



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$1. \quad ab = m \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}, \quad m, n, k \in \mathbb{Z}$$

$$bc = n \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac = k \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$$

Погда:

$$abc = \sqrt{2mnk} \cdot \sqrt{2^{50} \cdot 7^{64}} = \sqrt{2mnk} \cdot 2^{25} \cdot 7^{32}$$

Наименьшее значение abc будет достигаться тогда и только тогда, когда $\sqrt{2mnk}$ минимально. Заметим, что

$$\sqrt{2mnk} \in \mathbb{Z} \text{ и } \sqrt{2mnk} \neq 1 \text{ (в этом случае, если)}$$

$$2mnk=1, \text{ то } mnk=\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}. \text{ Тогда } mnk=2:$$

$$\sqrt{2mnk} = 2. \text{ Если } n=1, m=1, k=2, \text{ то } mnk=2 \text{ и}$$

$$abc = 2^{26} \cdot 7^{32} - \text{минимальное значение}$$

$$\text{Ответ: } 2^{26} \cdot 7^{32}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

☐

2

☒

3

☐

4

☐

5

☐

6

☐

7

☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2. $\text{НОД}(a; b) = 1$ — по условию

$$\text{Пусть } \begin{cases} a \equiv -b \\ (a+b)^2 - 8ab \equiv 0 \end{cases} \quad \text{Тогда } 8ab \equiv 0.$$

$$\begin{cases} a \equiv -b \\ 8ab \equiv 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a^2 \equiv 0 \\ 8b^2 \equiv 0 \end{cases}$$

Поскольку числа a и b взаимно просты, то и a^2 и b^2 взаимно просты. Тогда $8 \equiv 0$, а значит $m = 8$ — наименьшее значение m .

$$\text{Пример: } a = 5 \text{ и } b = 3 : \begin{cases} 8 \equiv 0 \\ -56 \equiv 0 \end{cases}$$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

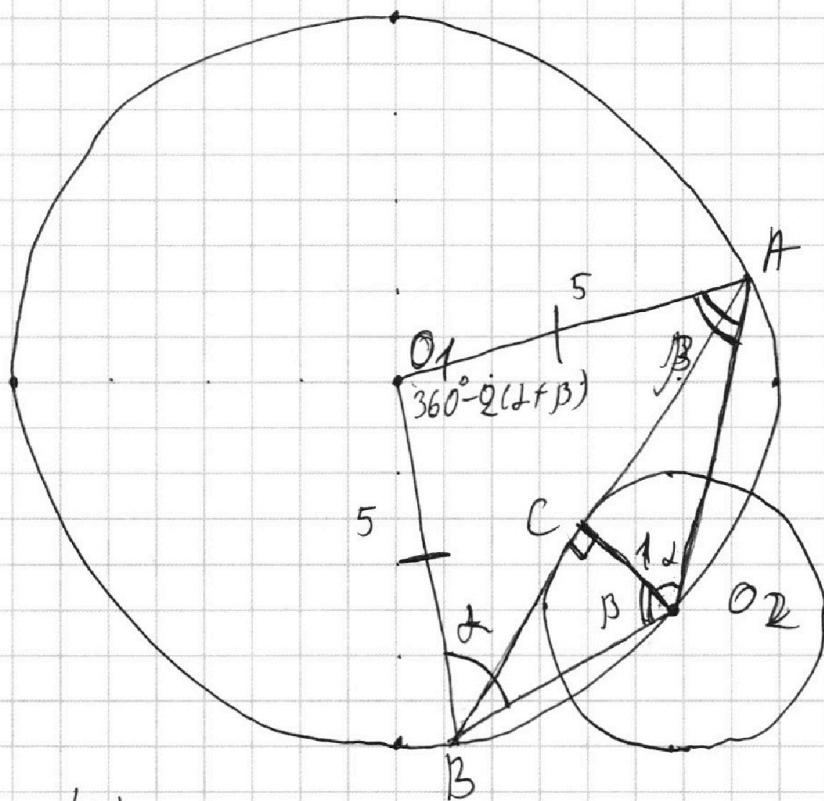
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3.



$$\frac{AC}{CB} = 7$$

$$r=1, R=5$$

$$AB = ?$$

$$O_2C \perp AB$$

$$O_2C = 1 = r$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = 7$$

$$\sin 2\alpha \sin \beta = 7 \sin \beta \cos 2\alpha$$

По теореме синусов: $AB = 10(\sin 2\alpha \sin \beta + \sin \beta \cos 2\alpha) =$

$$= 80 \sin \beta \cos 2\alpha; \quad \boxed{AB = 80 \sin \beta \cos 2\alpha}$$

$$\angle O_1BO_2 = 2 + \beta - 90^\circ + 90^\circ + \beta = 2, \quad \angle O_1AO_2 = \beta$$

$$O_1O_2 = O_1A = O_2B = 5 \Rightarrow \triangle O_1AO_2 \text{ и } \triangle O_1BO_2 -$$

равнобедренные с углами 2 и β при основаниях соответственно. Тогда $AO_2 = 10 \cos \beta$, $O_2B = 10 \cos 2\alpha$.

