



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a_2 = \sqrt{2}(a)$, $b_2 = \sqrt{2}(b)$, $c_2 = \sqrt{2}(c)$,
аналогично определим $a_3, b_3, c_3, a_5, b_5, c_5$.

$\sqrt{p}(n)$ - степень включения p в n .

Из условий:

$$\begin{cases} ab: 2^7 \Rightarrow a_2 + b_2 \geq 7 \\ bc: 2^{13} \Rightarrow b_2 + c_2 \geq 13 \\ ac: 2^{14} \Rightarrow a_2 + c_2 \geq 14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 7 + 13 + 14 \Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 17.$$

Аналогично для 3 и 5 получаем

$$\begin{cases} a_3 + b_3 \geq 11 \\ b_3 + c_3 \geq 15 \Rightarrow 2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 43 \quad a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{Z} \\ a_3 + c_3 \geq 17 \end{cases} \Rightarrow a_3 + b_3 + c_3 \geq 22$$

$$\begin{cases} a_5 + b_5 \geq 14 \\ b_5 + c_5 \geq 18 \Rightarrow 2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 75 \quad a_5, b_5, c_5 \in \mathbb{Z} \\ a_5 + c_5 \geq 43 \end{cases} \Rightarrow a_5 + b_5 + c_5 \geq 38$$

Но $a_5 + c_5 \geq 43 \Rightarrow a_5 + b_5 + c_5 \geq 43$

$$\Rightarrow \sqrt{2}(abc) = a_2 + b_2 + c_2 \geq 17$$

$$\sqrt{3}(abc) = a_3 + b_3 + c_3 \geq 22$$

$$\sqrt{5}(abc) = a_5 + b_5 + c_5 \geq 43$$

$$\Rightarrow abc: 2^{17} 3^{22} 5^{36} \Rightarrow abc \geq 2^{17} 3^{22} 5^{43}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

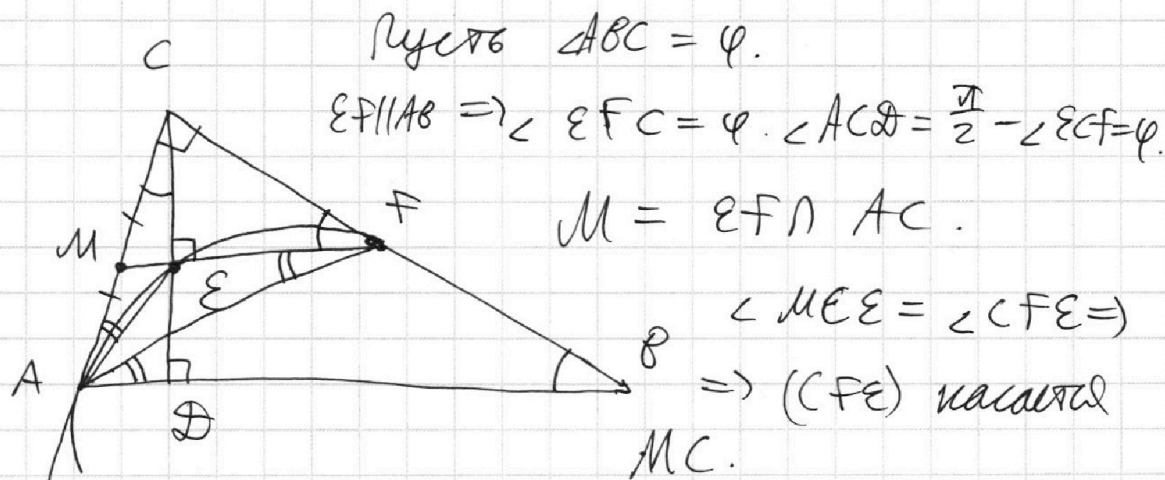
... Это годит и так же при

$$a_2 = 4, \begin{cases} a = 2^4 3^7 5^{21} \\ b = 2^3 3^5 5^0 \\ c = 2^{10} 3^{10} 5^{22} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } \min(abc) = 2^{17} 3^{22} 5^{48}$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $\angle ABC = \varphi$.

$EF \parallel AB \Rightarrow \angle EFC = \varphi$. $\angle ACD = \frac{\pi}{2} - \angle ECF = \varphi$.

$M = EF \cap AC$.

$\angle MEE = \angle CFE \Rightarrow$

$\Rightarrow (CFE)$ касательна MC .

$\Rightarrow ME \cdot MF = \text{pow}(M, (CFE)) = MC^2$.

$\text{pow}(P, \omega)$ — степень точки P отн. ω .

(AFE) касательна $AC \Rightarrow MA^2 = ME \cdot MF$.

$\Rightarrow MA^2 = ME \cdot MF = MC^2 \Rightarrow MA = MC$.

$\Rightarrow S_{\triangle CFE} = \frac{1}{4} S_{\triangle CBD}$. ($EF \parallel BD$ и $MA = MC$)

$\Rightarrow MF$ — ср. линия $\triangle CBD \Rightarrow \frac{S_{CFE}}{S_{CBD}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot CD \cdot (AB - BD)}{\frac{1}{2} \cdot CD \cdot BD} = \frac{a_1 \cdot 3}{1} = a_1 \cdot 3.$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}} = 4 \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCD}} = 1,2.$$

Ответ: 1,2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\Rightarrow \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$$

$$\Rightarrow \sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + 2\pi k & (1) \\ -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + 2\pi k & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{6}{5}x = \frac{\pi}{5} - 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$(2) \Rightarrow \frac{4}{5}x = \frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$4x = 4\pi + 10\pi k$$

$$x = \pi + \frac{5}{2}\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + n \frac{5\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}. \\ x = \pi + \frac{5}{2}\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



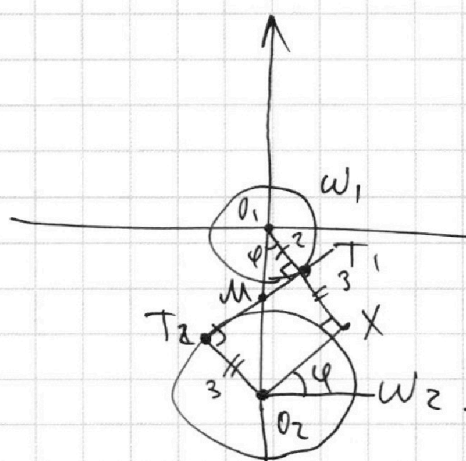
$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

Построим графики. Это будут окружности
с центрами в $(0;0)$ и $(-7;0)$ и
радиусами 2 и 3.



Рассмотрим их общие
внутренние касательные и
их коэффициенты наклона.

$$O_1X = R_1 + R_2 = 5$$

$$O_1O_2 = 7.$$

$$\Rightarrow O_2X = \sqrt{7^2 - 5^2} = 2\sqrt{6}.$$

$\Rightarrow$ для 1ой касательной

$$\text{коэф. наклона } \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi = \frac{O_2X}{O_1X} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

$$(\varphi = \frac{\pi}{2} - \angle O_1O_2X = \angle O_2O_1X).$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Тогда для второй касательной, из
симметрии, $\varphi_2 = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$. $k = -\frac{1}{3a}$.

Тогда, если ~~если~~ $k \in (\varphi_2; \varphi_1)$ $y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7\sqrt{6}}{3a} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y = kx + \frac{7\sqrt{6}}{3a} = w(x)$$

$\Rightarrow$ При $k \in [\varphi_2; \varphi_1]$, ^{если} любая прямая
такого вида ($w(x)$) будет пересекать
одну из окружностей в 2 точки, то она
не будет пересекать другую, т.к. ~~тогда~~

$$\cancel{k \notin (\varphi_2; \varphi_1)} \quad k \in \varphi_2 \leq k \leq \varphi_1.$$

$\Rightarrow$ Такое возможно при $k \in (-\infty; \varphi_2) \cup (\varphi_1; +\infty)$.

