



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$1) ab = k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}, k \in \mathbb{N}$$

$$2) bc = e \cdot 2^{17} \cdot 7^7, e \in \mathbb{N}$$

$$3) ac = p \cdot 2^{20} \cdot 7^{34}, p \in \mathbb{N}$$

$$\bullet \frac{1) \cdot 2)}{3)} \Rightarrow b^2 = \frac{ke}{p} \cdot \frac{2^{28}}{7^{10}} \quad ke \div 7^{10}$$

$$\bullet \frac{2) \cdot 3)}{1)} \quad e^2 = \frac{pe}{k} \cdot 2^{23} \cdot 7^{44} \quad \text{Числа } e$$

степень 7 ~~17~~  $\rightarrow k \div 7^6$

$$\bullet \frac{1) \cdot 3)}{2)} \quad a^2 = \frac{kp}{e} \cdot 2^{17} \cdot 7^{30}$$

$$\bullet 1) \cdot 2) \cdot 3) \quad (abc)^2 = kpe \cdot 2^{51} \cdot 7^{64}$$

~~Заметим~~  $ke \div 7^{10} \rightarrow kpe \div 7^{10}$ , также

$kpe$  должно быть кратно двум, чтобы степени двойки стала четной

$$kpe = 2^{2x+1} \cdot 7^{10}, \text{ где}$$

$$kpe \geq 2 \cdot 7^{10}$$

$$x \in \mathbb{N}$$

$$(abc)^2 \geq 2^{52} \cdot 7^{74} \quad abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$$

~~Пример когда~~  $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

$a =$

$$b = 2^5$$

$$c = 2^{12} \cdot 7^{21}$$

$$a = 2^9 \cdot 7^{11}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2.  $\frac{a}{b}$  - несократимая дробь  $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} \quad m-? \quad m \uparrow \max, \text{ где}$$

Дробь  $\frac{x}{y}$  можно сократить в том случае,

если  $\text{НОД}(x, y) \neq 1$ . ~~где~~  $\text{НОД}(a, b) = 1$

т.е. числа  $a$  и  $b$  взаимно просты.

Найдём  $\text{НОД}(a+b, a^2-6ab+b^2)$ , Заметим

что  $a+b$  и  $a^2-6ab+b^2$  можно сократить на

их ~~НОД~~,  $\text{НОД}(x, y) = \text{НОД}(x, y-x)$

$$\text{НОД}(x, y) = \text{НОД}(x, y-kx), \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{НОД}(a+b, a^2-6ab+b^2) = \text{НОД}(a+b, a^2-6ab+b^2 -$$

$$(a+b) \cdot (a+b)) = \text{НОД}(a+b, -8ab) = \text{НОД}(a+b,$$

$$8ab) = \text{НОД}(a+b, 8ab - 8b(a+b)) = \text{НОД}(a+b, -8b^2) =$$

$$= \text{НОД}(a+b, 8b^2) \quad \text{Заметим, что}$$

$$\text{НОД}(a+b, b) = 1 \rightarrow b^2 \text{ взаимно просто с } a+b$$

$$\rightarrow \text{НОД}(a+b, 8b^2) \leq 8$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Оценка  $\text{НОД}(a+b, 8b^2) \leq 8$

$\text{НОД}(a+b, a^2 - 6ab + b^2) \leq 8 \Rightarrow \boxed{m \leq 8}$

Пример: приведём пример, когда  $m = 8$

$a = 1 \quad b = 7$

$$\frac{1+7}{1-42+49} = \frac{8}{8}$$

Ответ:  $m_{\max} = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

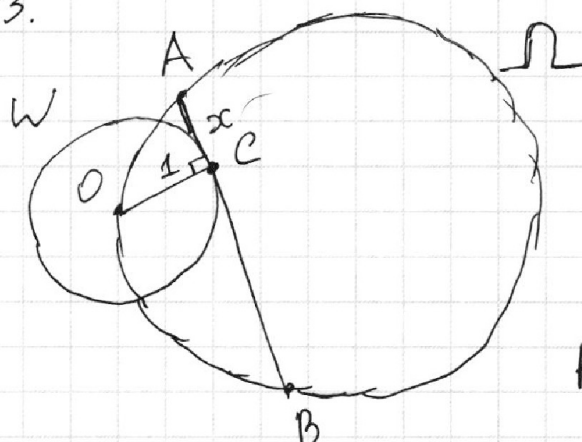


МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3.



$$\frac{AC}{CB} = 7, \text{ Пусть}$$

$$AC = x, \text{ тогда}$$

$$CB = 7x,$$

$$AB = 8x$$

$$R_W = 1, R_{\Omega} = 5$$

Пусть D - центр окружности W.

