



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



- ✓ 1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- ✓ 2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
- ✓ 4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- ✓ 5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
- а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
- б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^9 3^{10} 5^{10}, bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13}, ac: 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

- 1) Попробуем, что $abc: 2^{19} 3^{18} 5^{30}$, иначе $ac: 2^{19} 3^{18} 5^{30}$ — противоречие.
 2) Пусть m_k — степень возведения k в m ; тогда

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 9 \\ b_2 + c_2 \geq 14 \\ c_2 + a_2 \geq 19 \\ a_2 + b_2 + c_2 \geq 19 \end{cases} + \begin{cases} a_3 + b_3 \geq 10 \\ b_3 + c_3 \geq 13 \\ c_3 + a_3 \geq 18 \\ a_3 + b_3 + c_3 \geq 18 \end{cases} + \begin{cases} a_5 + b_5 \geq 10 \\ b_5 + c_5 \geq 13 \\ c_5 + a_5 \geq 30 \\ a_5 + b_5 + c_5 \geq 30 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 + c_2 \geq 21 \\ a_2 + b_2 + c_2 \geq 19 \end{cases} \quad \begin{cases} a_3 + b_3 + c_3 \geq 20,5 \\ a_3 + b_3 + c_3 \geq 18 \end{cases} \quad \begin{cases} a_5 + b_5 + c_5 \geq 26,5 \\ a_5 + b_5 + c_5 \geq 30 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 21 \quad a_3 + b_3 + c_3 \geq 20,5(21) \quad a_5 + b_5 + c_5 \geq 30$$

$(a_3 + b_3 + c_3 \in \mathbb{N})$

минимальные усл. достигаются при $a = 2^7 3^7 5^{15}, b = 2^7 3^3, c = 2^{12} 3^{11} 5^{15}$
 Нетрудно проверить, что все усл. соблюдаются

Ответ: $2^{21} 3^{21} 5^{30}$.

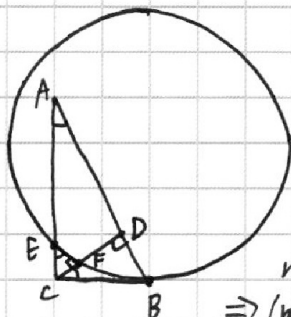
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1) \angle DCB = 90^\circ - \angle ACD = \angle CAD$$

2) как соотв. углы при паралл.

$$\angle CEF = \angle CAD; \angle CFE = \angle CDA = 90^\circ$$

$$3) \triangle ADC \sim \triangle CDB \text{ (по 2 углам)} \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{DC}{DB} \Rightarrow DC = \sqrt{AD \cdot DB}$$

$$4) \text{ по теореме точек: } CE \cdot CA = CB^2 \Rightarrow CE = \frac{CB^2}{CA}$$

5) Пусть $DB = x$;

$$\text{тогда (по усл.) } AD = 3x \Rightarrow CD = x\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\text{м. Пиф.}) AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{12x^2} = 2\sqrt{3}x, CB = \sqrt{CD^2 + DB^2} = 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CE = \frac{4x^2}{2\sqrt{3}x} = \frac{2\sqrt{3}x}{3}$$

$$6) \triangle CEF \sim \triangle BAC \text{ (по 2 \angle)} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \left(\frac{AB}{CE}\right)^2 = \left(\frac{4x}{\frac{2\sqrt{3}x}{3}}\right)^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$$

Ответ: 12

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x + \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow x \in [-3\pi; 2\pi]$$

$$t = \arcsin(\cos x)$$

$$x \in [-3\pi; -2\pi] \Rightarrow t = x + 3\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$x \in [-2\pi; -\pi] \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} - (x + 2\pi)$$

$$x \in [-\pi; 0] \Rightarrow t = x + \pi - \frac{\pi}{2}$$

$$x \in [0; \pi] \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} - x$$

$$x \in [\pi; 2\pi] \Rightarrow t = x - \pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} x \in [-(2k+1)\pi; -2k\pi] &\Rightarrow t = x + (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2} \\ x \in [-2k\pi; -(2k-1)\pi] &\Rightarrow t = \frac{\pi}{2} - (x + 2k\pi) \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} k \in \mathbb{N}, k \in [-1; 1] \end{array} \right.$$