Значит, что $BC \sin 2\alpha = 10$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Замени, что~~

$$\frac{\sin \beta}{BC} = \cos \alpha$$

~~Замени, что~~

$$\frac{\sin \beta}{BC} = \cos \beta$$

Получи:

$$AB = 80 \quad BC \cos 2 \cos \beta$$

$$\text{Получи как } \cos 2 = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{10 \cos \beta}, \text{ или}$$

$$AB = 8 \cos \beta$$

$$80 \sin \beta \cos 2 = \frac{80 BC}{\cos A - \cos B} = \frac{80 BC}{100 \cos 2 \cos \beta} = AB$$

$$\frac{80}{100 \cos 2 \cos \beta} - 1 = 7 \quad (\Rightarrow) \quad \cos 2 \cos \beta = \frac{8}{100} = \frac{2}{25} =$$

$$= (\cos A - \cos B) = 1 \quad (\Rightarrow) \quad \cos A - \cos B = \frac{25}{1}$$

$$\cos 2 \cos \beta = \frac{1}{10} \quad (\Rightarrow) \quad \cos A - \cos B = 10$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4. Замена:
$$\begin{cases} \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = a \geq 0 \\ \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = b \geq 0 \end{cases}$$

Получа:

$$a - b = a^2 - b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b & (1) \\ a = -b & (2) \end{cases}$$

(1):
$$\begin{cases} -5x + 3 = 2x + 1 \\ 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{2}{7}}$$

(2): $a = -b$. Так как $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases}$$
 Но эти два квадратных уравнения равны $\Leftrightarrow x = \frac{2}{7}$ и при этом при $x = \frac{2}{7}$ $2x^2 - 5x + 3 \neq 0$. Значит систем $a = -b$ не существует или гр. корней.

Ответ: $\frac{2}{7}$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6.
$$\begin{cases} y = -ax - 10b; & (1) \\ [(x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0; & (2) \end{cases} \quad a: \exists b: \text{решение}$$

(1) — прямая

(1) — множество из окружности с центром в точке $(-8; 0)$ радиуса 1 и окружности

(2) — множество, состоящее из круга с окружностью с центром $(-8; 0)$ радиуса 1 и круга с окружностью с центром $(0; 0)$ радиуса 2 (рассмотрим случаи, когда $(x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0$, а $x^2 + y^2 - 4 \geq 0$ и $(x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0$ и $x^2 + y^2 - 4 \leq 0$ убеждаемся в вышесказанном)

Условию задачи ($a: \exists b: \text{решение}$) удовлетворяют такие и только такие a , при которых $y = -ax - 10b$ параллельна одной из общих касательных к окружностям,

изображенных на рисунке.

Здесь изображены две внешние и две внутренние касательные к окружностям.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

$l: y = kx + b$ - общая касательная к окружностям

Пусть:

$$x^2 + (kx + b)^2 = 4$$

$$x^2 + k^2 x^2 + 2bkx + b^2 = 4$$

$$(k^2 + 1)x^2 + 2bkx + b^2 - 4 = 0; \text{ единственное решение}$$

$$D_1 = b^2 k^2 - (k^2 + 1)(b^2 - 4) = b^2 k^2 - b^2 k^2 + 4k^2 - b^2 + 4 = 4k^2 - b^2 + 4 = 0$$

$$4k^2 - b^2 + 4 = 0$$

$$(x+8)^2 + k^2 x^2 + 2bkx + b^2 = 1; \text{ единственное решение}$$

$$x^2 + 16x + 64 + k^2 x^2 + 2bkx + b^2 = 1 = 0$$

$$(1+k^2)x^2 + 2(bk+8)x + 63+b^2 = 0$$

$$D_1 = (bk+8)^2 - (63+b^2)(1+k^2) =$$

$$= b^2 k^2 + 16bk + 64 - 63 - 63k^2 - b^2 - b^2 k^2 =$$

$$= -63k^2 - b^2 + 16bk + 1 = 0$$

$$63k^2 + b^2 - 16bk - 1 = 0$$

$$\begin{cases} 4k^2 - b^2 + 4 = 0 \\ 63k^2 + b^2 - 16bk - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$256k^2 - 64bk + 3b^2 = 0 \quad | : b^2$$

$$256\left(\frac{k}{b}\right)^2 - 64\left(\frac{k}{b}\right) + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{k}{b} = \frac{1}{16} \\ \frac{k}{b} = \frac{3}{16} \end{cases}$$

Мет. 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$b = 16k:$$

$$4k^2 - (16k)^2 + 4 = 0$$

$$k = \pm \frac{1}{\sqrt{63}} - \text{уловий}$$

координат насаильной
и окружности

$$\text{Ответ: } a = \pm \frac{1}{\sqrt{63}}, a = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$$

$$b = \frac{16}{3}k$$

$$4k^2 - \frac{256}{9}k^2 + 4 = 0$$

$$36k^2 - 256k^2 + 36 = 0$$

$$220k^2 = 36$$

$$k = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$$

Мет. 3



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \alpha = -\cos(\beta + \gamma) = \sin \beta \sin \gamma - \cos \beta \cos \gamma =$$
$$= \frac{\sqrt{(36R-81)(R-1)}}{R^2} - \frac{(R-1)(2R-9)}{2R^2}$$

$$\frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{m}{8} = \sin \beta \cos \gamma = \frac{1}{25} \sin \beta \cos \gamma$$

$$\cos^2 \beta = \frac{m^2}{8}$$

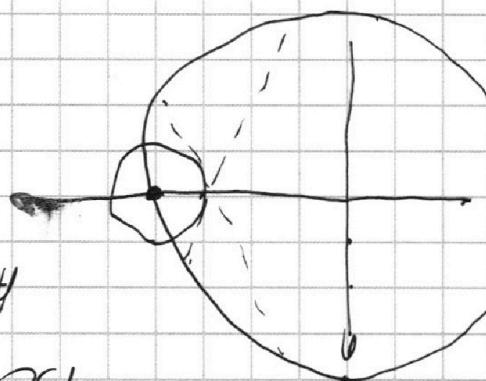
$$8 - \frac{100 \cos^2 \beta}{1} = 8$$

$$t = 1 - \frac{100 \cos^2 \beta}{1} - 1 = 7$$

$$\frac{R_C}{R_B} = \frac{1}{100 \cos^2 \beta}$$

$$R_C = \frac{0.24 \cdot 0.2 \beta}{\frac{R_C}{R_B}} = \frac{100 \cos^2 \beta}{R_C} = R_B$$

$$\sin \beta \cos \gamma = ?$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