AB - касательная к окружности W  $\rightarrow$

$$OC \perp AB; \quad AO^2 = AC^2 + OC^2 \text{ (Th. Пифагора)}$$

$$AO = \sqrt{1 + x^2}, \text{ Аналогично } DB^2 = DC^2 + CB^2$$

$$OB = \sqrt{1 + 49x^2} \quad | \quad \triangle AOB \text{ (Th sin):}$$

$$\sin \angle ABO = \frac{1}{\sqrt{1 + 49x^2}}; \quad \frac{AO}{\sin \angle ABO} = 2 \cdot R_{\Omega}$$

$$\sqrt{1 + x^2} \sqrt{1 + 49x^2} = 2 R_{\Omega} = 10$$

$$(1 + x^2)(1 + 49x^2) = 100$$

$$x^2 = 1 \quad x = 1 \rightarrow AB = 8x = 8$$

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☒

5  
☐

6  
☐

7  
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4.

Решите уравнение.

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 2 - 7x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

Заметим, что  $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$  и  $2x^2 + 2x + 1$

Возведём в квадрат и не забудем, что правая часть  $\geq 0$

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = (2 - 7x)^2 + 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \\ 2 - 7x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 - 7x = (2 - 7x)^2 + 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \\ 2 - 7x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0 \end{cases}$$

$$(2 - 7x)(2 - 7x + 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 1) = 0$$

$$x = \frac{2}{7}; \quad 2 - 7x + 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 1 = 0$$

$$7x - 1 = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

Возведём в квадрат

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 1$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm 3}{4}$$
$$x \in \left\{ \frac{1}{2}, \frac{9}{4} \right\}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$49x^2 - 14x + 1 = 8x^2 + 8x + 4$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0 \quad D = 22^2 + 12 \cdot 41 = 976$$

$$x = \frac{22 \pm \sqrt{976}}{82}$$

$$x_1 = \frac{22 + \sqrt{976}}{82} = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$$

$$x_2 = \frac{22 - \sqrt{976}}{82} = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}$$

$$x \in \left\{ \frac{2}{4}, \frac{22 + \sqrt{976}}{82}, \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}, \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} \right\}$$

Заметим, что все проделанные образования  
можно только добавить в первоначальное уравнение  
лишние корни. Проверим все полученные корни.

$\frac{2}{4}$  подходит +

$$\frac{25}{41} < \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \leq \frac{27}{41}$$

$$\frac{25}{41} > \frac{1}{2}$$

~~Эти~~ эти корни появи-  
лись при

$$7x - 1 = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 4 - 14x + 7x - 1$$

$$2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 3 - 7x$$

корень  $\frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} > \frac{1}{2}$  и он не подходит

$$x > \frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☒

5  
☐

6  
☐

7  
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Корень  $\frac{11-2\sqrt{61}}{41}$  подходит, так как  
он отрицательный и  
противоречий с ~~не~~ преобразованиями нет.

$$x \in \left\{ \frac{2}{7}; \frac{11-2\sqrt{61}}{41} \right\}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{2}{7}; \quad x = \frac{11-2\sqrt{61}}{41}$$

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

Рассмотрим неравенство.

$$f(x) \cdot g(x) \leq 0 \rightarrow \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases} \vee \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases} \end{cases}$$

плоскость пространства внутри окружности с центром в  $(-8; 0)$  и радиусом 1

плоскость, которая не включает в себя окружность с центром в  $(0; 0)$  и радиусом 2

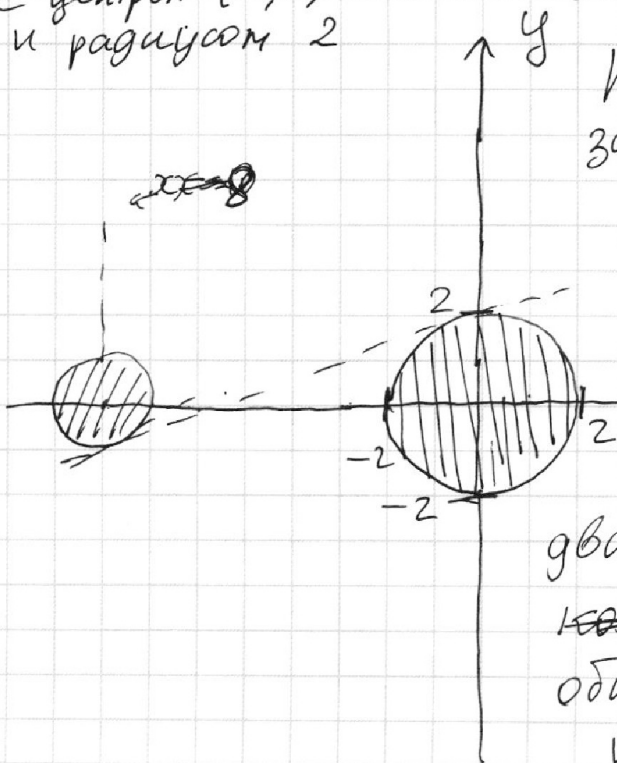
плоскость, которая не включает плоскость внутри окружности с центром в  $(-8; 0)$  и радиусом 1

