



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. $ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$
 $bc: 2^{17} \cdot 7^{11}$
 $ac: 2^{20} \cdot 7^{12} \Rightarrow abc: 2^{20} \cdot 7^{37}$

2. Заметим, что наименьшее $abc =$
 $= 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot 6$
 $\min_{ac}$

Пусть b в b выводит степень двойки n

тогда a выводит степень двойки $\geq 14 - n$
 c выводит степень двойки $\geq 17 - n$
 $14 - n + 17 - n \geq 20$

2. Если $n \geq 5$ (целое число n не n n)
 выводит степень двойки $abc \geq$
 $\geq 14 - n + 17 - n + n = 31 - n \geq 31 - 5 = 26$

Тогда $abc: 2^{20} \cdot 7^{37}$
 $abc: 2^{26}$ $\Rightarrow abc: 2^{26} \cdot 7^{37}$
 $\min(abc) = 2^{26} \cdot 7^{37}$

3. Проверим: $b = 2^5$, $a = 2^{20} \cdot 2^9$, $c = 7^{17} \cdot 2^{12}$

$ab = 2^{25} \cdot 7^{14} \cdot 2^{14} = 2^{39} \cdot 7^{14}$
 $bc = 7^{17} \cdot 2^{17} \cdot 2^{14} = 7^{17} \cdot 2^{31}$
 $ac = 7^{37} \cdot 2^{21} \cdot 7^{37} \cdot 2^{20}$
 $abc = \min(abc) = 7^{37} \cdot 2^{26}$

Ответ: $7^{37} \cdot 2^{26}$

Если $n > 5$, то $abc: 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot 2^n \cdot 2^{26} \cdot 7^{37}$
 $\Rightarrow abc: \min(abc) = 7^{37} \cdot 2^{26}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab} \div m$$

$$a+b \div m$$

$$(a+b)^2-8ab \div m \Rightarrow 8ab \div m$$

m

$a \div m$

a и b взаимнопросты (т.к. значит $a+b$ и любой делитель a или b (одно из делителей) не делится $\Rightarrow$ сумма не делится)

т.к. a/b несократима

Значит: $8ab \div m$ и m взаимнопросты с a и $b \Rightarrow$ наименьшее $m = 8$
(иначе $a+b \nmid m$)

Пример: ~~отсюда~~ $a=7, b=3 \Rightarrow \frac{7+3}{7^2-6 \cdot 7 \cdot 3+3^2} = \frac{10}{49-126+9} = \frac{10}{-68}$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{8+0}{7^2+3^2-6 \cdot 7 \cdot 3} = \frac{8}{8^2-8 \cdot 7 \cdot 3} = \frac{80:8}{4852:8 \cdot 569}$$

$\Rightarrow$ ответ $\div 8$

Ответ: $m = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

ЛМФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $\angle AOC = 2\alpha$, $\angle BOC = 2\beta$ радиусы окружности $\Rightarrow AB = 8x = 8$

Тогда $\angle OAB = \angle OBA =$
 $= 90 - \alpha - \beta$

Тогда $\angle OAB = \angle OBA =$
 $= \beta$, $\angle OBA =$
 $= \angle OOA = \alpha$

- Внешние углы

Отложим отрезок $CX = OC$ на прямой OC от точки C

$BO \perp OB$ углы: 2α , $90 - \alpha$, $90 - \alpha$
(высота BC падает в середину BC)

$\triangle OOA$ углы: α , $90 - \alpha$, $90 - \alpha$
(равносторонний $\triangle OOA$ внешний)

Тогда $\triangle OOA \sim \triangle XOB \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{OO_1}{AO_1} = \frac{OB}{AO} \Rightarrow \frac{2}{AO_1} = \frac{OB}{5}$$

