - 50}{169} = \frac{119}{169}$$

Ответ: $\angle NFK = \arccos\left(\frac{119}{169}\right)$

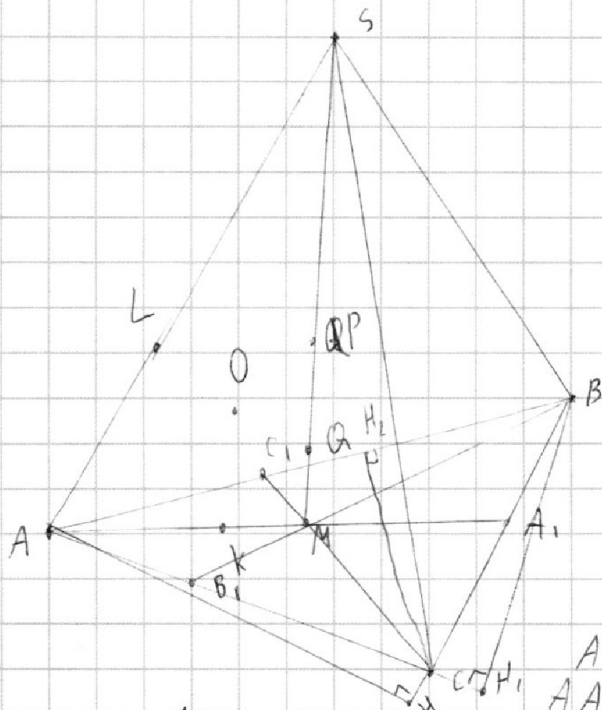
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

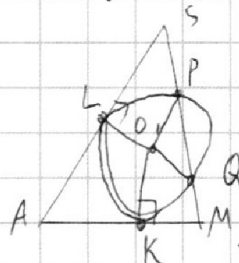
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



0-значит $\angle O L = \angle O K = \angle O Q = \angle O P$

В (ASM): $\angle O L = \angle O K = \angle O Q = \angle O P$



$\angle O P Q = 0, \angle O P =$
 $\Rightarrow \angle O, P S = \angle O, Q M$
 $\Rightarrow \angle O, P S = \angle O, Q M$
 $\Rightarrow \angle O, P S = \angle O, Q M$
 $\Rightarrow \angle O, P S = \angle O, Q M$

$\triangle O, L S, O, K M$ - прямоугольн. $\angle O, L = \angle O, K$
 $\angle O S = \angle O M \Rightarrow \triangle O, L S = \triangle O, K M$ $\angle S = \angle M$
 $A K, A K$ - кон. $\Rightarrow A L = A K$

$A S = A L + L S = A K + K M = A M$

$A M = A S = B C = 10$

$A A_1 = \frac{3}{2} A M = 15$

$A H_1$ - в.м. $\triangle A B C$; $A H_1 \in B C$ (напр. на пр.м.) $\frac{1}{2} A H_1 \cdot B C = S_{A B C} = 60$

$A H = \frac{120}{B C} = 12$

$A_1 H = \sqrt{A A_1^2 - A H^2} = 9$

$B A_1 = \frac{B C}{2} = 5$; $B H_1 = 14$; $C H_1 = 4$

$A C = \sqrt{A H^2 + H C^2} = \sqrt{144 + 16} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$

$A B = \sqrt{A H^2 + B H^2} = \sqrt{144 + 196} = \sqrt{340}$

$B H_1$ - в.м. к $A C$ $B H_1 = \frac{2 S}{A C} = \frac{120}{4\sqrt{10}} = \frac{30}{\sqrt{10}} = 3\sqrt{10}$ $C H_1 = \sqrt{B C^2 - B H_1^2} =$

$= \sqrt{100 - 90} = \sqrt{10}$ $B_1 C = \frac{A C}{2} = 2\sqrt{10}$; $B_1 H_1 = B_1 C + C H_1 = 3\sqrt{10}$

$B B_1 = \sqrt{B H_1^2 + B_1 H_1^2} = \sqrt{90 + 90} = \sqrt{180} = 3\sqrt{20}$

$C H_2$ - в.м. к $A B$

$C H_2 = \frac{2 S}{A B} = \frac{120}{\sqrt{340}} = \frac{120}{\sqrt{340}} = \frac{6}{\sqrt{17}} \sqrt{340}$

$B C_1 = A C_1 = \frac{A B}{2} = \frac{\sqrt{340}}{2}$

$C_1 H_2 = B C_1 - B H_2$ $B H_2 = \sqrt{B C^2 - C H_2^2} = \sqrt{100 - \frac{6^2}{17} \cdot 340} = \sqrt{100 - \frac{36}{17} \cdot 20} = \sqrt{\frac{1700 - 720}{17}} =$

$= \sqrt{\frac{980}{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \sqrt{980} = \frac{7}{\sqrt{17}} \sqrt{340}$

$C_1 H_2 = B C_1 - B H_2 = \left(\frac{17}{34} - \frac{74}{34}\right) \sqrt{340} = \frac{3\sqrt{340}}{34}$

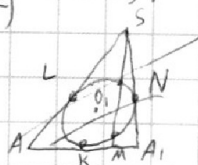
$C C_1 = \sqrt{C H_2^2 + H_2 C_1^2} = \sqrt{\left(\frac{6}{17}\right)^2 + \left(\frac{3}{34}\right)^2} \sqrt{340} = \frac{\sqrt{153}}{17} \cdot \sqrt{340} = \frac{\sqrt{153}}{17} \cdot \sqrt{340} = \frac{3\sqrt{17} \cdot \sqrt{19} \cdot \sqrt{20}}{17} =$