выберем в такое, что $\frac{7\sqrt{6}}{3a} = y_M$, где $M =$

$$= T_1, T_2 \cap O_1, O_2. \Rightarrow \text{При } k > \varphi_1 \text{ или } k < \varphi_2$$

коэф. наклона $w(x)$ будет ^{большее} ~~меньше~~, чем у
касательной (общей) $\Rightarrow$ она пересечет
обе окружности в 2 точки.

$$\Rightarrow -\frac{1}{3a} \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{5}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{5}; +\infty\right) \Rightarrow$$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\infty; -\frac{6\sqrt{6}}{5}\right) \cup \left(\frac{6\sqrt{6}}{5}; +\infty\right).$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(\log_7 y)^5 + 4 \log_7 y = -\frac{7}{2} = -((\log_7 w)^5 + 4 \log_7 w)$$

то получаем, что $\log_7 y = -\log_7 w$

$$\Rightarrow \log_7 y + \log_7 w = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_7 (yw) = 0 \Rightarrow yw = 1$$

$$\Rightarrow 6xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{6}.$$

Ответ: $xy = \frac{1}{6}.$

Других значений для xy нет,
так как мы делаем равносильные
перекоды и получили однозначный
ответ.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \quad (1)$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4. \quad (2)$$

$$y > 0 \text{ и } 6x > 0 \Rightarrow y = |y|, x = |x|.$$

$$\text{Пусть } |6x| = w. \quad w > 0, |w| = w.$$

Перепишем выражения. $\ln w \neq 0, \ln y \neq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{\ln w}{\ln 7} \right)^4 - 2 \left(\frac{\ln 7}{\ln w} \right) = \frac{\ln 343}{\ln w^2} - 4$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\ln w}{\ln 7} \right)^4 - 2 \left(\frac{\ln 7}{\ln w} \right) = \frac{3 \ln 7}{2 \ln w} - 4$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\ln w}{\ln 7} \right)^5 - \frac{7}{2} + 4 \left(\frac{\ln w}{\ln 7} \right) = 0$$

$$\Rightarrow (\log_7 w)^5 + 4 \log_7 w = \frac{7}{2}.$$

$$(2) \Leftrightarrow \left(\frac{\ln y}{\ln 7} \right)^4 + 6 \frac{\ln 7}{\ln y} = \frac{5 \ln 7}{2 \ln y} - 4$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\ln y}{\ln 7} \right)^5 + \frac{7}{2} \frac{\ln y}{\ln 7} - 4 = 0. + 4 \frac{\ln y}{\ln 7} = 0.$$

$$\Rightarrow (\log_7 y)^5 + 4 \log_7 y = -\frac{7}{2}.$$

функции $y=x$, $y=x^5$ и $y=\log_7 x$
прикидают каждое значение в
единственной точке $\Rightarrow$ так как

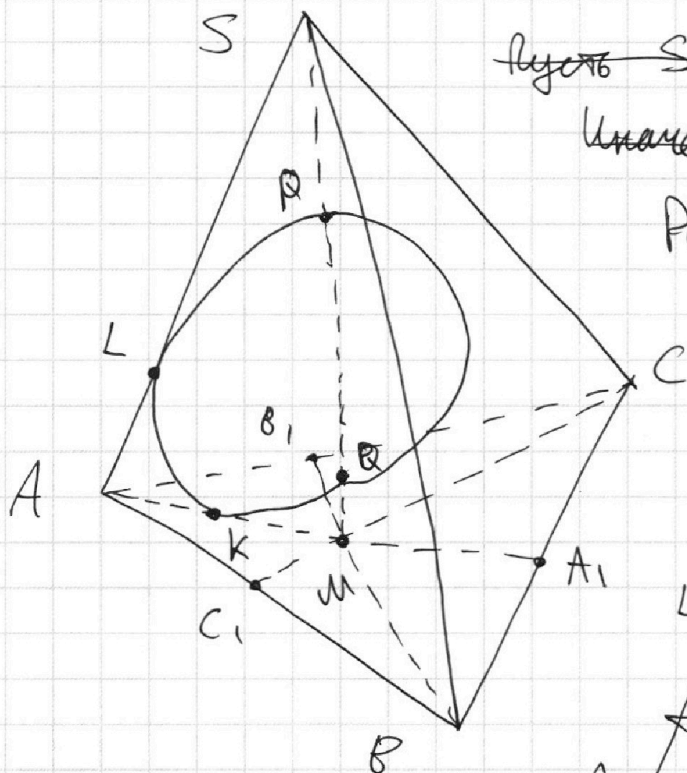
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



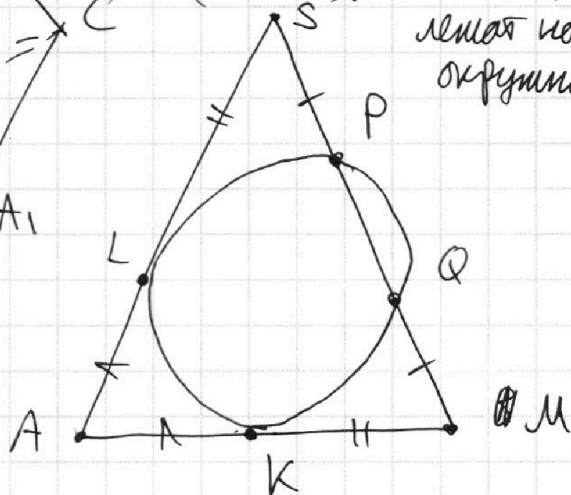
~~Пусть $SP < SQ$.~~

~~Иначе $SP^* = SP - PQ = SQ^*$.~~

Рассмотрим плоскость

$(ASM) \Rightarrow P, Q, L, K$

лежат на окружности.



$$(\star) SP = MQ \Rightarrow SP \cdot PSQ = PM \cdot QM \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{pow}(S, (PQKL)) = \text{pow}(M, (PQKL)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MK^2 = LS^2 \Rightarrow MK = LS.$$

$$\text{Но } AL = AK = \sqrt{\text{pow}(A, (PQKL))} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AM = \cancel{SA} = AL + LS = AK + KM.$$

$$\Rightarrow AM = SA = 10.$$

Рассмотрим $\triangle ABC$.

($\star$) [Если P и Q даны в другом положении, т.е. $SP > SQ$, то рассуждения всё равно выполняются].

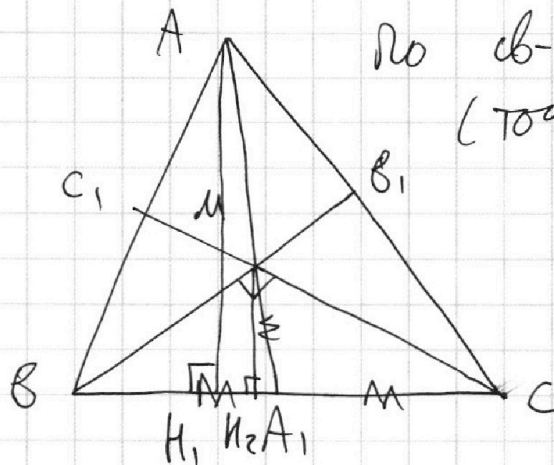
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



По св-ву центра масс
(точки M), $\frac{AM}{MA_1} = \frac{BM}{MB_1} = \frac{CM}{MC_1}$

$$= 2.$$

$$\Rightarrow MA_1 = \frac{1}{2} AM = 5.$$

$$\text{Но } BA_1 = CA_1 = \frac{1}{2} BC = 5 = MA_1, \Rightarrow$$

$\Rightarrow \triangle BMC$ медиана MA_1 равна
половине стороны $\Rightarrow \angle BMC = \frac{\pi}{2}$.

$$MC = \frac{2}{3} CC_1; \quad MB = \frac{2}{3} BB_1, \Rightarrow BM \cdot MC = \frac{4}{9} BB_1 \cdot CC_1.$$

Пусть $H_1, H_2 \in BC$: $AH_1 \perp BC$; $MH_2 \perp BC$.