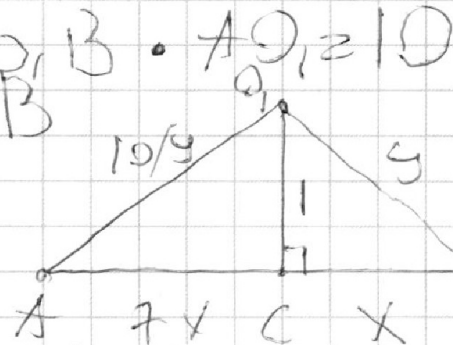
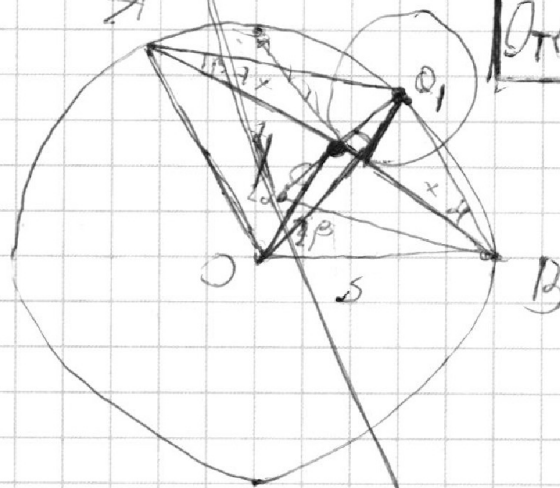
Рассмотрим $\triangle AOB$

Пусть $AB = y \Rightarrow AO = 10/y$

Тогда $x^2 + 1 = y^2$

$$4x^2 + 1 = \frac{100}{y^2} = \frac{100}{x^2 + 1}$$

$$(4x^2 + 1)(x^2 + 1) = 100 \Rightarrow x = 1$$



Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$1) 2x^2 - 2x + 1 \geq 0 - x - 1/2 \text{ DOP}$$

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0 - x \notin (x^0, 1, 5)$$

$$2) \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + 2 - 7x$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 5x + 3 + 4x^2 + 4 - 28x + 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

$$49x^2 - 35x + 6 = 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

$$(7x - 2)(7x - 3) = 2(2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3})$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$-7x + 3 = 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

$$49x^2 - 42x + 9 = 4x^2 - 20x + 12$$

$$45x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$x = \frac{22 \pm \sqrt{484 - 1080}}{90} = \frac{22 \pm \sqrt{-596}}{90} - \text{нет корней}$$

Значит, единственный возможный корень

$$\sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} - \frac{10}{7} + 3} - \sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} + \frac{4}{7} + 1} = 2 - 7 \cdot \frac{2}{7}$$

$$= \sqrt{\frac{85}{7}} - \sqrt{\frac{85}{7}} = 0 = 2 - 2$$

Верно

$x = \frac{2}{7}$ подходит
(Могли получить лишний корень при возведении в квадрат)

$$\text{Ответ: } x = \frac{2}{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ax - y + 10b \leq 0 \quad (1)$$

$$\sqrt{(x+8)^2 + y^2 - 1} \cdot (x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \quad (2)$$

$$(2): \begin{cases} x^2 + y^2 = 2^2 \\ (x+8)^2 + y^2 = 1^2 \end{cases}$$

подходит

2 варианта:

1 - касание на границах

2 - (x, y) внутри

одной из областей

(а сдвинутой дугой, то есть
вероятно всегда так окруж-
ности не пересекаются)

$$(1): y = ax + 10b$$

$$a = 10b$$

$$y = 10b$$

имеет либо одну точку
касания, либо
нет

$$y = ax + 10b$$

$$a \neq 0$$

прямая

Если прямая не пересека-
ет окружность

- нет решения

Если касание - прямая - общая
касательная к 2-м окружностям

и х у: 1) Проходит через $(2, 0)$ и $(-8, 1)$

$$\Rightarrow y = ax + 10b \Rightarrow 10b = 2$$

$$a = 1/8$$

2) Симметричная ей $a = -1/8$

3) Внутренняя касательная:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3) Внутренняя касательная (центр симметрии, второй диаметр).

$$y = \sqrt{4-x^2} = ax + 10b = ax + c, c = 10b$$

$$4-x^2 = a^2x^2 + 2acx + c^2$$

$$(a^2+1)x^2 + 2acx + (c^2-4) = 0$$

$$D = 4a^2c^2 - 4(a^2+1)(c^2-4) = 16a^2c^2 - 4a^2c^2 - 4c^2 + 16 = 12a^2c^2 - 4c^2 + 16 = 0$$