$= 3\sqrt{20}$

1) Ответ: $A A_1 \cdot B B_1 \cdot C C_1 = 15 \cdot 3\sqrt{20} \cdot 3\sqrt{20} =$

$= 15 \cdot 9 \cdot 20 = 300 \cdot 9 = 2700$

2) (ASM):



$S N = 3$ $S L = S N = 3$

$\angle O L = \angle O K = \angle O Q = \angle O P = 0$ $N = 4$ - радиус

$\angle O L = \angle O K = \angle O Q = \angle O P = 0$ $N = 4$ - радиус

прог. на ун. м.м.м.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

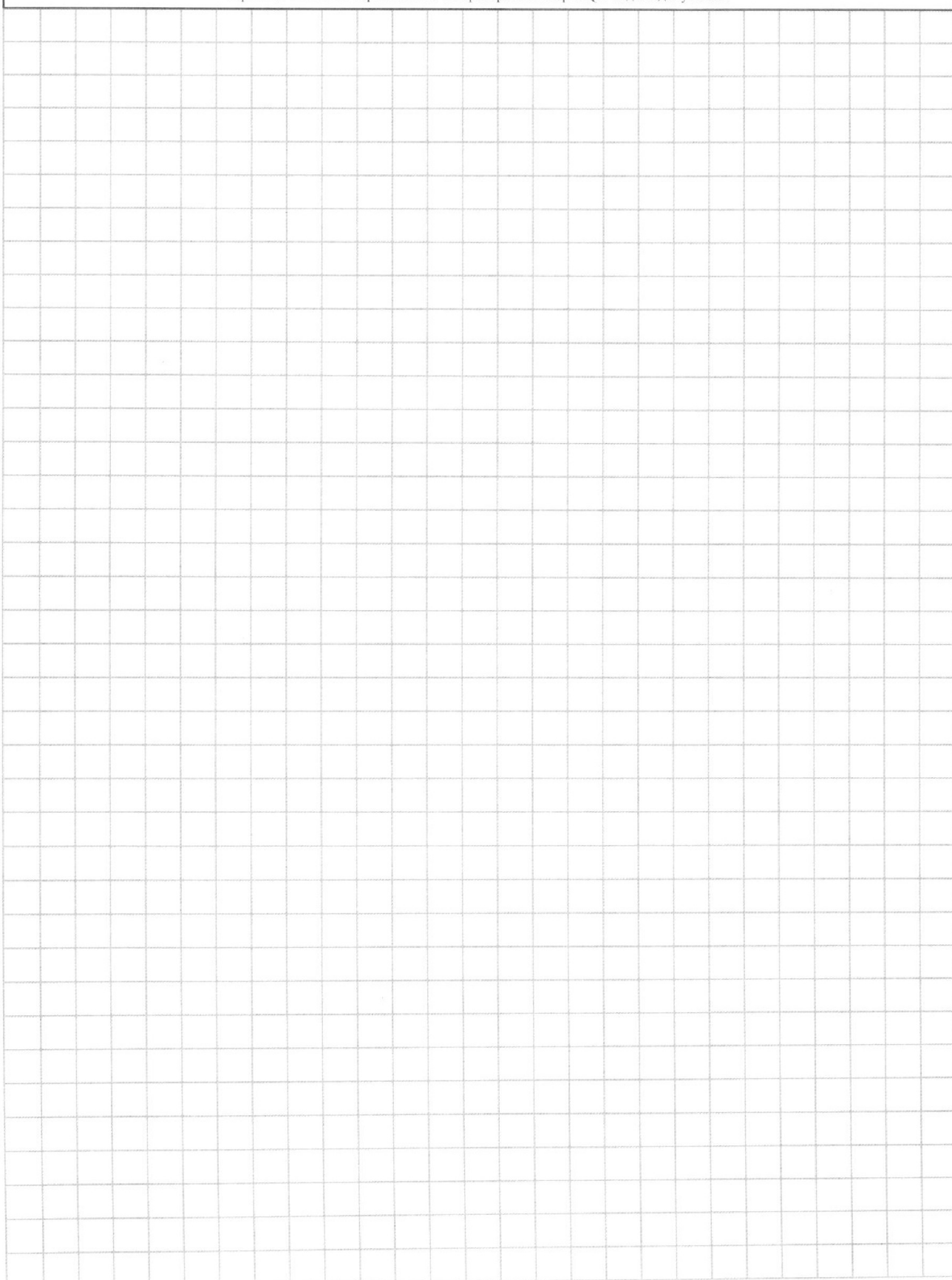
5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 11 \\ 256 \\ \times 13 \\ \hline 768 \\ 256 \\ \hline 3328 \end{array}$$

~~3328~~ 3418

$$\begin{array}{r} 1430 \\ - 195 \\ \hline 1235 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1235 \overline{) 13} \\ \underline{117} \\ 65 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 195 \overline{) 13} \\ \underline{13} \\ 65 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 19 \\ \times 19 \\ \hline 171 \\ 19 \\ \hline 361 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 141 \\ \times 14 \\ \hline 56 \\ 14 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 980 \overline{) 17} \\ \underline{14} \\ 300 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 18 \\ \times 12 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \\ \times 324 \\ \hline 2916 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \\ \times 289 \\ \hline 6936 \\ 289 \\ \hline 9852 \end{array}$$