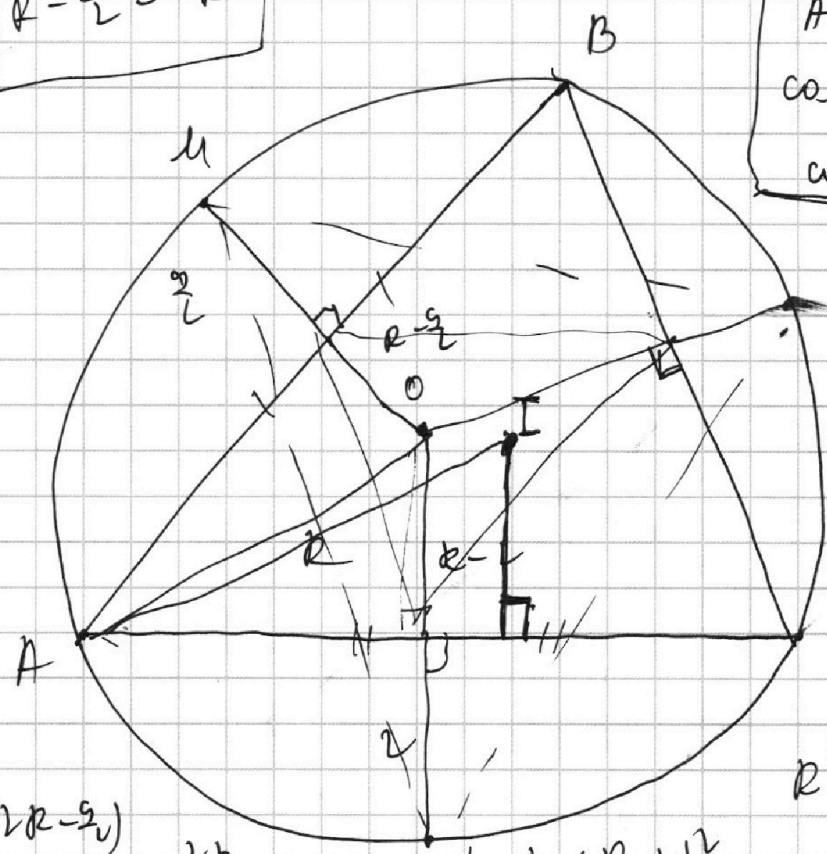
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$R - \frac{9}{2} = R$$

$$\begin{aligned} AB &= 9(2R - \frac{9}{2}) \\ AC &= 4(R - 1) \\ \cos \beta &= \frac{R - 1}{R} \\ \cos \gamma &= \frac{R - \frac{9}{2}}{R} \end{aligned}$$



$$\sin \delta = \frac{9(2R - \frac{9}{2})}{2R}$$

$$\begin{aligned} R^2 - (R - 1)^2 \\ (R - R + 1)(R + R - 1) \\ 2(2R - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14 + 17 + 10 \\ 34 + 17 \end{aligned}$$

$$R^2 - R^2 + 2R - 1 = 4 \quad (51)$$

$$\frac{9(2R - \frac{9}{2})}{\sin \delta} = 2R$$

$$\frac{9(2R - \frac{9}{2})$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6.

$$R^2 - R^2 + 4R - 4$$

Кисаице

$$x^2 + 16x + 64 + a^2 x^2 + 2abx + 100b^2 = 1$$

$$64^2 = \begin{array}{r} 41 \\ 40960 \\ + 5625 \\ \hline 46585 \end{array}$$

$$a = ?$$

$$160ab - 63a^2 - 100b^2 + 160$$

$$160ab + 64 - 63a^2 - 100b^2 - 63a$$

$$(a^2 + 1)x^2 + 2(10ab + 8)x + (100b^2 + 63) = 0$$

$$100a^2b^2 + 160ab + 64 - 100a^2b^2 - 63a^2 - 100b^2 - 63a = 0$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ 415 \\ \hline 2125 \end{array}$$

$$a^2 - 25b^2 + 1 = 0$$

$$63a^2 + 100b^2 - 160ab = 1$$

$$x^2 + a^2x^2 + 2abx + 100b^2 - 4 = 0$$

$$(a^2 + 1)x^2 + 2abx + 100b^2 - 4 = 0$$

$$D_1 = 100a^2b^2 - (a^2 + 1)(100b^2 - 4)$$

$$\begin{array}{r} 12.3 \\ 3^2.4 \end{array}$$

$$6^2_{3^2.2} = 100a^2b^2 - 100a^2b^2 + 4a^2 - 100b^2 + 4$$

$$x^2 \quad 64a^2 + 75b^2 - 160ab = 0$$

$$4a^2 - 100b^2 + 4 = 0$$

$$D = 5625 + 160 \cdot 64 \cdot 4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\boxed{h_9} = 4 \cdot 49 - 5 \cdot 49$$
$$4924 \cdot 824 - 92 \cdot 49 + 7 \cdot 952$$
$$92 \cdot 49$$