плоскость внутри окружности с центром  $(0; 0)$  и радиусом 2

Неравенство образует заштрихованную область в координатах  $x; y$

$ax + 10b = y$  — это уравнение прямой

Чтобы система имела два решения, надо чтобы ~~каждой~~ эта прямая была общей касательной к двум окружностям.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

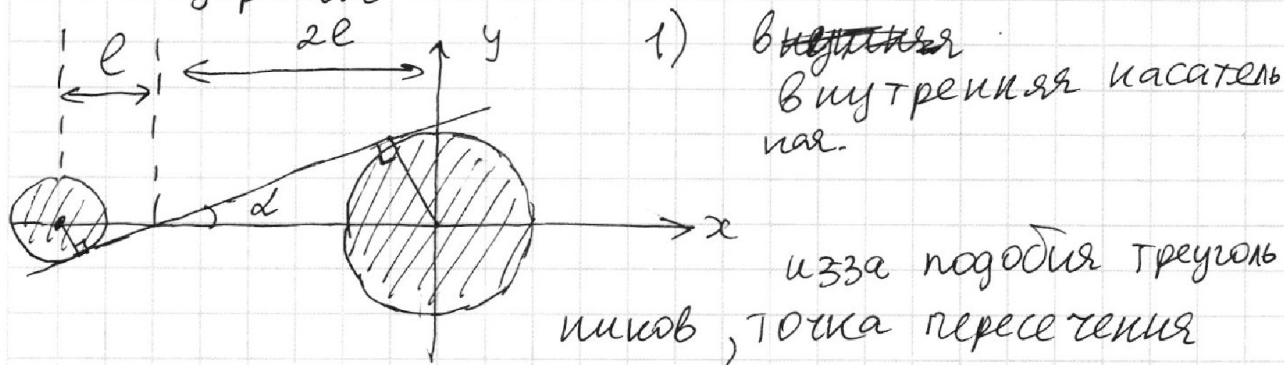
|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

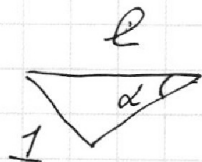
общая касательная может быть двух типов:

внутренняя и внешняя.



внутренней касательной с осью абсцисс будет делить отрезок соединяющий центры окружностей

как  $\frac{1}{2}$   $3e = 8$   $e = \frac{8}{3}$



$$\sin \alpha = \frac{1}{e} = \frac{3}{8}; \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{55}}{8}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{\sqrt{55}}$$

~~Заметим, что внутренняя касательная~~

Заметим, что другая внутренняя касательная симметрична этой отн. отрезка, соединяющего центры окружностей  $\rightarrow$  симметрична отн. оси  $X$ .

$$\rightarrow a = \pm \tan \alpha = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

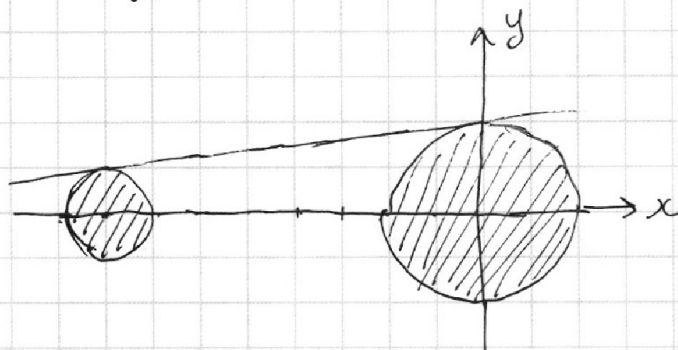
|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

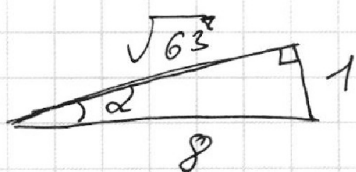
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2) внешняя касательная



Посмотрим на  
пересечение касательной  
с осью абсцисс



$$\sin d = \frac{1}{8} \quad \cos d = \frac{\sqrt{63}}{8} \quad \operatorname{tg} d = \frac{1}{\sqrt{63}}$$

$$a = \pm \operatorname{tg} d = \pm \frac{1}{\sqrt{63}}$$

$$\text{Ответ: } a \in \left\{ \pm \frac{3}{\sqrt{55}}; \pm \frac{1}{\sqrt{63}} \right\}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