$$4a^2c^2 = c^2 - 16$$

$$c = \sqrt{4a^2 - 16}$$

$$y = \sqrt{1-(x+8)^2} = ax + c$$

$$1-x^2-16x-63 = a^2x^2 + 2acx + c^2$$

$$(a^2+1)x^2 + (2ac+16)x + (c^2+63) = 0$$

$$D = 21a^2c^2 + 256 + 64ac - 4a^2c^2 - 4c^2 - 252a^2 - 252 = 0$$

$$4c^2 + 252a^2 = 64ac + 4$$

$$c^2 + 63a^2 = 16ac + 1$$

$$63a^2 - 16ac + (c^2 - 1) = 0$$

$$63a^2 - 16a\sqrt{4a^2-1} - 2 = 0$$

$$63a^2 - 2 = 16a\sqrt{4a^2-1}$$

$$4489a^4 - 268a^2 + 4 = 1024a^4 - 256a^2$$

$$3049a^4 - 12a^2 + 4 = 0$$

$$a^2 = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 3049}}{2 \cdot 3049} = \frac{12 \pm 112.62}{2 \cdot 3049} = \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow a = \pm 1/7$$

$$\text{Ответ: } a = \pm 1/7; a = \pm 1/8$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$100 = 49x^2 + 1 \quad (x^2 + 1) \quad 100$$

$$100 = 49x^4 + 50x^2 + 1 \quad x^2 + 1$$

$$x^2 =$$

$$5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cos \alpha$$

$$50(1 - \cos \alpha)$$

$$50(2 - 1 - \cos \alpha)$$

$$50 - 25 \cos \alpha$$

$$= 25 \cos \alpha$$

$$= 25 \cos \alpha$$

$$= 25 \cos \alpha$$

$$= 25 \cos \alpha$$

$$= 25 \cos \alpha$$

$$= 25 \cos \alpha$$

$$= 25 \cos \alpha$$

$$= 25 \cos \alpha$$

$$= 25 \cos \alpha$$

$$= 25 \cos \alpha$$

$$= 25 \cos \alpha$$

$$\frac{21}{48} y + 124 y^2 \quad x^2 + 1 = 49 y^2$$

$$48 x^2 + 1 = 25 y^2$$

$$129 y^2 \quad (141) \quad 48 x^2 = 21 y^2$$

$$48$$

$$48$$

$$48$$

$$48$$

$$48$$

$$48$$

$$48$$

$$48$$

$$48$$

$$48$$

$$48$$

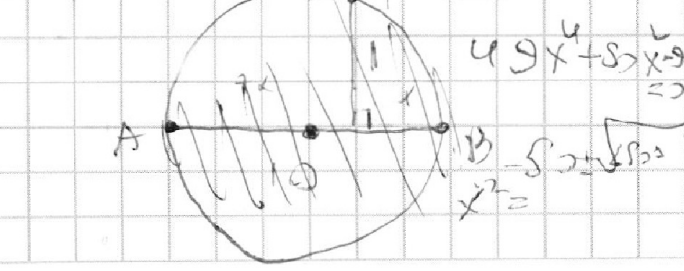
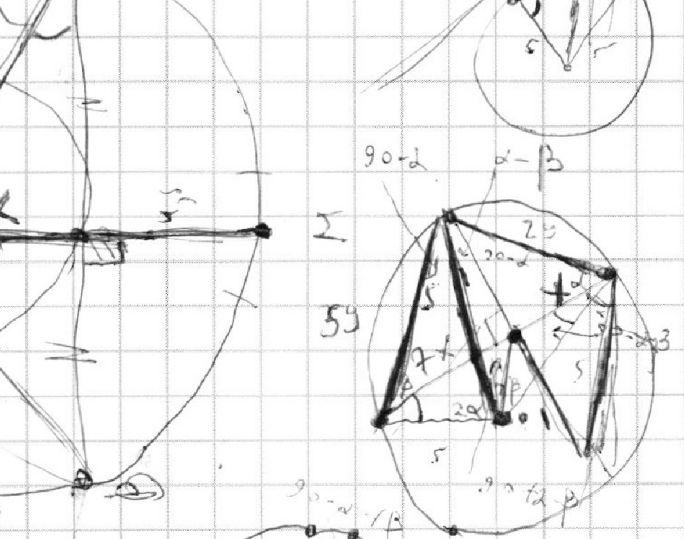
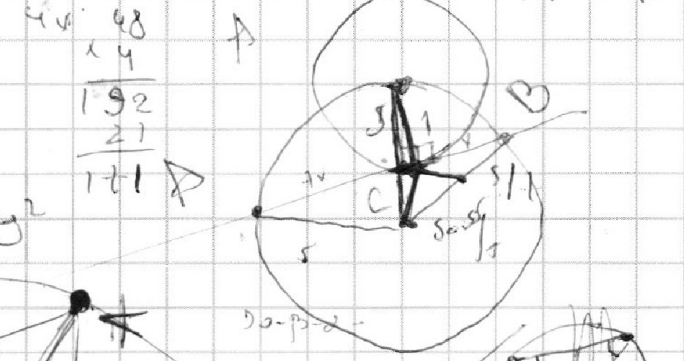
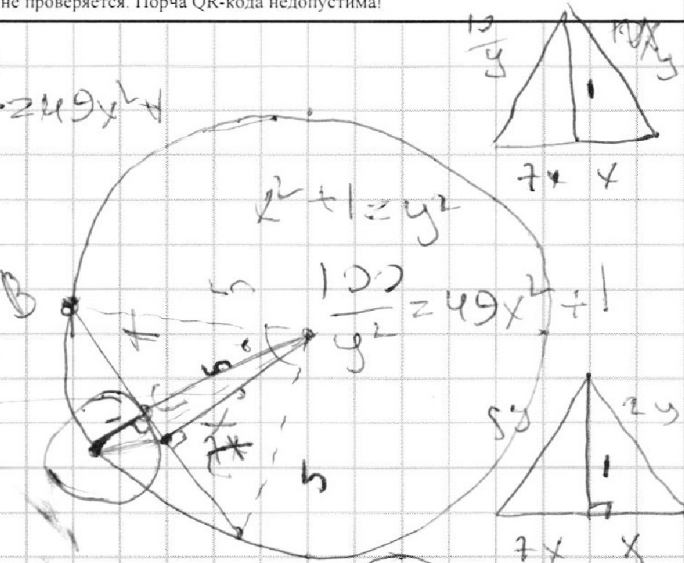
$$48$$