$$4924 \cdot 824 - 4 \cdot 49 + 7 \cdot 952 = 92$$
$$2 \cdot 49$$

$$p_3(p-4) + 4(p+1)$$

$$\boxed{p=2}$$

$$8BC \rightarrow 4924 \cdot 824 + 4 \cdot 49 + 7 \cdot 952 = 92$$

$$4924 \cdot 824 + 4 \cdot 49 = 49 - 4 \cdot 49$$

$$4924 \cdot 824 + 4 \cdot 49 = 49 - 4 \cdot 49$$

$$49$$

$$\boxed{h=4}$$

$$p=4$$

$$p=4$$
$$4924 \cdot 824 + 4 \cdot 49 = 49 - 4 \cdot 49$$

$$4924 \cdot 824 + 4 \cdot 49 = 49 - 4 \cdot 49$$

$$80 \cos 2 \cos \beta - 1 = 7$$
$$\cos 2 \cos \beta = 4$$

$$\cos 2 \cos \beta = 1$$

$$\cos 2 \cos \beta = 1$$

$$\boxed{h=8}$$

$$\sqrt{4p-2} =$$

$$\frac{2}{4(p+1)}$$

$$\frac{2p}{4(p+1)}$$

$$\frac{2p}{4(p+1)}$$

$$9(2p+4,5) = 2p \sin x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3.

$$\frac{5-\sqrt{5}}{4}$$

$$R = \frac{5+\sqrt{5}}{4}$$

$$AB = 80 \sin \angle CAB$$

$$AB =$$

$$R_W = 1$$

$$R_\Omega = 5$$

$$AB = 9 \left(\frac{5+\sqrt{5}-4}{4} \right)$$

$$\frac{2}{4} (\sqrt{5}-4)$$

$$4. \sqrt{\frac{2x^2-5x+3}{a}}$$

$$a-b =$$

$$\frac{81(2R-\frac{9}{2})^2}{4R^2} +$$

$$a-b = a^2 - b^2$$

$$R-\frac{9}{2}$$

$$\frac{4(R-\frac{9}{2})^2}{b^2} + \frac{(R-\frac{9}{2})^2}{R^2}$$

$$90^\circ$$

$$\frac{5}{\sin(2-50^\circ)}$$

$$\frac{AC}{CB} = 7 \quad | \quad AB-!$$

$$\frac{5R^2-10R+5}{R^2} = 1$$

$$4R^2-10R+5=0$$

$$D_1 = 25-20=5$$

$$-\sqrt{\frac{2x^2+2x+1}{b}} = -7x+2$$

$$R = \frac{5+\sqrt{5}}{4}$$

$$\frac{4R^2-8R+4+R^2-2R+1}{R^2} = 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1. $ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$

$bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$

$ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$

$k, l, n \in \mathbb{N}$

$abc \rightarrow m/m$

$34+17=51$

$ab = k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$

$20+14+17$

$bc = l \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}$

$34+17=51$

$37+17+10=54$

$ac = n \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$

$k \neq 1$
 $l \neq 1 \Rightarrow \cancel{k \cdot l = 1} \Rightarrow$
 $n \neq 1 \Rightarrow \cancel{min}$

$(abc)^2 = k \cdot l \cdot n \cdot 2^{51} \cdot 7^{64}$

$abc = 7^{32} \sqrt{k \cdot l \cdot n} \cdot 2^{25} \sqrt{2}$

$abc = 2^{25} \cdot 7^{32} \sqrt{2 \cdot k \cdot l \cdot n}$

$\sqrt{2 \cdot k \cdot l \cdot n} \in \mathbb{N}$

$3, 7$

$k \cdot l \cdot n = 2$

$5, 3$

$k=1$
 $l=1$
 $n=2$

$2^{26} \cdot 7^{32}$

2. $\text{НОД}(a, b) = 1$

$a+b: m$

$(a+b)^2 - 8ab: m$

34

$\Rightarrow 8ab: m$

$a+b: m$

$8ab \equiv 0 \pmod{m}$

$8a^2: m$

$8b^2: m$

$m_{\max} = 8$

$\frac{8}{25+9-50} = \frac{8}{-16} = -\frac{1}{2}$

$a \equiv -b \pmod{m}$

$6 \cdot 8 \cdot 7 - 8$

$8b^2: m$

$56 \cdot$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$R - L \ll R \omega \omega \delta$

$$R - L = R \omega \omega \delta$$

$$\cos \beta = \frac{R - L}{R}$$

$$\sqrt{\frac{R - L}{R}}$$

$$\sin \beta = \frac{4 \sqrt{R - L}}{2R} =$$

$$\frac{R - L}{R}$$

$$\frac{2 \sqrt{R - L}}{2R}$$

$$\sin \beta =$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} = \frac{AC}{CB} = 7$$