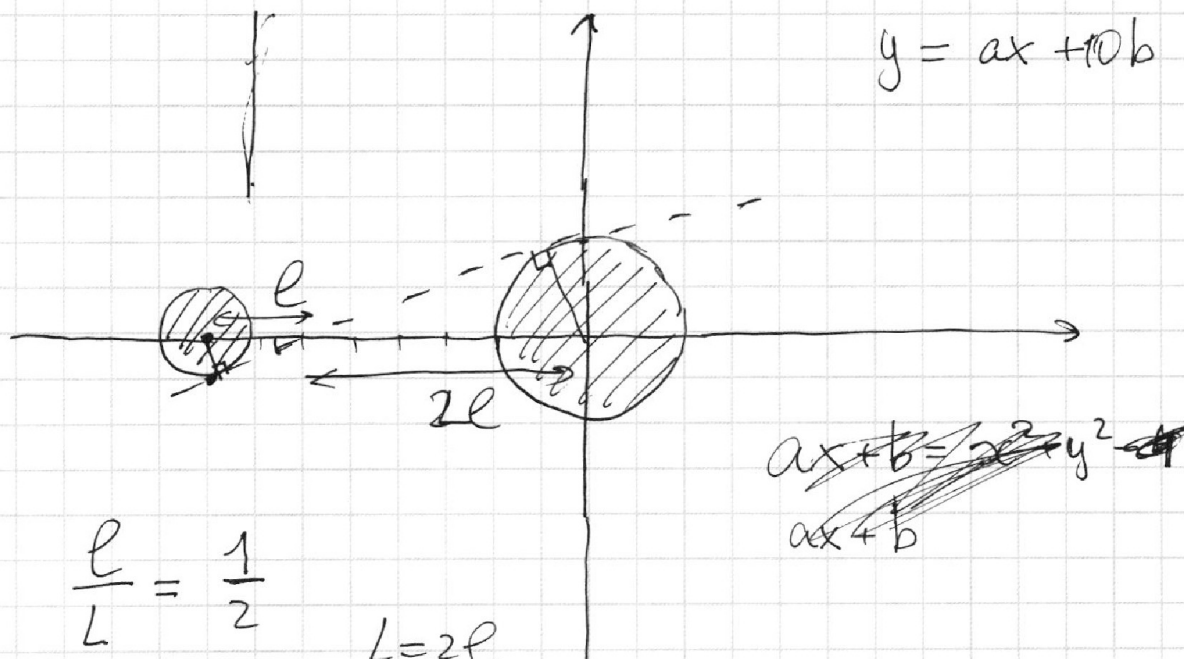
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

2 решение



$$\frac{l}{L} = \frac{1}{2}$$

$$L = 2l$$

$$3l = 8$$

$$l = \frac{8}{3}$$

$$\cos d = \frac{1}{\frac{8}{3}} = \frac{3}{8}$$

$$\operatorname{tg}^2 d \neq 1 = \frac{1}{\cos^2 d}$$

$$a \in \left[ -\infty; \sqrt{\frac{55}{3}} \right] \cup \left[ \sqrt{\frac{55}{3}}; +\infty \right]$$

$$\operatorname{tg}^2 d = \frac{64}{9} - 1$$

$$\operatorname{tg}^2 d = \frac{55}{9} \neq \frac{\sqrt{55}}{3}$$

$$\operatorname{tg} d = \frac{\sqrt{55}}{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(2-7x)(2-7x+2\sqrt{2x^2+2x+1}-1)=0$$

$$\begin{cases} 2-7x=0 \\ 2-7x+2\sqrt{2x^2+2x+1}-1=0 \end{cases} \quad x = \frac{2}{7}$$

$$7x-1=2\sqrt{2x^2+2x+1}$$

$$49x^2-14x+1=8x^2+8x+4$$

$$41x^2-22x-3=0$$

$$484 + 492 = 976$$

$$C = 2^{12} \cdot 7$$

$$C =$$

$$44-38$$

$$C^2 =$$

$$b = 25$$

$$C = 7^4$$

$$K = 7^6$$

$$\begin{array}{r} \times 31 \\ 31 \\ \hline 93 \\ \hline 961 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 976 \overline{) 4} \\ \underline{8} \phantom{00} \\ 17 \phantom{00} \end{array}$$

$$b = 25$$

$$22 \cdot 22$$

$$\begin{array}{r} \times 22 \\ 22 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline 484 \end{array}$$

$$17 \cdot 2$$

$$\begin{array}{r} \times 91 \\ 12 \\ \hline 82 \\ 41 \\ \hline 492 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 484 \\ + 492 \\ \hline 976 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 244 \overline{) 4} \\ \underline{61} \phantom{00} \end{array}$$