$$1) 5(x + (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4x = 3\pi - 5\pi(2k+1)$$

$$x = \frac{3}{4}\pi - \frac{5}{4}\pi(2k+1)$$

$$x \in [-3\pi; -2\pi] \Rightarrow k = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{4}\pi - \frac{15}{4}\pi = -3\pi$$

$$x \in [-\pi; 0] \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$$

$$x \in [\pi; 2\pi] \Rightarrow k = -1 \Rightarrow x = 2\pi$$

$$2) 5(\frac{\pi}{2} - (x + 2k\pi)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$2\pi - 10k\pi = 6x$$

$$x = \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}k\pi$$

$$x \in [-2\pi; -\pi] \Rightarrow k = 1 \Rightarrow x = -\frac{4\pi}{3}$$

$$x \in [0; \pi] \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Ответ: } x \in \left\{-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi\right\}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

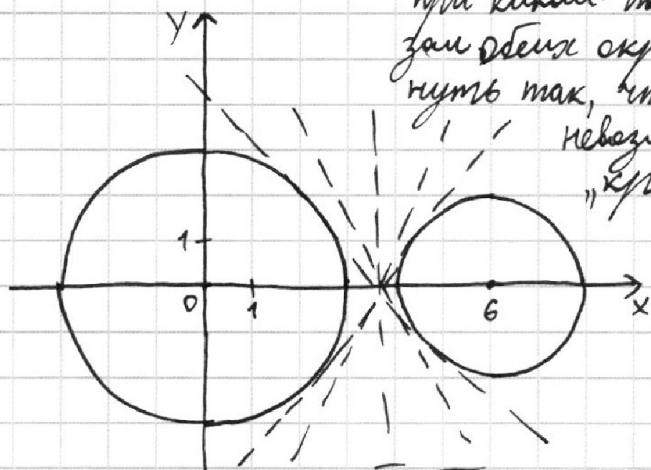
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=1,5b-0,5ax \\ \begin{cases} x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2+y^2=4 \end{cases} \end{cases}$$

Параметры a и b задают сдвиг и наклон прямой. 4 корня $\Rightarrow$ прямая пересекает обе окружности. Если прямая при каком-то b касается внутренней окружности, то нельзя её параллельно сдвинуть так, чтобы она их пересекала. Также невозможны все a между двумя "критическими".



~~найдем касательную~~
~~найдем кас. к окруж.~~
найдем кас. к окруж.

увеличим 1 окружность на r второй, найдем кас. к ней из центра второй и параллельно сдвинем на вектор $\vec{r}$ перпендикулярно касательной. Но это общий алгоритм, нам достаточно узнать наклон, который при || сдвиге не меняется

$y = \sqrt{25-x^2}$, $O(0,0)$ (увелич. ~~и~~ и центр) ^{вект. паралл. перенос}

$y' = -\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$; упр-е кас.: $y = \frac{x^2}{25} \pm \frac{x}{5} \pm \frac{25}{5}$ ~~$y = \frac{x^2}{25} \pm \frac{x}{5} \pm \frac{25}{5}$~~ $f'(a)(x-a)+f(a)$

$-\frac{a}{\sqrt{25-a^2}}(6-a) + \sqrt{25-a^2} = 0 \Rightarrow 25-a^2 = a(6-a) \Rightarrow a = \frac{25}{6}$

$y'(\frac{25}{6}) = -\frac{\frac{25}{6}}{\sqrt{25-(\frac{25}{6})^2}} = -\frac{\frac{25}{6}}{\frac{5}{6}\sqrt{11}} = -\frac{5\sqrt{11}}{11}$ (для накл. паралл. перенос $\frac{5\sqrt{11}}{11}$)