$$48$$

$$48$$

$$48$$

$$48$$

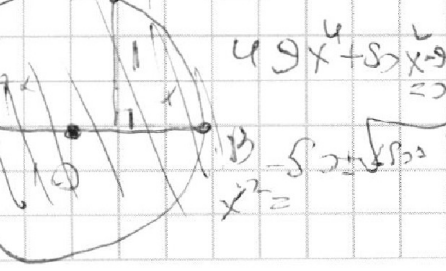
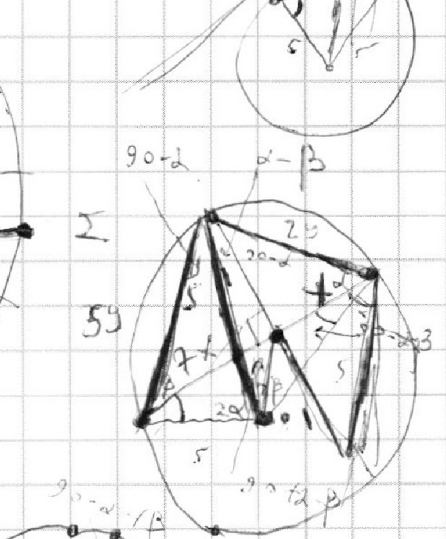
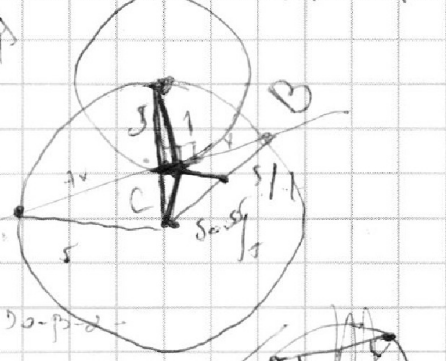
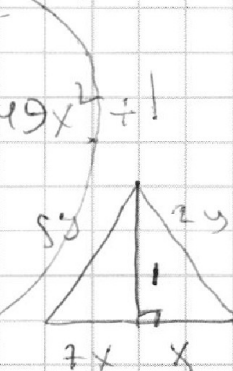
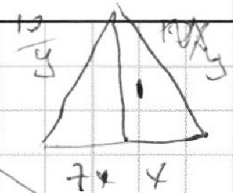