$$C^2 = 2^{24} \cdot 7^{46} = 2^{12} \cdot 7^{23}$$

$$K = 7^4$$

$$P = 2$$

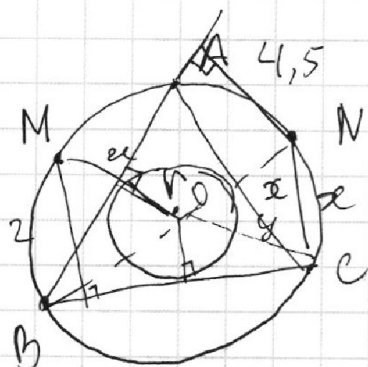
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

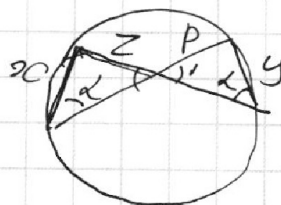
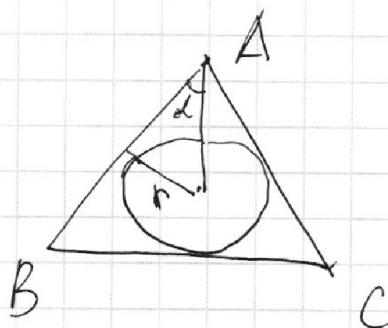
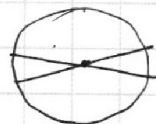
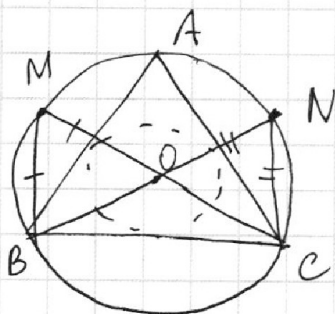


$$\frac{r}{4,5} = \frac{BN - x}{BN}$$

$$\frac{r}{2} = \frac{CM - x}{CM}$$

$$BN \cdot x =$$

$$MO \cdot x$$



$$\frac{x}{p} = \frac{z}{p}$$

$$px = yz$$

$$\frac{r}{\sin \alpha}$$

$$\frac{r}{4,5} = \frac{r}{\sin \beta}$$

$$x \cdot BM = y$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$O(0;0) \quad P(-12;24)$$

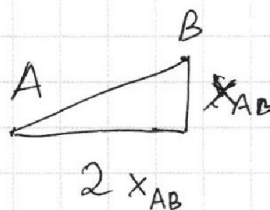
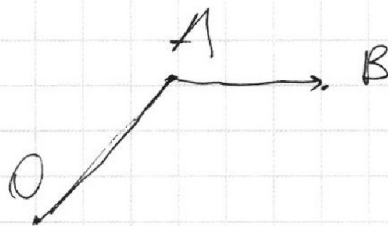
$$Q(3;24) \quad R(15;0)$$

$$A(x_1; y_1) \quad B(x_2; y_2)$$

с целыми координатами

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2x_2 + y_2 = 12 + 2x_1 + y_1$$



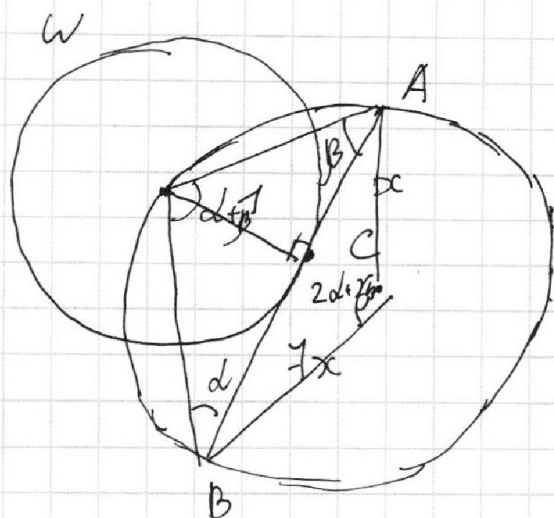
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AC/CB = 7$$

$$\frac{8x}{\sin(\alpha + \beta)} = 10$$

$$1 + 49x^2$$

$$\frac{1 + 49x^2}{\sin^2 \beta} = 100$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\frac{1 + x^2}{\sin^2 \alpha} = 100$$

$$(1 + 49x^2)(1 + x^2) = 100$$

$$1 + 50x^2 + 49x^4 = 100$$

$$50 \quad 49x^4$$

$$x = 1$$

$$AB = 8$$

4.