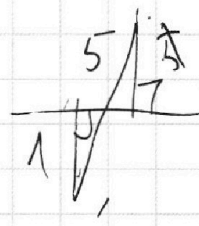
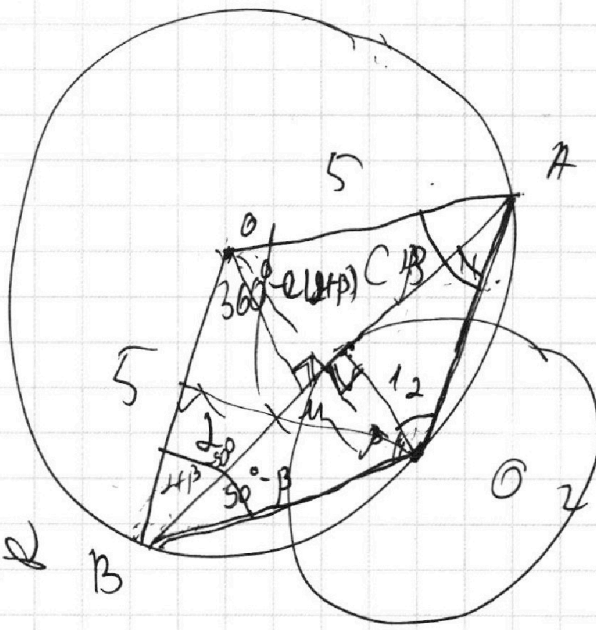
$$\frac{\sin \alpha \cos \omega \omega \delta}{\sin \beta \cos \omega \omega \delta} = 7$$

$$\frac{AC}{O_1 M} =$$

$$AB = 10 \sqrt{83} \text{ м}$$

$$AB = 80 \sin \beta \cos \omega \omega \delta$$

$$\frac{BC}{O_2 B} \cdot O_2 A$$



3,5 часа

$$\frac{AC}{CB} = 7$$

$$r = 1$$

$$R = 5$$

$$\frac{R - (1 + (R^2 - 4R - 1))}{R^2} = 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4. $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = -7x + 1$

Замечаем: $\begin{cases} \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = a \\ \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = b \end{cases}$

Получим

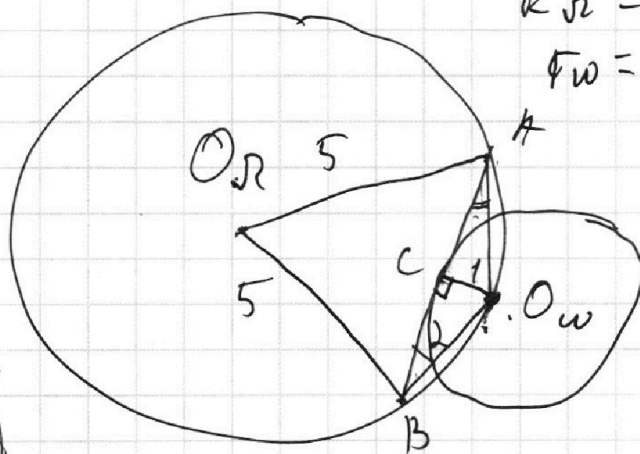
$a - b = a^2 - b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 3 = 2x + 1 \\ 2x^2 - 5x + 3 = 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{7} \end{cases}$



$\frac{8}{49} - \frac{10}{7} + 3$
 $\frac{8}{49} - \frac{70}{49} + 3$
 $-\frac{62}{49} + 3 \neq 0$

3.



$R_R = 5 = R$
 $r_w = r = 1$

$\frac{AC}{CB} = 7$

$\frac{AC}{CB} = \frac{c \cos A}{c \cos B}$

$c \cos A + c \cos B = AB$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

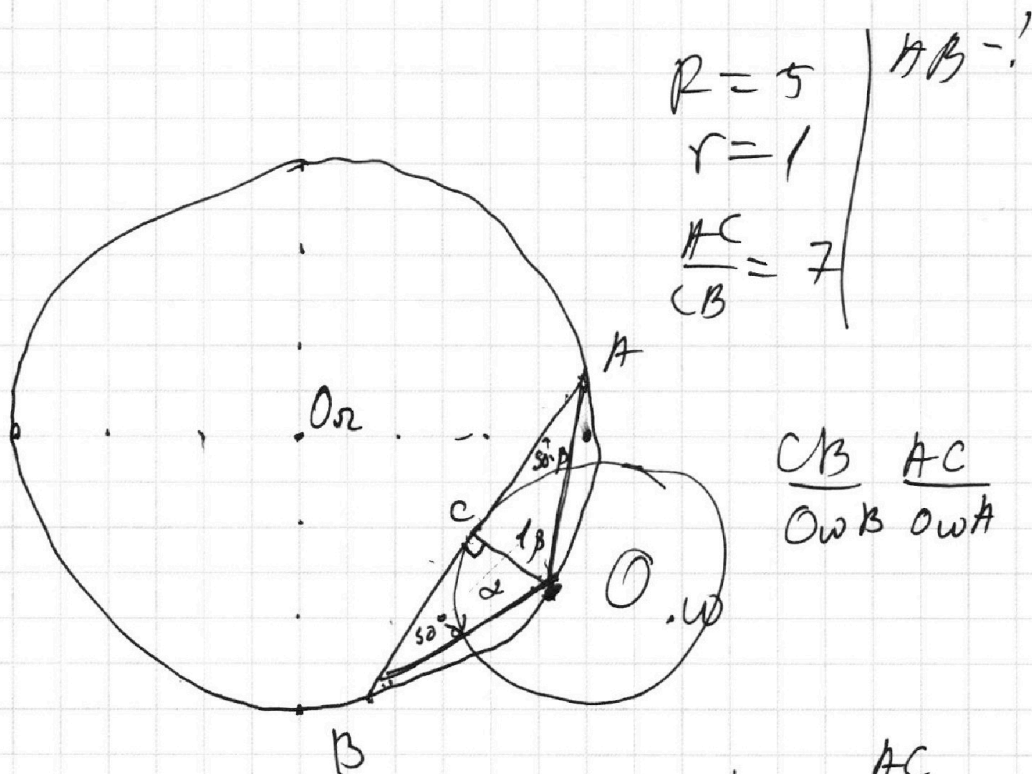
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3.