$$H_1A \parallel MH_2 \Rightarrow \triangle A_1H_2M \sim \triangle A_1H_1A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{MH_2}{H_1M} = \frac{\frac{1}{2} H_2M \cdot BC}{\frac{1}{2} H_1M \cdot BC} = \frac{S_{\triangle BMC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{A_1M}{A_1A} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle BMC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{60}{3} = 20.$$

$$\text{Но } S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2} BM \cdot MC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BM \cdot MC = 2 S_{\triangle BMC} = 40.$$

$$\text{Но } BM \cdot MC = \frac{4}{9} BB_1 \cdot CC_1, \Rightarrow BB_1 \cdot CC_1 = \frac{40}{4} \cdot 9 = 90.$$

$$AA_1 = \frac{3}{2} AM = 15 \Rightarrow AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 =$$

$$= 90 \cdot 15 = 1350.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

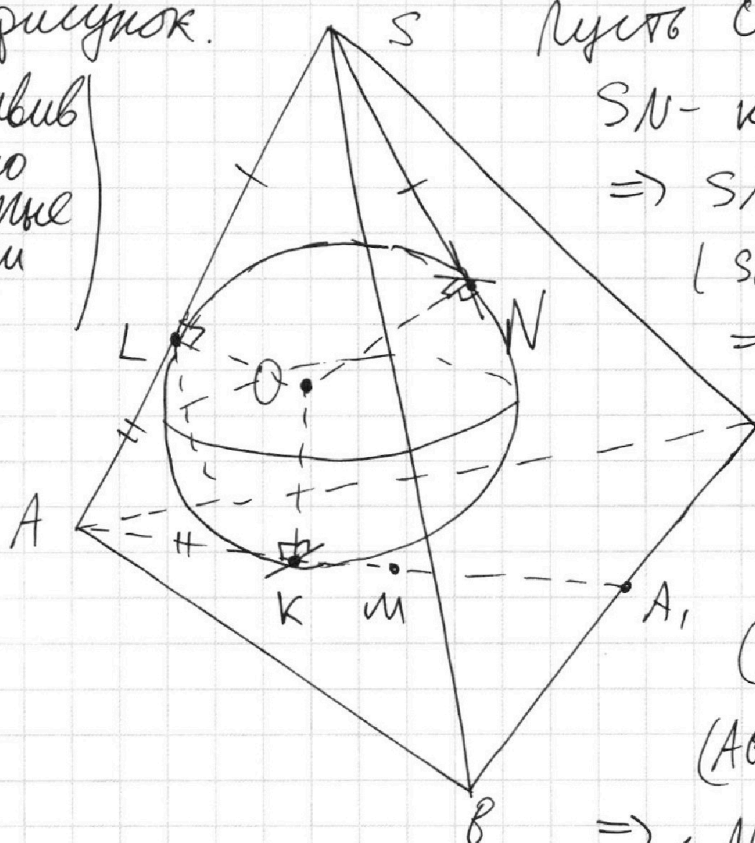
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



... Остался пункт 8). Сделаем новый

рисунок.

(оставив
только
нужные
точки)



Пусть O - центр Ω

SN - касательная $\Rightarrow$

$$\Rightarrow SN = SL = 3.$$

(SL - тоже касательная)

$$\Rightarrow AL = AS - SL = 10 - 3 = 7.$$

$$AK = AL = 7.$$

Ω касается

(BSC) в N и

(ABC) в $K \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle NOK$ дополняет

икий двугранный угол φ при BC до π , так как

Если мы соединим O с точкой T так, чтобы

$OT \perp BC$, и опустим из O перпендикуляры

OX, OY на (ABC) и (BSC), то ~~они не-симм.~~

($OXTY$) будет вписанным и $\angle XOY = \angle YTX = \pi$.

(в данном случае $X = K, Y = N$).

$LO = p(O, AS)$ и, $NO = p(O, (BSN))$, $OK = p(O, (BC))$

$\Rightarrow (LOKA)$ и $(SNLO)$ по (SLO) и (SLA) и (OLA) .

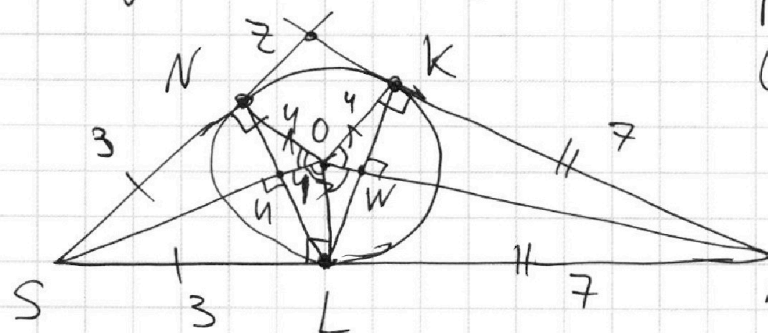
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Это одна и та же плоскость $\Rightarrow$

$\Rightarrow N, S, L, O, A, K$ лежат на одной плоскости. рассмотрим её и найдем $\angle KOL$. (или $\angle MON$).



по т. Пифагора,

$$OS = \sqrt{OL^2 + SL^2} = 5$$

$$AO = \sqrt{AL^2 + OL^2} =$$

$$= \sqrt{65}.$$

$SO \perp NL$ и $OA \perp LK$

$$\Rightarrow \frac{NL}{2} = \rho(L, OS) = \frac{SL \cdot OL}{OS} = \frac{4 \cdot 3}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{12}{5}$$

$NL = \frac{24}{5}$. Аналогично,

$$LK = \frac{56}{\sqrt{65}}.$$

$$\angle KOL = 2 \arcsin \left(\frac{KL}{2OK} \right) = \left(\frac{7}{\sqrt{65}} \right) 2 \arcsin \left(\frac{7}{\sqrt{65}} \right)$$

$$\angle NOL = 2 \arcsin \left(\frac{LN}{2R} \right) = \frac{3}{5} 2 \arcsin \left(\frac{3}{5} \right).$$

$$\Rightarrow \angle NOK = 2 \left(\pi - \left(\arcsin \left(\frac{7}{\sqrt{65}} \right) + \arcsin \left(\frac{3}{5} \right) \right) \right).$$

$$\Rightarrow \psi = \pi - \angle NOK = 2 \arcsin \left(\frac{7}{\sqrt{65}} \right) + 2 \arcsin \left(\frac{3}{5} \right) -$$

$-\pi$ что и требовалось найти.



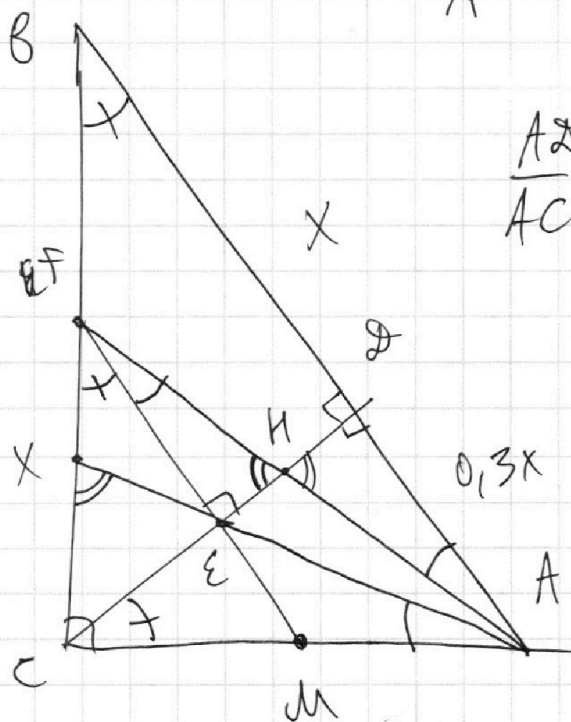
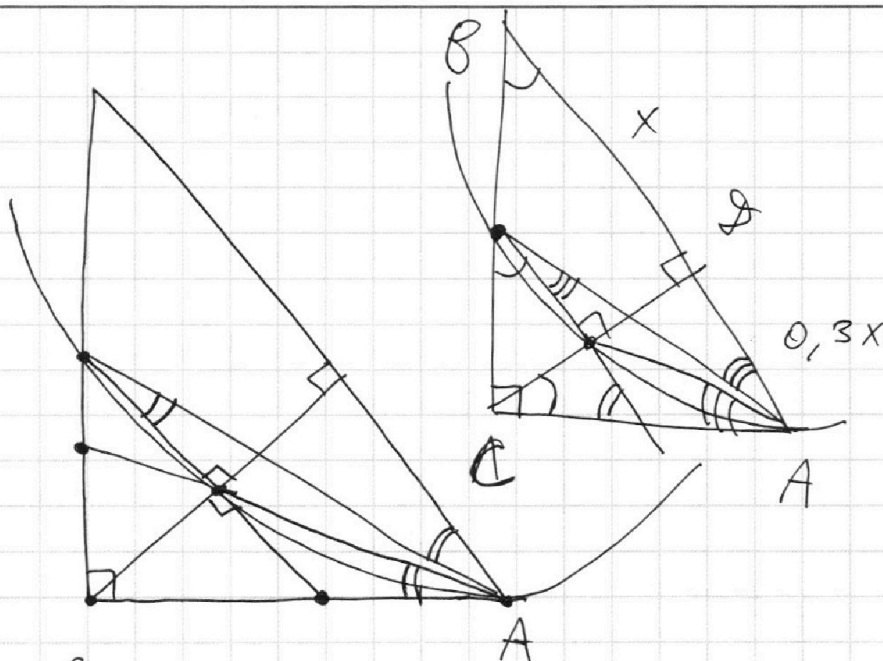
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AD}{AC} = \frac{DH}{CX} = \frac{AE}{AC}$$