$$x + 2d = 180 - \alpha - 2\beta$$

$$2x + 2d = 180 - 2\beta$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 90$$

$$\gamma = 90 - \alpha - \beta$$



$$49x^4 + 50x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 =$$

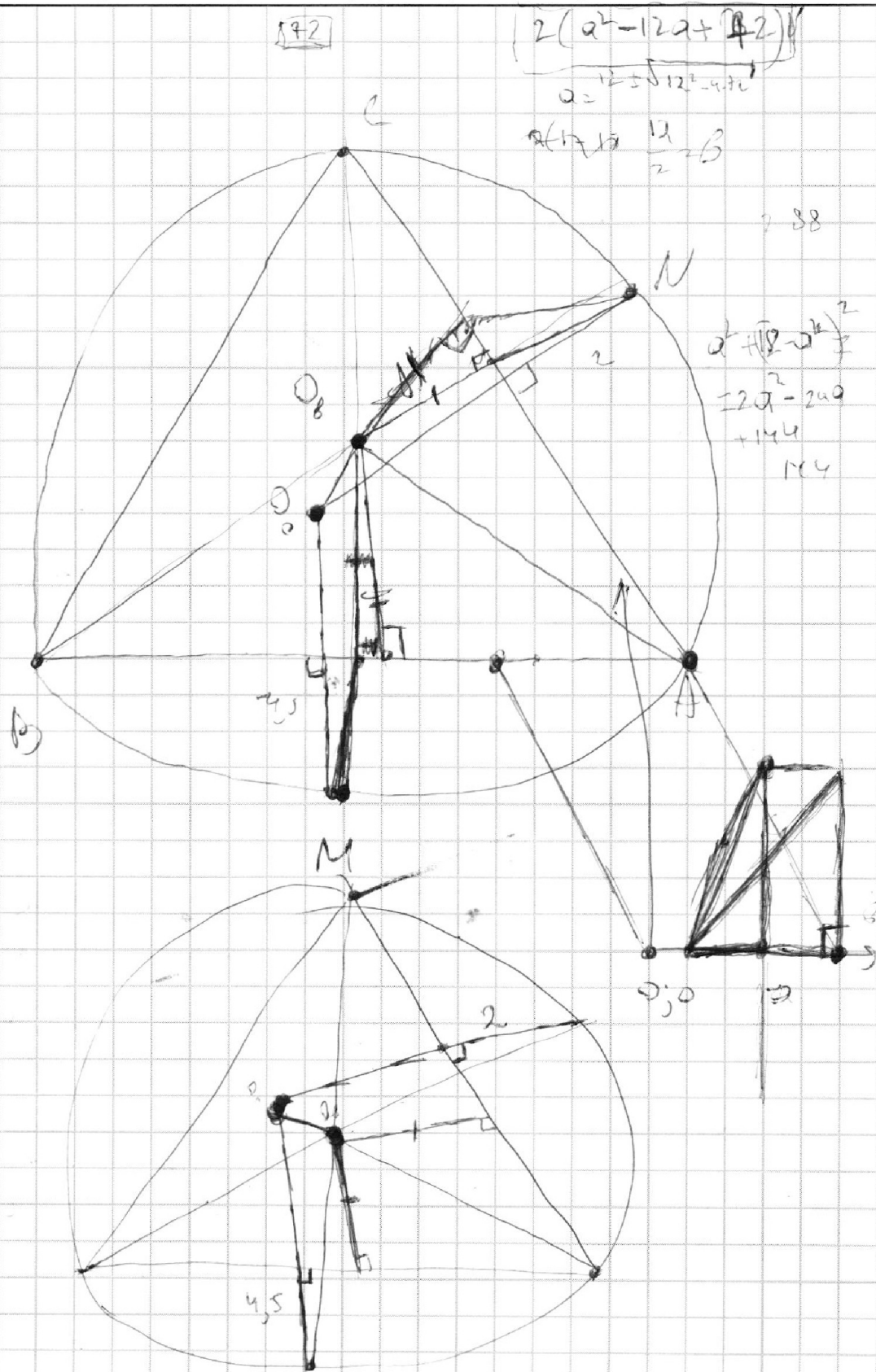
На одной странице можно оформлять **только одну задачу**.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ax - y + 10b = 0$$