$$\begin{array}{l} R=5 \\ r=1 \\ \frac{AC}{CB}=7 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} AB-! \end{array} \right.$$

$$\frac{CB}{O_2B} \quad \frac{AC}{O_1A}$$

$$\frac{AB}{\sin(\alpha+\beta)} = 10$$

$$\tan \beta = \frac{AC}{1}$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \cos \beta} = 7$$

$$\frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = 7$$

$$\frac{AB}{\sin(\alpha+\beta)} = 10$$

$$10 \sin(\alpha+\beta)$$

$$10(\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha)$$

$$80 \sin \alpha \cos \beta$$

$$BC =$$

$$\frac{O_2B}{\cos \beta} = 10$$

$$O_2B = 10 \cos \beta$$

$$O_1A = 10 \cos \alpha$$

$$7 \sin \alpha \cos \beta = \sin \beta \cos \alpha$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3.

AB - ?

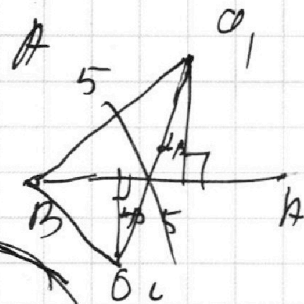
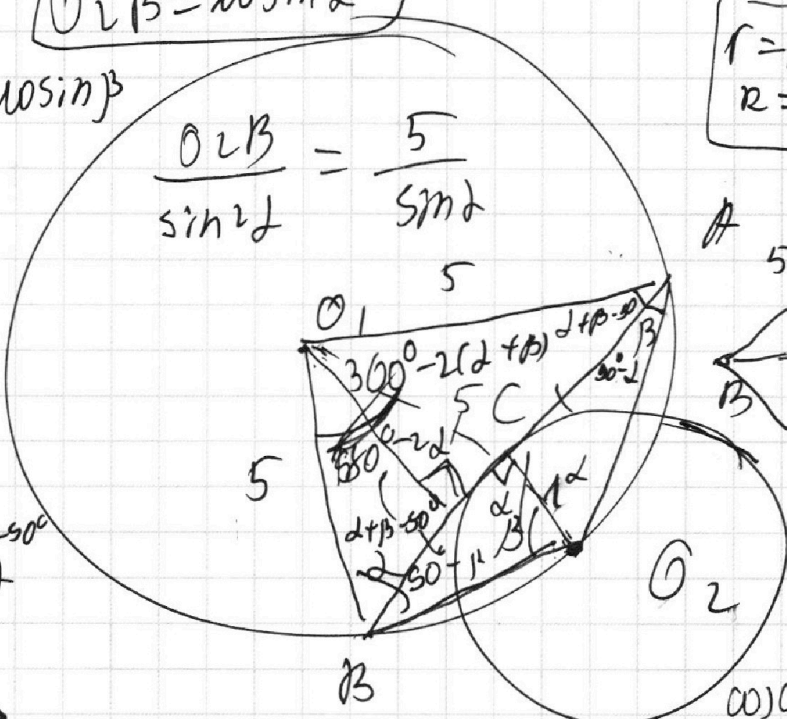
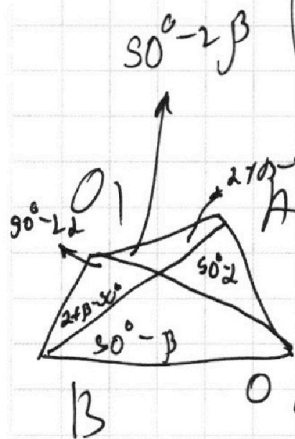
$$\frac{AC}{CB} = \frac{7}{7}$$

$$\begin{matrix} r=1 \\ R=5 \end{matrix}$$

$$O_2B = 10 \sin 2$$

$$O_2A = 10 \sin \beta$$

$$\frac{O_2B}{\sin 2} = \frac{5}{\sin 2}$$



$$\frac{\cos 2}{\cos \beta} = \frac{AC}{CB} = 7$$

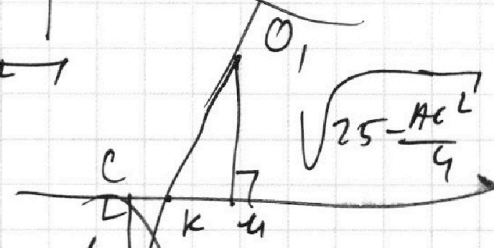
$$\frac{\sin 2 \cos \beta}{\sin \beta \cos 2} = 7$$

$$AB = 10(\sin 2 \cos \beta + \sin \beta \cos 2)$$

$$AB = 80 \sin \beta \cos 2$$

$$100 \sin^2 2 - 1 + 100 \sin^2 \beta - 1 = AB^2 - 5 - \frac{AC^2}{4}$$

$$100(\sin^2 2 + \sin^2 \beta) - 2 = AB^2$$



$$\frac{AC}{CB} = 7$$

$$\frac{AM}{MC} = 1$$

$$\sqrt{25 - \frac{AC^2}{4}} = \frac{MK}{KC}$$

$$\sqrt{25 - \frac{AC^2}{4}} = 1 = \frac{MC}{KC}$$

$$100(\sin^2 2 + \sin^2 \beta) - 2 = 80 \sin \beta \cos 2$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + (ax + 10b)^2 = 4 \quad \text{— ищем единственные решения}$$