$0,5a \in (-\frac{5\sqrt{11}}{11}, \frac{5\sqrt{11}}{11}) \Rightarrow \text{Ответ: } a \in (-\frac{10\sqrt{11}}{11}, \frac{10\sqrt{11}}{11})$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x > 0, x \neq 1, y > 0, y \neq \frac{1}{5}$$

$$1) \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8 = \log_x 3^5 - 8 = \frac{5}{2} \log_x 3 - 8$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 - 2,5 \log_x 3 + 8 = 0$$

$$\frac{\log_3^5 x + 8 \log_3 x + 3,5}{\log_3 x} = 0$$

$$s = \log_3 x \Rightarrow f_1(s) = s^5 + 8s + 3,5$$

$$2) 5y = t$$

$$\log_3^4 t + 2 \log_t 3 = \log_t 3^{11} - 8$$

$$\log_3^4 t - 3,5 \log_t 3 + 8 = 0$$

$$\frac{\log_3^5 t + 8 \log_3 t - 3,5}{\log_3 t} = 0$$

$$k = \log_3 t \Rightarrow f_2(k) = k^5 + 8k - 3,5$$

$$3) \text{Рассм. } f(n) = n^5 + 8n$$

$$f'(n) = 5n^4 + 8 > 0 \Rightarrow f(n) \uparrow, f(n) - \text{мн. ч. неч. степ.} \Rightarrow \text{единств. корни,}$$

$$\text{биекция между } n \text{ и } f(n)$$

$$\text{Также заметим, что } f(n) = -f(-n)$$

$$\begin{cases} f_1(n) = 0 \\ f_2(n) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(n_1) + 3,5 = 0 \\ f(n_2) - 3,5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(n_1) = -3,5 \\ f(n_2) = 3,5 \end{cases} \Rightarrow f(n_1) = -f(n_2) \Rightarrow n_1 = -n_2$$

однозначно (в силу биекции)

$$n_1 \text{ и } n_2 - \text{корни мн. ч., которые соответствуют к } x \text{ и } y, \text{ уравн. рав-ва}$$

$$4) n_1 = s = \log_3 x \Rightarrow x = 3^{n_1}$$

$$n_2 = k = \log_3 t \Rightarrow t = 3^{n_2}, t = 5y \Rightarrow y = \frac{t}{5} = \frac{3^{n_2}}{5}, n_2 = -n_1 \Rightarrow y = \frac{3^{-n_1}}{5}$$

$$5) xy = 3^{n_1} \cdot \frac{3^{-n_1}}{5} = \frac{1}{5}$$

Ответ: 0,2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x > 0 \quad y > 0$$

$$x \neq 1 \quad y \neq \frac{1}{5}$$

$$b = 2^9 3^{10} 5^{10} \quad c = 2^{14} 3^{13} 5^{13} \quad a = 2^9 3^{10} 5^{10}$$

$$c = 2^k 3^l 5^m \quad a = 2^{19-k} 3^{18-l} 5^{20-m}$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8 = \log_{x^2} 3^5 - 8 \quad b = 2^{14-k} 3^{13-l} 5^{13-m}$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \frac{5}{2} \log_x 3 - 8 \quad 5y = t$$