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

$$2a\sqrt{a^2-1} = 12 + 62(a^2-1)$$

$$a\sqrt{a^2-1} = -31a^2 + 39$$

$$y = ax + 10b$$

$$(a^2+1)x^2 + (2a\sqrt{a^2-1}+10b)x + 100b^2 - 4 = 0$$

$$8a\sqrt{a^2-1} + 64 = 4 + 62(a^2-1)$$

$$\Delta y = [-24; 24]$$

$$\Delta x = [-26; 26]$$

$$2\Delta x + \Delta y \geq 12$$

$$a^2(4a^2-1) = 31^2a^2 + 39^2$$

$$1) \beta = 2 \quad n(0-n; 15-n)$$

$$1 = -8 \cdot 2 \cdot 2(0-2)(15-2)$$

$$8x = 1$$

$$1 = 8x + 2$$

$$a = \frac{1}{8}y\sqrt{1-(x+3)^2} = ax + \frac{1}{8} = -1/8$$

$$0; (6-15)$$

$$1; (0-14)$$

$$2(-1-y^2)ax + 10b$$

$$x^2 + y^2 \geq 4$$

$$(x+8)^2 + y^2 = 1$$

$$4 - x^2 = a^2x^2 + 16a^2 + 2ax$$

$$(a^2+1)x^2 + 2ax + 16a^2 - 4 = 0$$

$$A(x_1; y_1)$$

$$B(x_2; y_2)$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2\Delta x + \Delta y = 12$$

$$4a^2 - c^2 + 1 = 0$$

$$4a^2 \geq c^2 - 1$$

$$AC/AB = 1$$

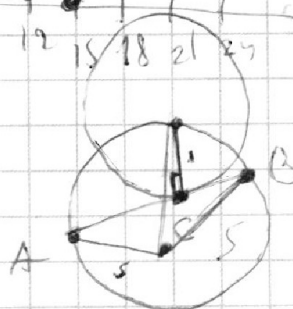
Let us find

$$y = \sqrt{4-x^2} = ax + b \quad 4a^2c^2 + 16a^2$$

$$4-x^2 =$$

$$D = 4a^2c^2 - 4(a^2+1)(c^2-4) =$$

$$= 16a^2 - 4c^2 + 4 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical work on grid paper, showing various algebraic manipulations and calculations. The work includes:

- Initial calculations at the top left involving numbers like 122, 222, 444, and 888.
- A large section of algebraic manipulation in the center, involving terms like x^2 , x , and constants, with several lines of equations and cancellations.
- Equations involving z and x , such as $z^2 - 2z + 1 = 0$ and $x^2 - 2x + 1 = 0$.
- Further algebraic steps at the bottom, including $x^2 - 2x + 1 = 0$ and $x^2 - 2x + 1 = 0$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical work on grid paper, including a geometric diagram of a circle with points and lines, and extensive algebraic calculations involving quadratic equations, square roots, and fractions.

Geometric Diagram: A circle with center O. Points A, B, C, D, E, F are marked on the circumference. Lines connect these points, forming various triangles and chords. A point X is marked outside the circle, with lines connecting it to points on the circle. A tangent line is also shown.

Algebraic Calculations:

- Top left: $2x^2 - 5x + 3 = 0$, $x = 1$, $(2x-3)(x-1) = 0$, $x < 2/7$.
- Top right: $4x^2 - 3x + 4 - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 0$, $4x^2 - 3x + 4 - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 0$, $4(2x^2 - 5x + 3) - 25x^2 = 8x^2 - 20x + 12 - 25x^2 = -23x^2 - 20x + 12 = 0$.
- Middle left: $49x^2 - 35x + 6 = 0$, $x = \frac{35 \pm \sqrt{35^2 - 4 \cdot 49 \cdot 6}}{2 \cdot 49} = \frac{35 \pm 1}{98}$, $x = \frac{4}{98} = \frac{2}{49}$.
- Middle right: $2009x^4 - 2226x^3 + 633x^2 - 4x - 12 = 0$, $2009x^4 - 2226x^3 + 633x^2 - 4x - 12 = 0$.
- Bottom left: $2x^2 - 5x + 3 = 0$, $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$, $x = 2$ or $x = 3$.
- Bottom right: $4x^2 - 10x + 6 = 0$, $x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{8} = \frac{10 \pm 2}{8}$, $x = \frac{3}{2}$ or $x = \frac{1}{2}$.