$$\frac{DH}{HE} = \frac{AD}{CE}$$

$$MC^2 = MF \cdot ME =$$
$$= 13 \cdot 0,3 k^2 x^2$$

$$\frac{CE}{CD} \cdot \frac{DH}{HC} = \left| \frac{AD}{CD} \right|^2 \quad (!)$$



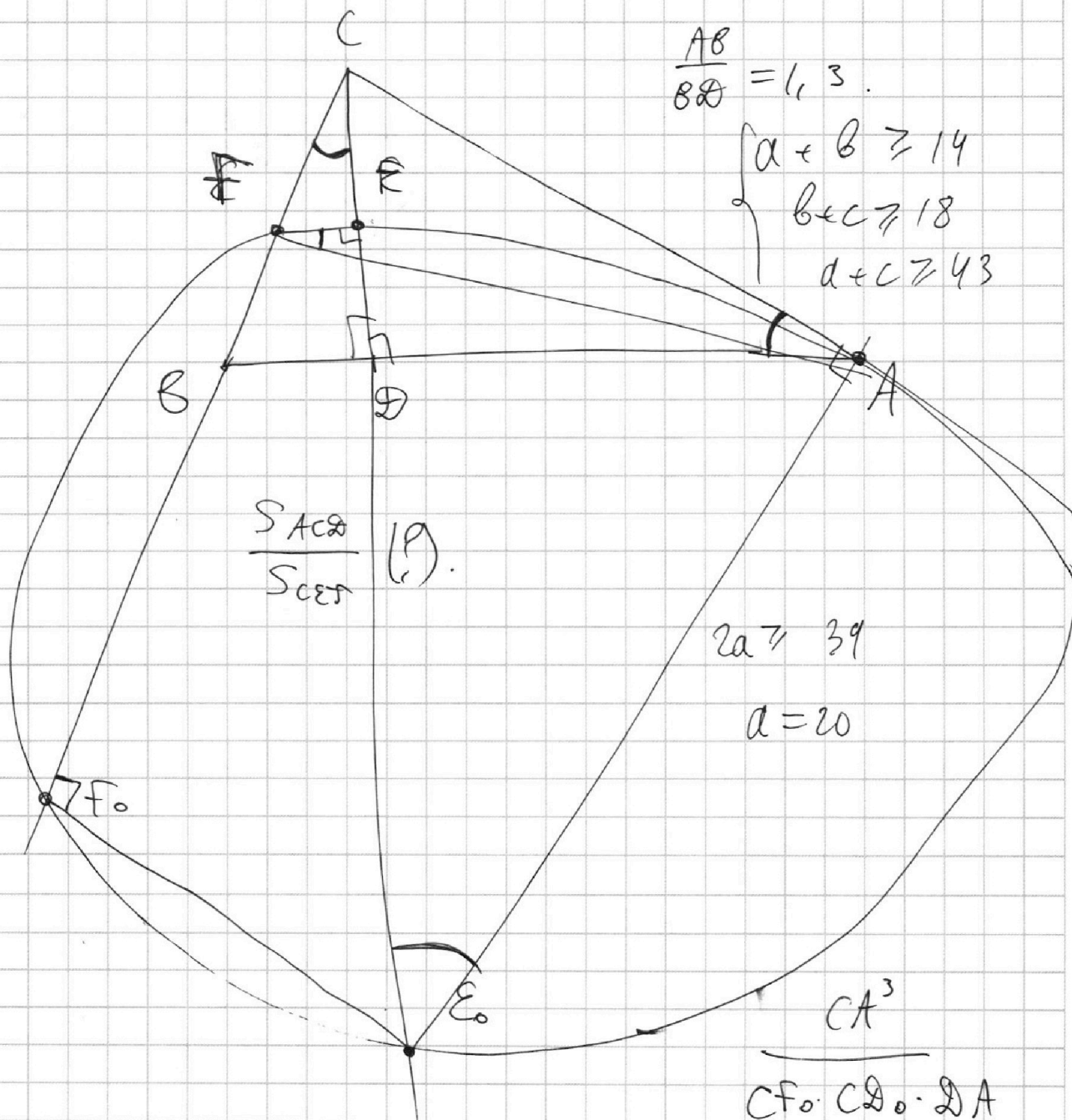
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$CF \cdot CF_0 = CE \cdot CE_0 = CA^2$$

$$\frac{S_{CFE}}{S_{ACD}} = \frac{CE \cdot FC}{CA \cdot DA} = \frac{CA^4}{CF_0 \cdot CE_0 \cdot CA \cdot DA}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ab: 2^7 3^{11} 5^{14} \\ bc: 2^{13} 3^{15} 5^{18} \\ ac: 2^{14} 3^{17} 5^{43} \end{cases}$$

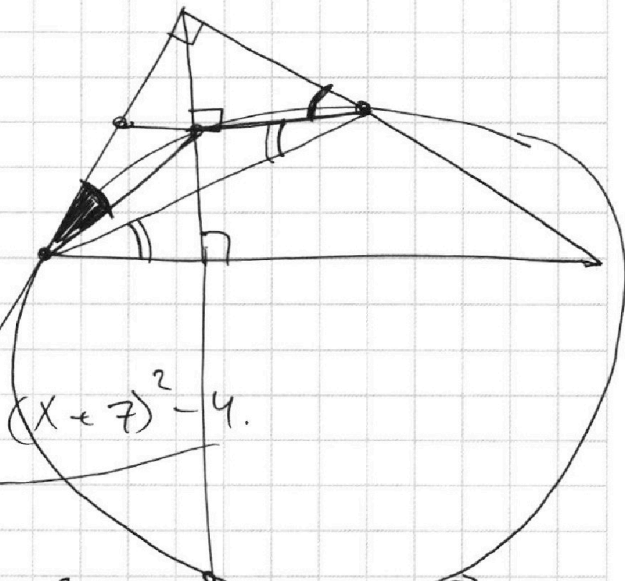
$$x^2 + 14x + 45 \rightarrow (x+7)^2 - 4.$$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 7 \\ a_2 + c_2 = 14 \\ b_2 + c_2 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_2 = 21 - 13 = 8 \\ a_2 = 4 \\ b_2 = 3 \\ c_2 = 10 \end{cases} \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} a_3 + b_3 = 11 \\ b_3 + c_3 \geq 15 \\ a_3 + c_3 = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_3 = 13, a \geq 7 \\ a = 7 \\ b = 5 \\ c = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(a+b+c) \geq (\dots).$$

$$\begin{cases} 2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 43 \\ 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 34 \Rightarrow \text{с.з.} \\ 2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 75 \end{cases}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~$\ln a$~~
 ~~$\ln b$~~

$$\log_7^5 y + 4 \log_7 y = -\frac{7}{2}$$

$$\log_7^5 6x + 4 \log_7 6x = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \log_7 y = -\log_7 6x \Rightarrow y = (6x)^{-1}$$

$$\frac{\ln y}{\ln 7} = -\frac{\ln 6x}{\ln 7}$$

$$\ln y = -\ln 6x$$

~~$$\Rightarrow y = -6x$$~~

$$\Rightarrow y \neq e^{\ln y} = e^{-\ln 6x}$$

~~$$e^{\ln y + \ln 6x} = 1$$~~

~~$$\ln y + \ln 6x = 0$$~~

~~$$\ln(6xy) = 0$$~~

$$\ln y + \ln 6x = 0$$

$$\ln(6xy) = 0, \quad 6xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{6}$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$e^{-\ln 6x}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$O(0,0)$, $P(-17, 68)$, $Q(2, 68)$, $R(19, 0)$.