$$\log_3^4 x + 3,5 \log_x 3 + 8 = 0$$

$$\log_3^4 t + 2 \log_t 3 = \log_2 3^{11} - 8$$

$$\frac{\log_3^5 x + 8 \log_x 3 + 3,5}{\log_3 x} = 0$$

$$\log_3^4 t - 3,5 \log_t 3 + 8 = 0$$

$$f_2(t) = \frac{\log_3^5 t + 8 \log_t 3 - 3,5}{\log_3 t} = 0$$

$$t^5 + 8t + 3,5 = 0 \quad 23 \quad 23$$

$$2t^5 + 16t + 7 \neq 0 \quad 19 \quad 18$$

$$\sqrt{\frac{kl}{m}} = 5^{3,5} 3^{\frac{5}{2}} \quad \frac{kl}{m} = 5^7 3^5$$

$$S(S^4 + 8)$$

$$5S^4 + 8$$

$$b = 2^3 5^0 3$$

$$f_2(-x) = f_1(x)$$

$$\begin{cases} 33 - 2k = 9 \\ 31 - 2l = 10 \\ 43 - 2m = 10 \end{cases}$$

$$f_1(s) = s^5 + 8s + 3,5 \quad f_2(k) = k^5 + 8k - 3,5 \quad a+b \geq 9$$

$$-f_1(x) = f_2(-x)$$

$$k = -\frac{s}{m} \quad \begin{cases} b+c \geq 14 \\ a+c \geq 19 \end{cases}$$

$$s^5 + 8s$$

$$-\frac{x^2}{5}$$

$$x_2 - t = -\frac{s}{5} \quad a+b+c \geq 19$$

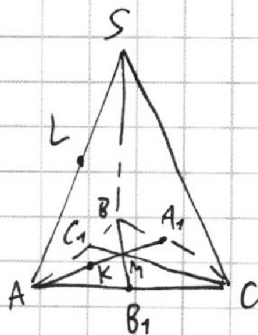
$$5s^4 + 8 > 0 \quad 1 \text{ кор.}$$

$$abc: 2^3 3^5 5^7 2^3 5^5$$

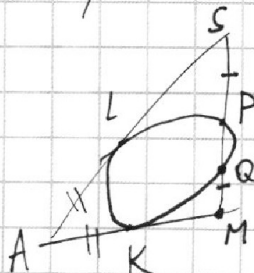
$$s^5 + 8s - 3,5 = 0$$

$$f(x_1) = -f(-x_1)$$

$$\begin{cases} f(x_1) - 3,5 = 0 \\ f(x_1) + 3,5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) = 3,5 \\ f(x_2) = -3,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) = 3,5 \\ -f(x_2) = 3,5 \end{cases}$$



$$3x_2 + y_2 = 33 + 3x_1 + y_1$$



$$S_{ABC} = 90$$

$$SA = BC = 12$$

$$\begin{matrix} 7 & 2 & 12 \\ 7 & 3 & 11 \\ 15 & 0 & 15 \end{matrix}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



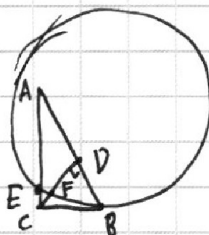
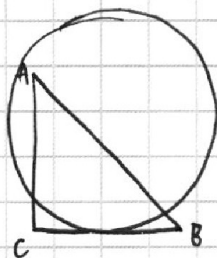
$$ab = k \cdot 2^9 3^{10} 5^{10} \quad bc = 2^{14} 3^{13} 5^{13} \quad ac = 2^{19} 3^{18} 5^{30} \cdot m$$

$$abc = \sqrt{k \ell m}$$

$$\frac{25 \cdot 36 - 25 \cdot 25}{36} = \frac{25 \cdot 11}{36}$$

$$x = \frac{2\pi}{3} \quad \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$$



AB || EF

$$AD : DB = 3 : 1$$

$$S_{ABC} : S_{CEF} = ?$$

$$b \sqrt{ac} = \sqrt{k \ell} \cdot 2^{11,5} 3^{11,5} 5^{11,5} \quad \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6}$$

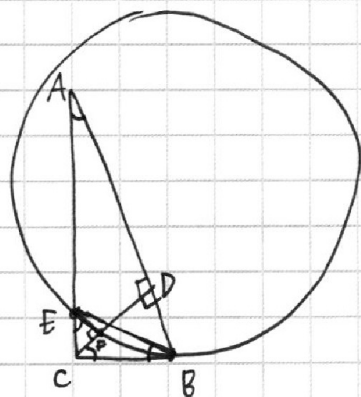
$$\sqrt{ac} = \sqrt{m} \cdot 2^{9,5} 3^9 5^{15}$$

$$b =$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{CD}{DB} \Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot DB}$$