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 2 - 7x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 4 - 28x + 49x^2 + 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 + 2x + 1} +$$

$$2x^2 + 2x + 1$$

$$2 - 7x = (2 - 7x)^2 + 2 \cdot (2 - 7x) \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1.  $a, b, c$   $ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$

$bc : 2^{17} \cdot 7^{17}$

$ac : 2^{20} \cdot 7^{37}$

$ab = k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$

$bc = p \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}$

$ac = e \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$

$(abc)^2 = kpe \cdot 2^{51} \cdot 7^{64}$

$kpe = 2$

$abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$

$k=2 \quad p=1 \quad e=1$

$ab = 2^{35} \cdot 7^{10}$

$b^2 = 2^{12}$

$bc = 2^{17} \cdot 7^{17}$

$b^2 = \frac{kp}{e} \cdot \frac{2^{11}}{7^{10}}$

$ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$

$c^2 =$

2.  $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$

$m$

НОД  $(a+b, a^2-6ab+b^2)$

НОД  $(a, b) = 1$

НОД  $(a+b, 8ab)$   $b^2 \div a+b$

$m = 8$

НОД  $(b^2, a+b) = 1$

НОД  $(a+b, -8b^2) =$

НОД  $(a+b, 8b^2) = 8$

$\frac{8}{1-42+49} = 1$

$a+b$

$8b^2$

$\frac{a+b}{b^2}$

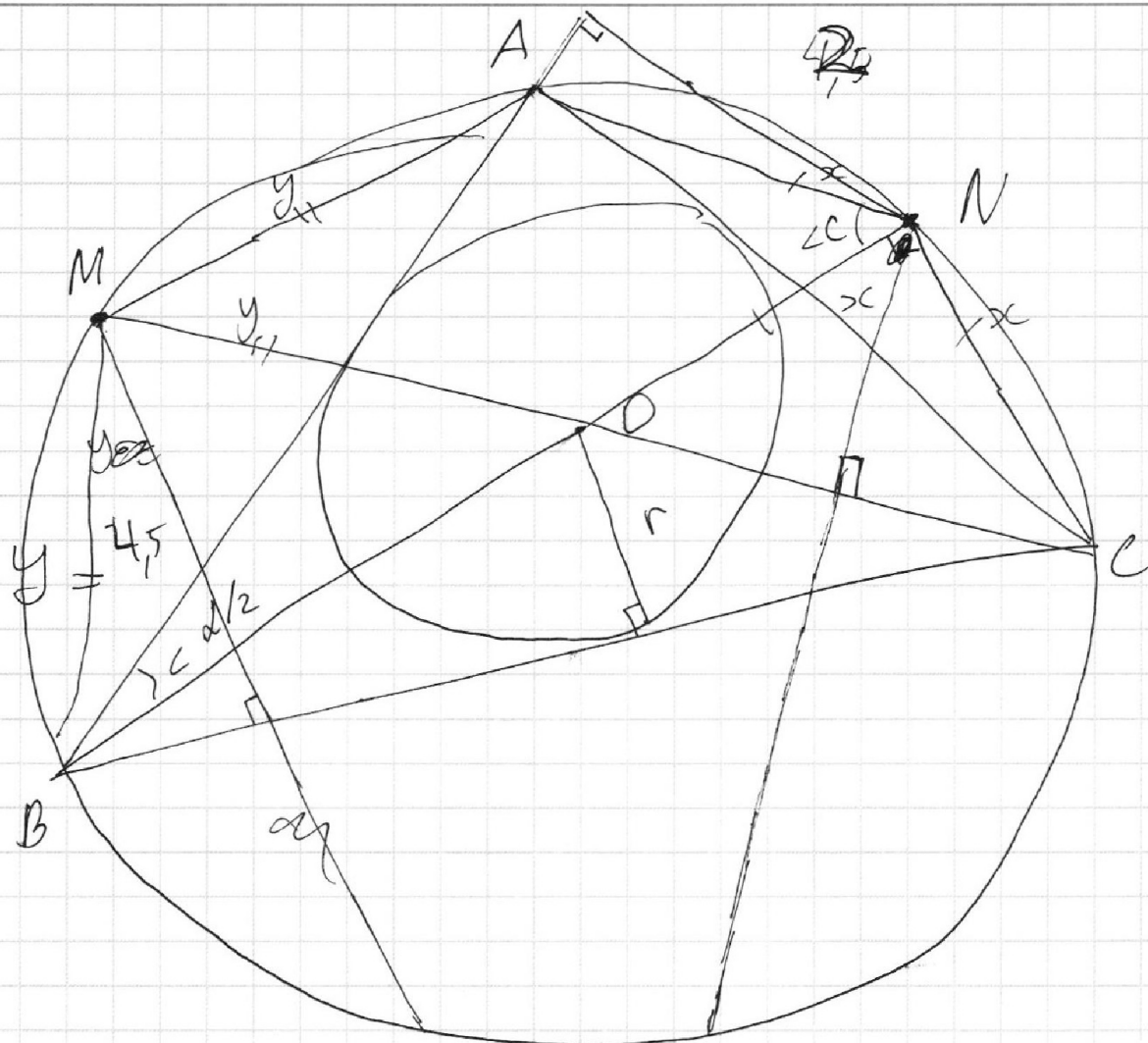
$\frac{8b^2}{a+b}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$B = \frac{125}{1} \sin \beta$$