$$4(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 40$$

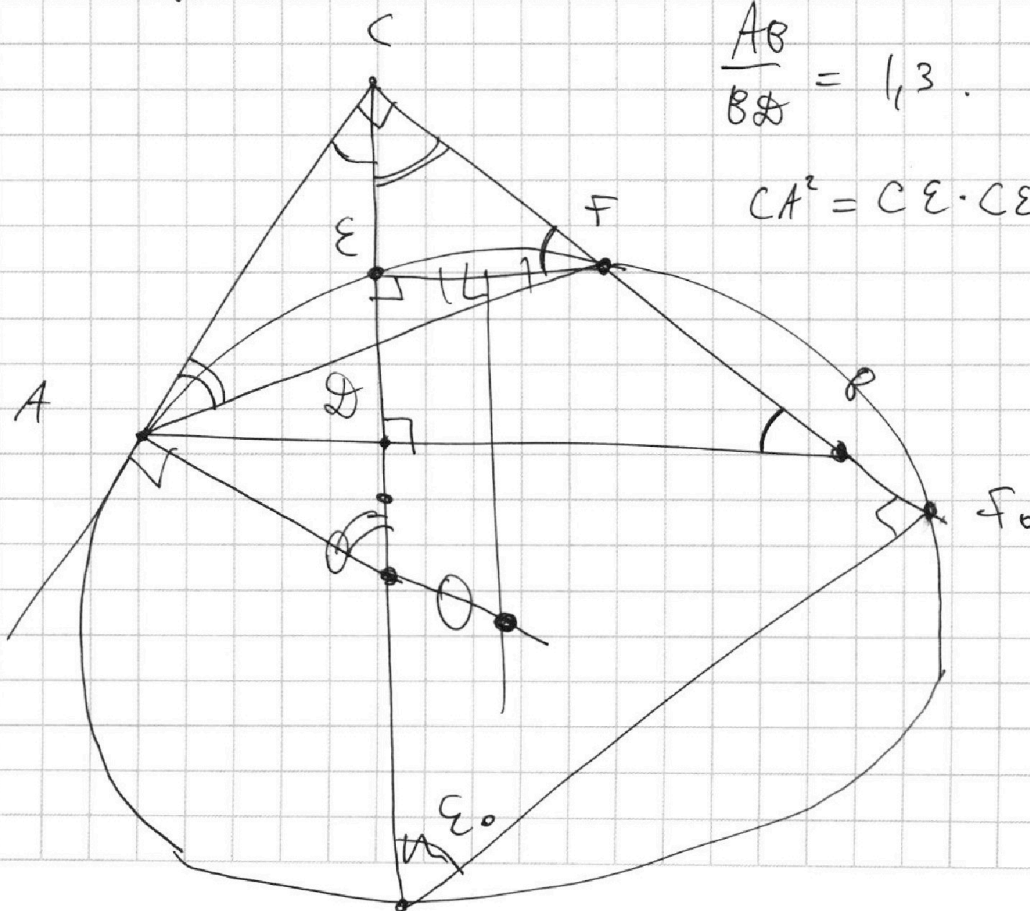
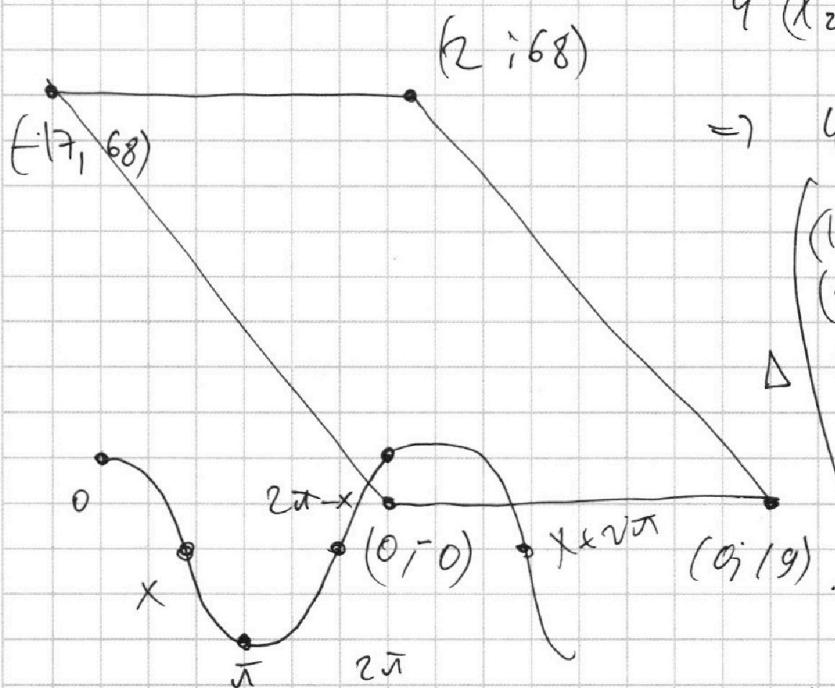
$$\Rightarrow 4\Delta x + \Delta y = 40$$

$$\Delta \begin{pmatrix} (1; 36) \\ (2; 32) \\ (3; 28) \\ \vdots \\ (10; 0) \end{pmatrix}$$

$$q \frac{S_{CEF}}{S_{ACR}} = \frac{CA^4}{(E_o \cdot CF_o \cdot (A \cdot C))}$$

$$\frac{AB}{BD} = 1,3$$

$$CA^2 = C\varepsilon \cdot C\varepsilon_0 = CF \cdot Cf_0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x.$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi + 2x}{10}\right).$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{3\pi + 2x}{10}\right)$$

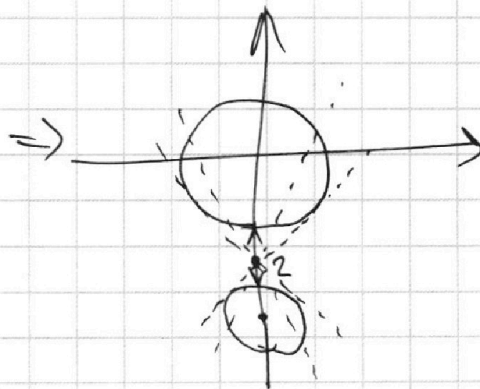
$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{3\pi + 2x}{10} + 2\pi k$$

$$5\pi - 10x = 3\pi + 2x + 20\pi k$$

$$12x = 2\pi + 20\pi k$$

$$x = \frac{\pi + 10\pi k}{6}.$$

$$\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

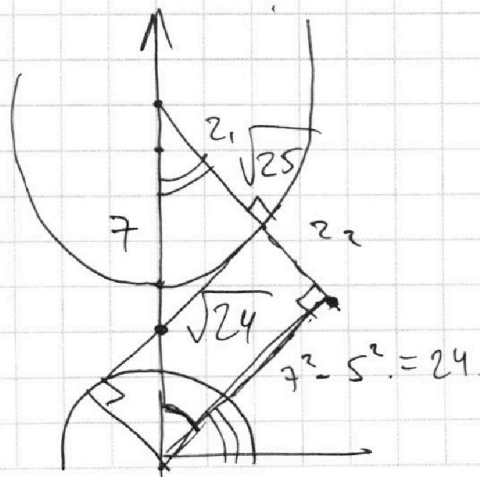


$$y = -\frac{x}{3a} + \left(\frac{7b}{3a}\right)$$

$$y = -\left(\frac{1}{3a}\right)x + C$$

$$y = kx + C$$

$$\cos \varphi = \frac{2\sqrt{6}}{5} \cdot \Delta$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x}(7) = \log_{36x^2} 343 - 4.$$