$$(a^2 + 1)x^2 + 20abx + 100b^2 - 4 = 0 \quad \Delta = 400a^2b^2 - 4(a^2 + 1)(100b^2 - 4) = 400a^2b^2 - 400a^2b^2 + 16a^2 + 16 - 400b^2 + 16 = 16a^2 - 400b^2 + 32 = 0$$

$$D_1 = 100a^2b^2 - (a^2 + 1)(100b^2 - 4) = 100a^2b^2 - 100a^2b^2 + 4a^2 + 4 - 100b^2 + 4 = 4a^2 - 100b^2 + 8 = 0$$

$$\boxed{a^2 - 25b^2 + 2 = 0}; (*) \quad \frac{55}{6} = \frac{0 \cdot 22 \cdot 55}{98} \quad \frac{55}{6} = \frac{0 \cdot 22 \cdot 55}{98}$$

$$(x + 8)^2 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 = 1 \quad \text{— единственные решения}$$

$$(a^2 + 1)x^2 + 2(10ab + 8)x + 100b^2 + 63 = 0$$

$$D_1 = 100a^2b^2 + 160ab + 64 - 100a^2b^2 - 63a^2 - 100b^2 - 63 = -63a^2 - 100b^2 + 160ab + 1 = 0$$

$$\boxed{63a^2 + 100b^2 - 160ab - 1 = 0}; (**)$$

Или, равносильно, чтобы (*) и (**) выполнялись одновременно:

$$\begin{cases} a^2 - 25b^2 + 2 = 0 \\ 63\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 160\left(\frac{a}{b}\right) + 75 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 25b^2 + 2 = 0 \\ 63a^2 - 160ab + 100b^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Получаем:

$$64a^2 - 160ab + 75b^2 = 0$$

$$64\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 160\left(\frac{a}{b}\right) + 75 = 0$$

$$D_1 = 6400 - 4800 = 1600 = 40^2$$

$$\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{80 + 40}{64} = \frac{120}{64} = \frac{60}{32} = \frac{30}{16} = \frac{15}{8} \\ \frac{a}{b} = \frac{40 - 40}{64} = \frac{0}{64} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{40}{64} = \frac{5}{8}$$

лист 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3. \sin \beta = \frac{4(R-1)}{2R}$$

$$\sin \beta = \frac{2\sqrt{R-1}}{2R}$$

$$\sin \beta = 0$$

80

~~cos~~

$$\cos \beta = -1$$

$$\sin \beta \cos \alpha = \frac{BC}{OB} \cdot \frac{OA}{\sin \beta} = \frac{BC \cdot OA}{OB \sin \beta}$$

$$\frac{OA}{\sin \beta} = \frac{OB}{\sin \alpha}$$

$$OA = OB \sin \beta$$

$$OB = 10 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{1-L}{1}$$

$$\frac{4(R-1)}{4R^2} + \frac{(R-1)^2}{R^2} = \frac{R-1 + (R-1)^2}{R^2} = 1$$

$\triangle ABC - \text{right}$
 $\angle B = 50^\circ$

$$\frac{\sqrt{R-1}}{R}$$

$$R - 1 + \frac{(R-1)^2}{R^2} = 1$$

$$R^2 - 4R + 4 + R - 1 = R^2$$

$$-3R + 3 = 0$$

$$3R = 3$$

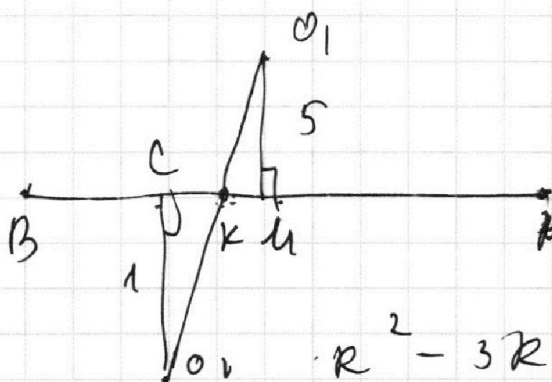
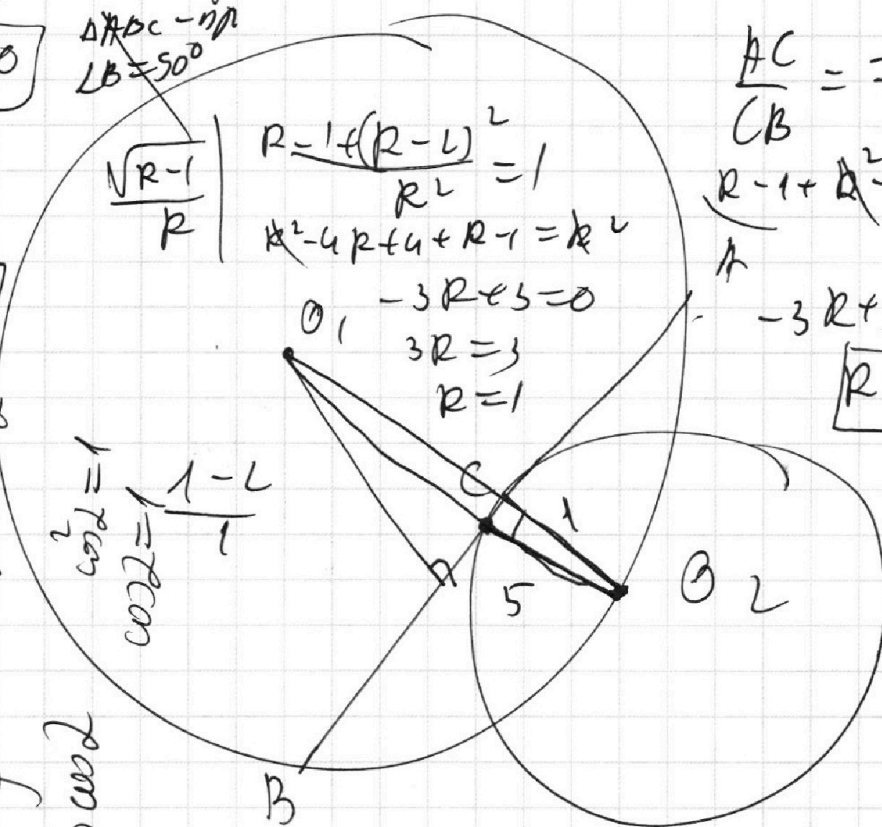
$$R = 1$$