$$M = \frac{24.5}{\sin 8}$$

$$\frac{r}{\sin d} = ?$$

$$BN = x + 2y \sin d$$

$$CM = 2x \sin d + y$$

$$C_0 = 2x \sin d$$

$$\frac{95}{2}$$

$$\frac{r}{4,5} = 1 - \frac{x}{BN}$$

$$\frac{r}{2} = 1 - \frac{2x \sin d}{CM}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

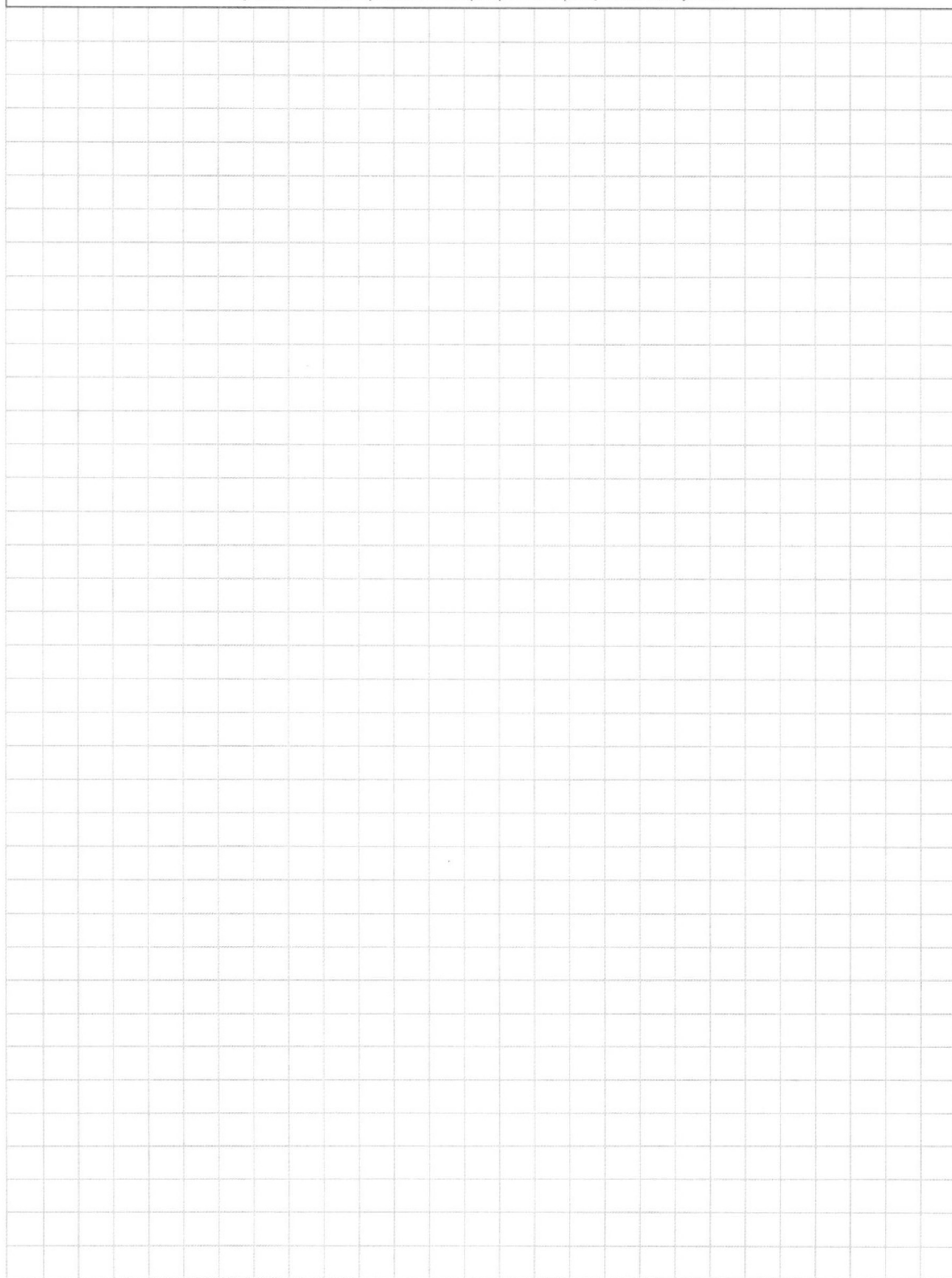
5  
☐

6  
☐

7  
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





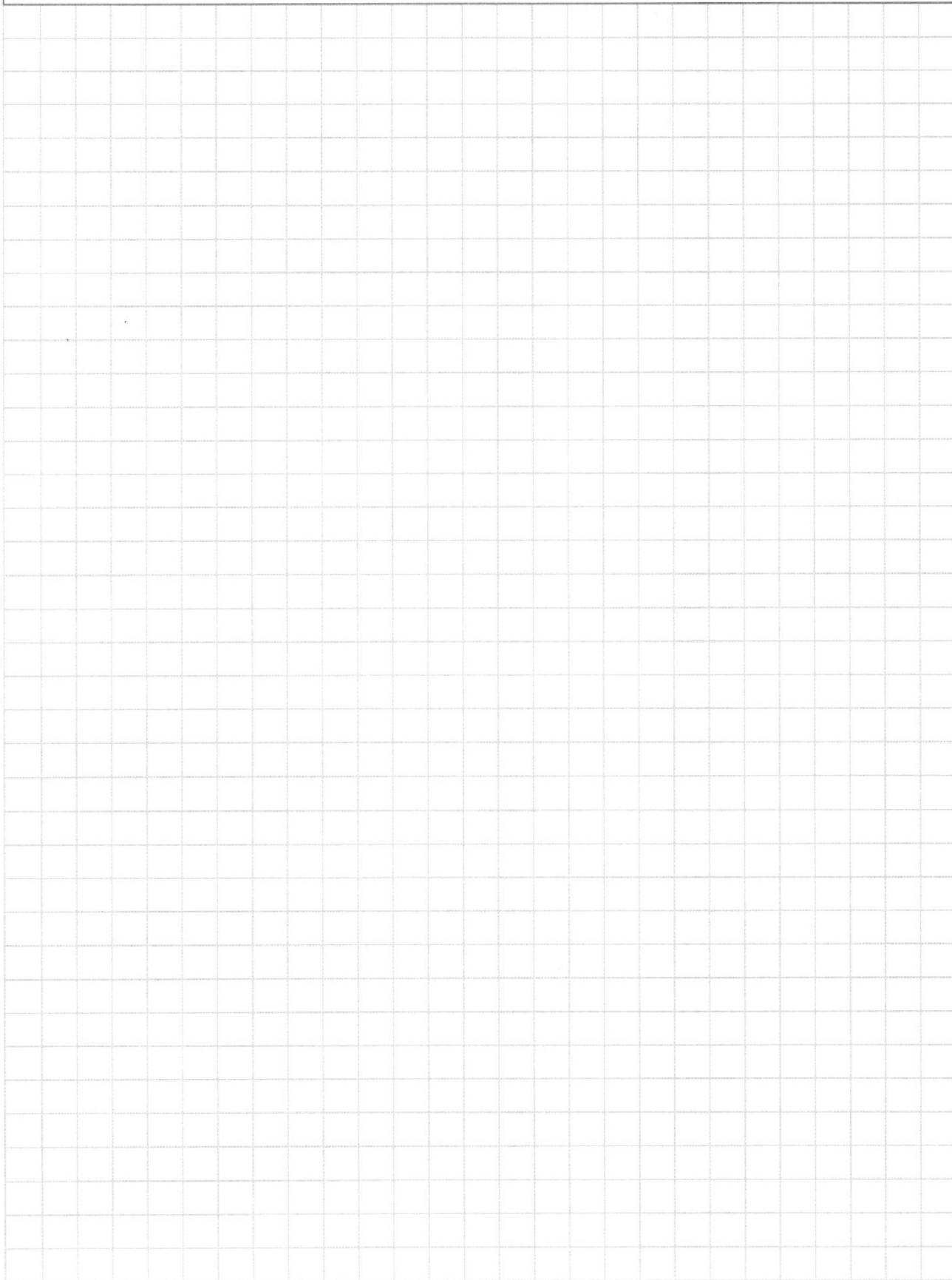
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{r}{z} - \frac{r}{y} = \frac{x}{x+2y\sin\alpha} - \frac{2x\sin\alpha}{y+2x\sin\alpha}$$

$$\frac{r}{z} - \frac{r}{y} = \frac{xy + \cancel{2x^2\sin\alpha} - \cancel{2x^2\sin\alpha} + 2xy\sin\alpha}{(x+2y\sin\alpha)(y+2x\sin\alpha)}$$

$$90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \angle \frac{B}{2} + \angle \frac{C}{2}$$

$$\angle \frac{B}{2} - \angle \frac{C}{2}$$