$$\left(\frac{\ln(6x)}{\ln(7)}\right)^4 - 2\left(\frac{\ln 7}{\ln 6x}\right) = \frac{\ln 343}{\ln(36x^2)} - 4$$

$$\left(\frac{\ln 6x}{\ln 7}\right)^4 - 2\frac{\ln 7}{\ln 6x} = \frac{3\ln 7}{2\ln 6x} - 4$$

$$\left(\frac{\ln 6x}{\ln 7}\right)^5 - \frac{7}{2} + 4\frac{\ln 6x}{\ln 7} = 0. = x(?)$$

$$2x^5 - 7 + 4x = 0.$$

$$\log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4$$

$$\left(\frac{\ln y}{\ln 7}\right)^4 + 6\left(\frac{\ln 7}{\ln y}\right) = \frac{5\ln 7}{2\ln y} - 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\ln 6x}{\ln 7}\right)^5 + 4\left(\frac{\ln 6x}{\ln 7}\right) = \frac{7}{2} \\ \left(\frac{\ln y}{\ln 7}\right)^5 + 4\left(\frac{\ln y}{\ln 7}\right) = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$(\ln 6x)^5 + 4(\ln 6x)(\ln 7)^4 + (\ln y)^5 + 4(\ln y)(\ln 7)^4$$



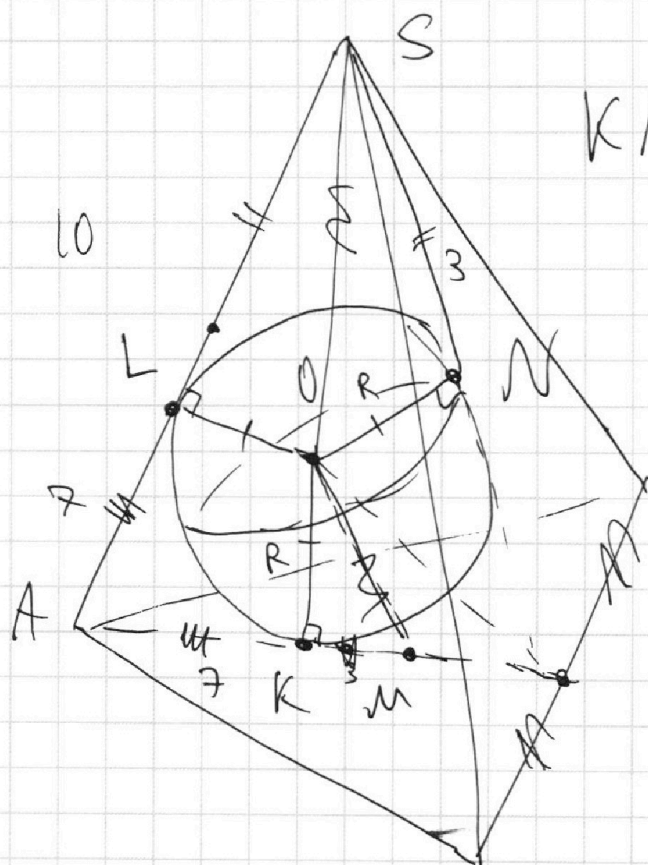
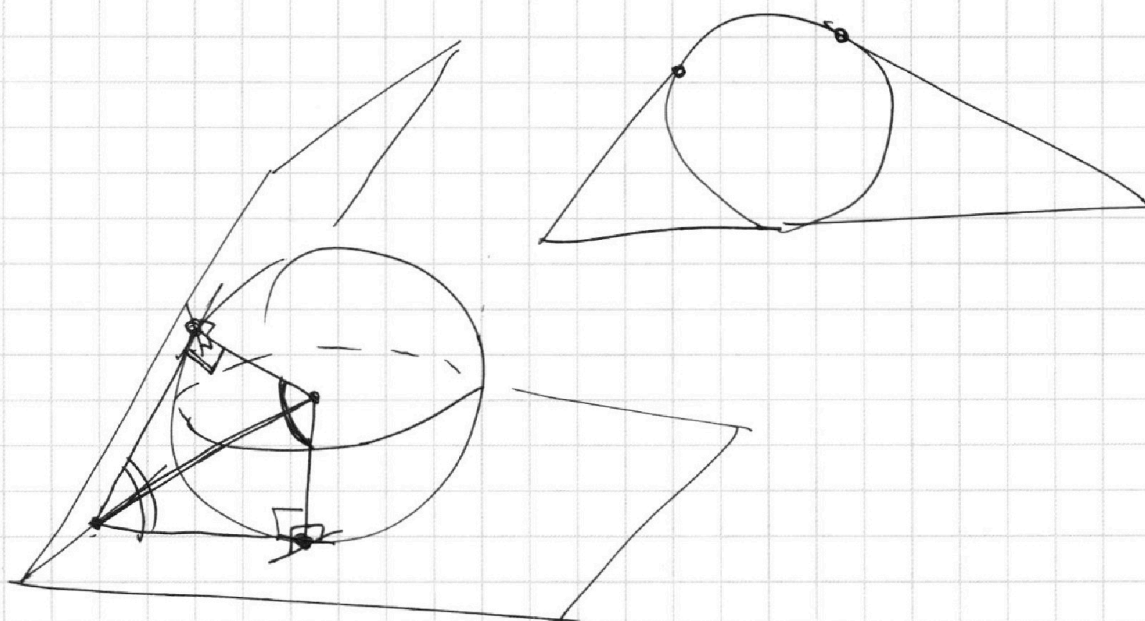
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$KN(???)$.



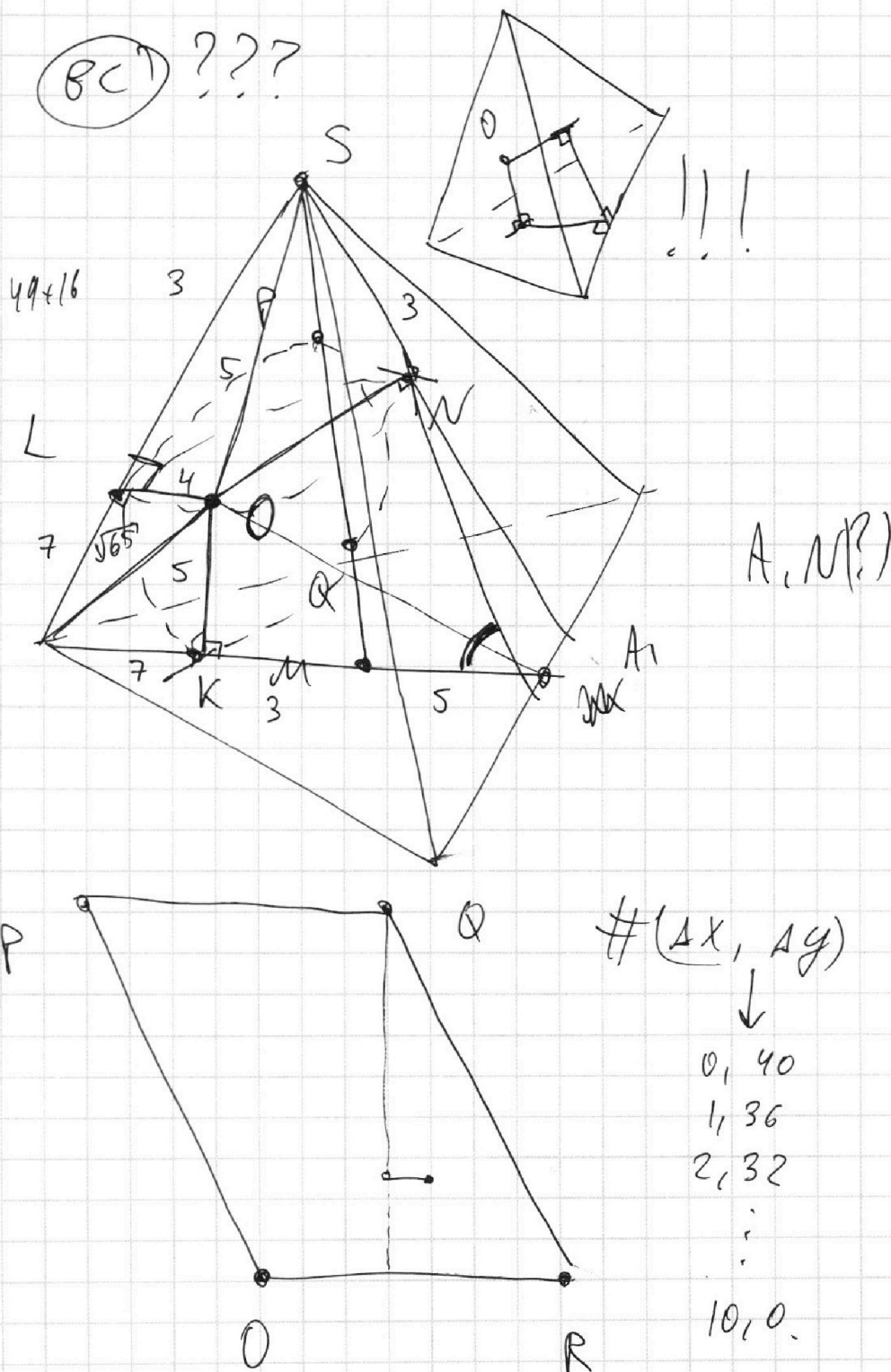
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