$$\frac{AC}{CB} = 7$$

$$R - 1 + \frac{(R-1)^2}{R^2} = 1$$

$$-3R + 3 = 0$$

$$R = 1$$



$$\frac{R^2 - 4R + 4 + R - 1}{R^2} = 1$$

$$R^2 - 3R = R^2$$

$$\frac{BC \cos \beta}{\cos \alpha} = \frac{\sin \beta}{\cos \alpha}$$

$$\sum_{i=1}^n a_i$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

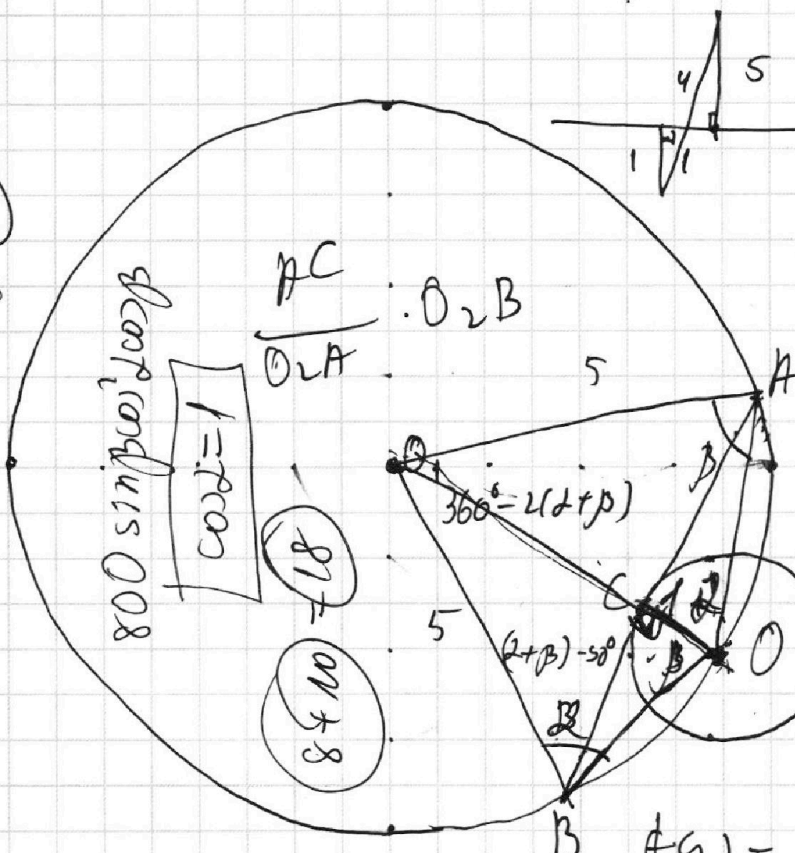
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3.

$12 + 5 + 5 = 22$
 17
 $AB = 8 \sin \beta \cos 2$
 $10 \cdot 10 \cos 2 \cos \beta$



$AB = 1$
 $r = 1$
 $R = 5$
 $\frac{AC}{CB} = \frac{7}{1}$
 $80 \sin 2 \cos \beta = \frac{80 \cdot 5}{16}$
 $= 5(\cos 2 \cos \beta - \sin 2 \sin \beta)$
 $16 \sin 2 \cos \beta = \cos 2 \cos \beta - \sin 2 \sin \beta$

$\frac{\sin 2 \cos \beta}{\sin \beta \cos 2} = 7$

$\frac{\cos 2}{\tan \beta} = 7$

$\frac{a}{b} = 7$
 $a = 7b$
 $a + b = 1$

$\frac{5}{\sin(2 + \beta)} = \frac{AB}{\sin(2 + \beta)}$
 $AB = 10(\sin 2 \cos \beta + \sin \beta \cos 2)$

$5 = \frac{AB}{80 \sin(2 + \beta)}$

$80(\sin \beta \cos \beta)$

$BC \cos 2 \cos \beta = \sin \beta$
 $BC \cos 2 \cos \beta = \frac{AC \cos 2 \cos \beta}{7}$

$\frac{\sin 2 \cos \beta}{\sin \beta \cos 2} = 7$

$AB = 50 \sin(2 + \beta) \cos 2 \cos \beta$
 $AB = 100 \sin(2 + \beta) \cos 2 \cos \beta$
 $800 \sin 2 \cos \beta \cos 2 \cos \beta$