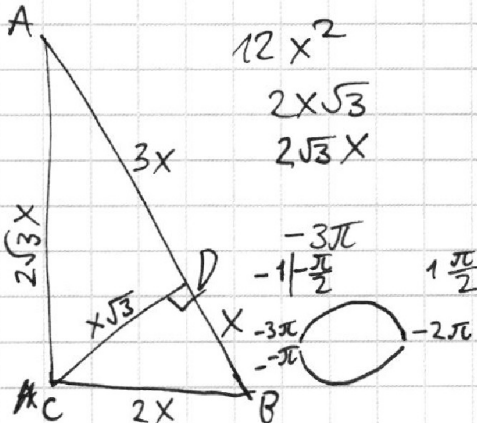
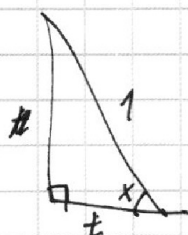
$$CE \cdot CA = CF \cdot CD = CB^2$$

$$f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$



$$CE \cdot 2\sqrt{3}x = 4x^2$$

$$CE =$$



$$x + \frac{\pi}{2} \in [-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}] \quad x \in [-3\pi; \pi]$$

$$5(\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi n) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi n = x + \frac{\pi}{2}$$

$$2\pi + 10\pi n = 6x$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi n}{3}$$

$$1) x \in [-3\pi; -\pi]$$

$$\arcsin(\cos x) = (\frac{\pi}{2} + (x + 3\pi))$$

$$(x - 6)^2 + y^2 - 4 \quad \frac{\pi}{2} - (x + \frac{3}{2}\pi)$$

$$\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \arcsin(\cos x) \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Исходя из условия:

(1) $ab = k \cdot 2^9 3^{10} 5^{10}$, (2) $bc = l \cdot 2^{14} 3^{13} 5^{13}$, (3) $ac = m \cdot 2^{19} 3^{18} 5^{30}$; $k, l, m \in \mathbb{N}$
 Перенесем левые и правые части и извлечем корни

$abc = \sqrt[24]{k^2 l^2 m^2} \cdot 2^{24} 3^{20,5} 5^{26,5} \in \mathbb{N} (a, b, c \in \mathbb{N})$

П.к. $k, l, m \in \mathbb{N}$, какое-то число $5 \cdot \sqrt[24]{k^2 l^2 m^2} \geq 5$

$abc \geq 2^{24} 3^{20,5} 5^{26,5}$, но abc должно $\in \mathbb{N}$; минимальное натуральное, которое делится на $2^{24} 3^{20,5} 5^{26,5}$

Делительное число на $\sqrt[24]{k^2 l^2 m^2}$, мы добавим в итоговое число $\frac{1}{2} \cdot \pi$ к степени каждого-то простого делителя в разложении ($r \in \mathbb{N}$)

Предусмотря, делитель на $\min \sqrt[24]{k^2 l^2 m^2}$, "добавить" степени простого д.б. на π ч.а.

Это получится при $\sqrt[24]{k^2 l^2 m^2} = 5^{15}$, тогда при "3" степени 24, а при "5" 27.

$\sqrt{\frac{(1) \cdot (2)}{(3)}} = b = \sqrt{\frac{kl}{m}} \cdot 2^2 3^{2,5} 5^{-3,5}$

$a = \frac{(1)}{b} = \sqrt{\frac{km}{l}} \cdot 2^7 3^{7,5} 5^{13,5}$; $c = \frac{(2)}{b} = \sqrt{\frac{lm}{k}} \cdot 2^{12} 3^{10,5} 5^{16,5}$



$0 \leq y_2 \leq 42$
 $0 \leq y_1 \leq 42$
 $0 \leq x_2 \leq 34$
 $0 \leq x_1 \leq 34$

84

$10 3$

$9 6$

все равно
 пар-и или пр.-пр.,
 перенос вправо
 на сколько-то раз

$y_2 - y_1 \in [-42; 42]$

$3(x_2 - x_1) \in [-102; 102]$

$3(x_2 - x_1) \in [-102; 102]$

$14^2 + 42^2$

$\begin{array}{r} \times 42 \\ 14^2 \\ \hline 168 \\ + 1764 \\ \hline 1932 \end{array}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