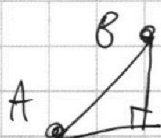
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

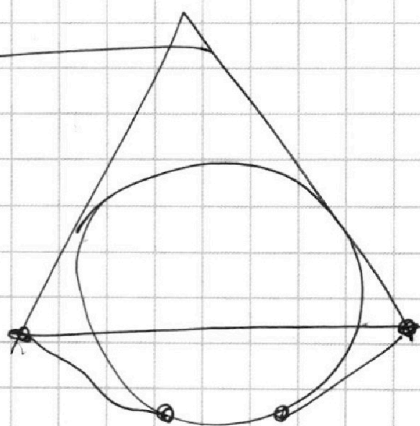
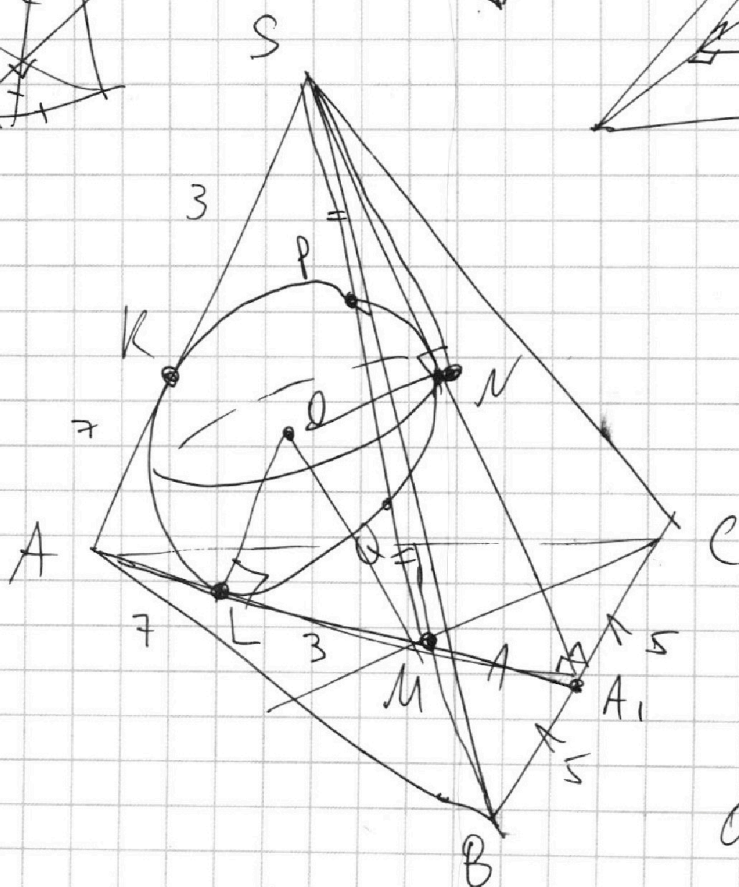
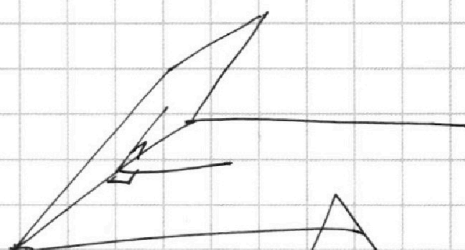
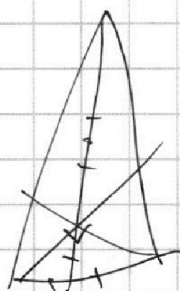
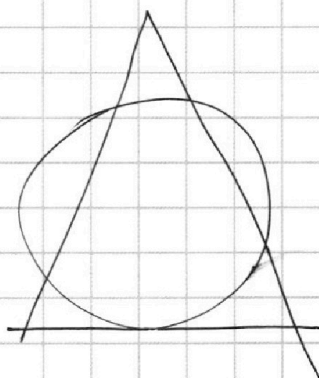
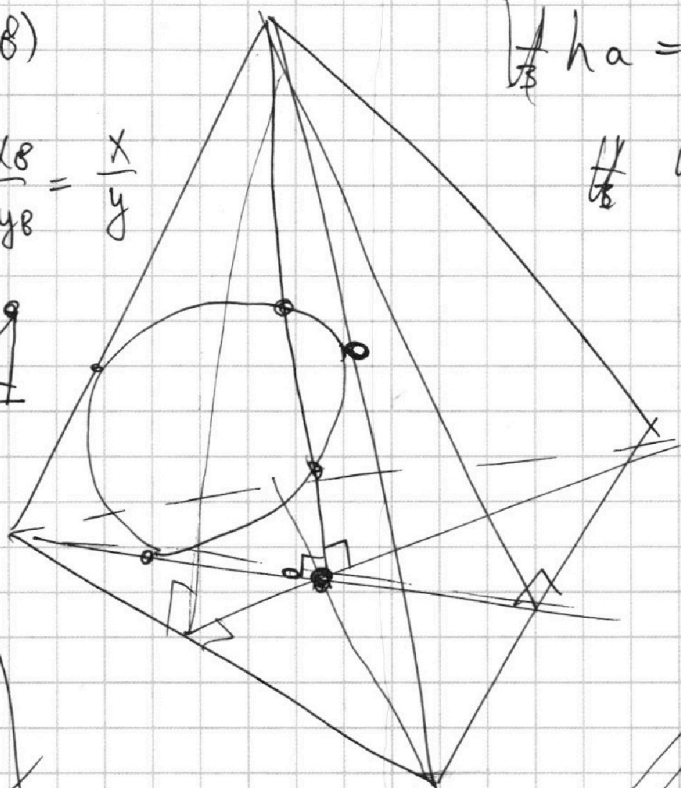
$\ell(A, B)$

$$\frac{x_A - x_B}{y_A - y_B} = \frac{x}{y}$$



$$h_a = \frac{2S}{bc} = \dots 12.$$

$$h_c = ?$$



$$OS = OM = 3.$$

$$OS = CA_1 = A_1B.$$

$$OM = MA_1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

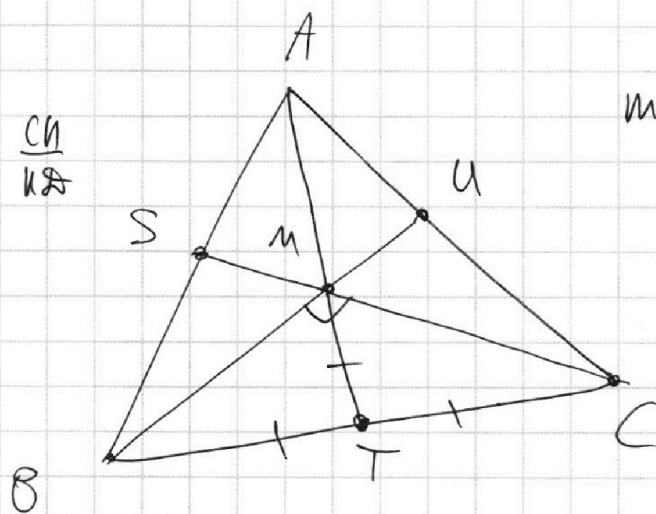
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

CE
DE

CE
DE



$$BC = AM$$

$$ma + da + d = mb + c + c$$

$$m = n = 5$$

$$25a + m^2a = mb^2 + nc^2$$

$$BC = 10$$

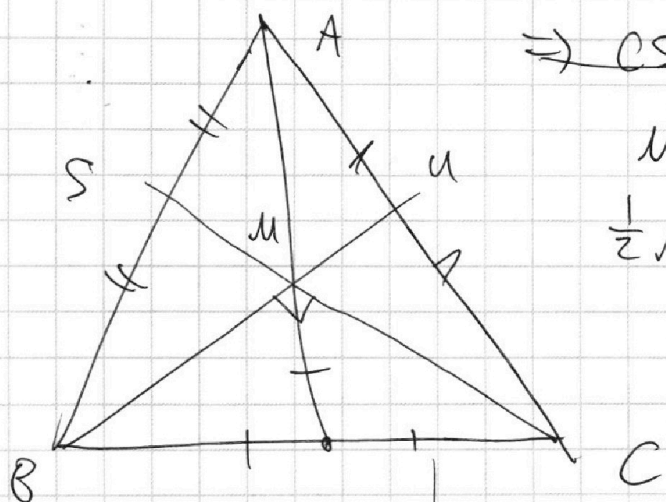
$$S = 60$$

$$AM = 10$$

$$\Rightarrow AT = 15$$

$$MC = MB = 5\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow BM \perp CM$$



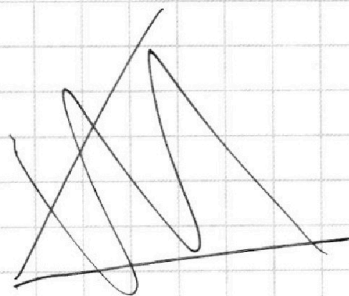
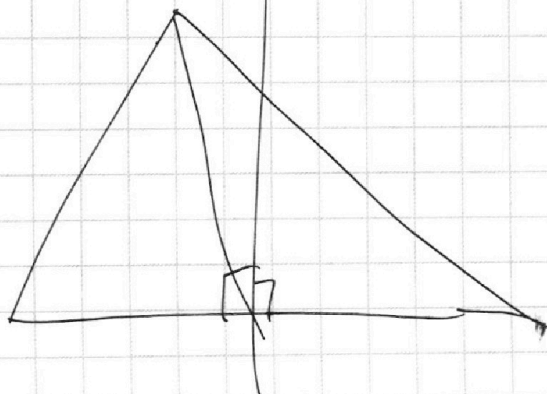
$$\Rightarrow CS = BU =$$

$$MB \cdot MC = \frac{4}{9} CS \cdot BU$$

$$\frac{1}{2} MB \cdot MC = S_{\Delta BMC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC}$$

$$MB \cdot MC = 40.$$

$$CS \cdot BU = 90 \Rightarrow CZ.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



SAOC.

Эм.

$$SP = MQ$$

$$S_{\triangle ABC} = 60$$

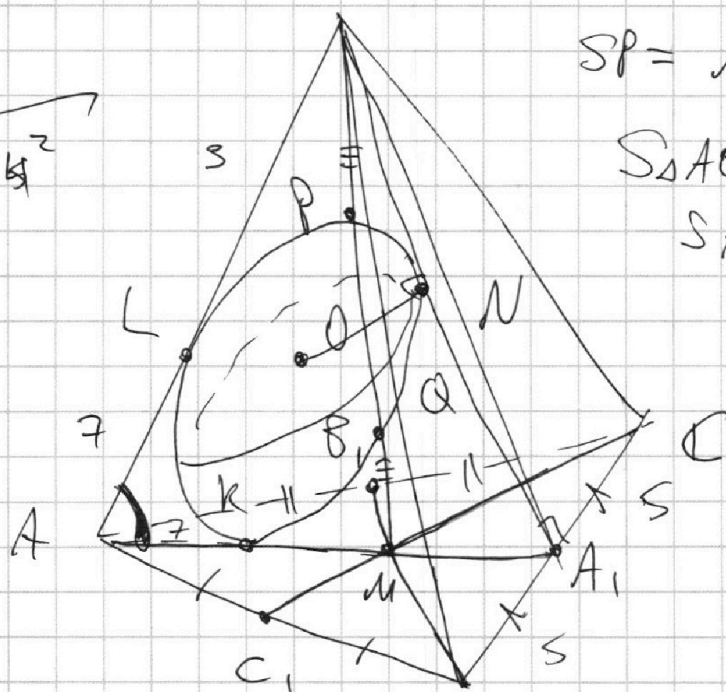
$$SA = BC = 10.$$

$$AA_1, BB_1, CC_1(?)$$

$$AL = AK = 7.$$

$$\varphi(?)$$

$$SN = 3$$

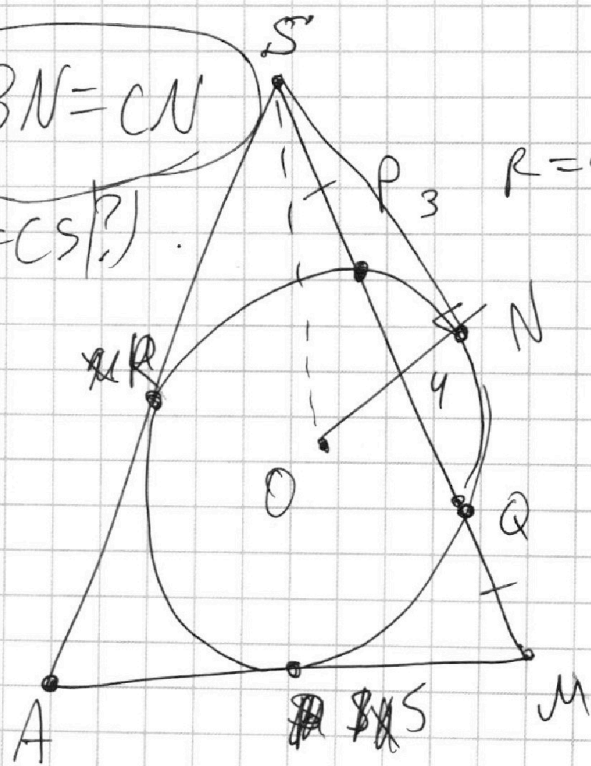
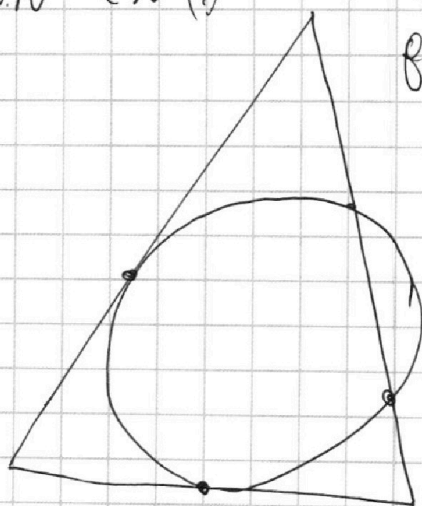


$$BN = CN(?)$$

$$BN = CN$$

$$BS = CS(?)$$

$$R = 4.$$



$$SP \cdot SQ = MQ \cdot MP$$

$$\Rightarrow MS = AS \Rightarrow AM = 10 = AS.$$

