



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot k_a$; $b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3} \cdot k_b$; $c = 2^{\delta_1} \cdot 3^{\delta_2} \cdot 5^{\delta_3} \cdot k_c$, где $k_a \not\vdash 2$; $k_a \not\vdash 3$; $k_a \not\vdash 5$. Аналогично k_b и k_c не делятся на 2; 3; 5.

Т.к. $ab = 2^{\alpha_1+\beta_1} \cdot 3^{\alpha_2+\beta_2} \cdot 5^{\alpha_3+\beta_3} \cdot k_a \cdot k_b \neq 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$, тогда

(1a) $\alpha_1 + \beta_1 \geq 9$; $\alpha_2 + \beta_2 \geq 10$; $\alpha_3 + \beta_3 \geq 10$.

Аналогично для произведений bc и ac :

(2a) $\beta_1 + \delta_1 \geq 14$; $\beta_2 + \delta_2 \geq 13$; $\beta_3 + \delta_3 \geq 13$

(3a) $\alpha_1 + \delta_1 \geq 19$; $\alpha_2 + \delta_2 \geq 18$; $\alpha_3 + \delta_3 \geq 30$.

Сложим неравенства (1a); (2a); (3a) и разделим их обе части на 2: $\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1 \geq 21$.

Сложим неравенства (1a); (1b); (3b) и разделим их обе части на 2: $\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 \geq 20,5$

Сложим Аналогично для неравенств (1b); (2b); (3b): $\alpha_3 + \beta_3 + \delta_3 \geq 26,5$.

Т.к. a, b, c - натуральные числа, то $\alpha_i, \beta_i, \delta_i$; $\alpha_2, \beta_2, \delta_2$; $\alpha_3, \beta_3, \delta_3$ не отрицательные целые.

$abc = 2^{\alpha_1+\beta_1+\delta_1} \cdot 3^{\alpha_2+\beta_2+\delta_2} \cdot 5^{\alpha_3+\beta_3+\delta_3} \cdot k_a \cdot k_b \cdot k_c \geq 2^{21} \cdot 3^{20,5} \cdot 5^{26,5}$.

$(\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 \geq 21$; аналогично $\alpha_3 + \beta_3 + \delta_3 \geq 27$

Тогда $abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$. Но т.к. $ac \vdash 5^{30}$, то $\alpha_3 + \beta_3 + \delta_3 \geq 30$; $abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

При этом равенство достигается при $a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{17}$;
 $b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0$; $c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{13}$

Ответ: наименьшее $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

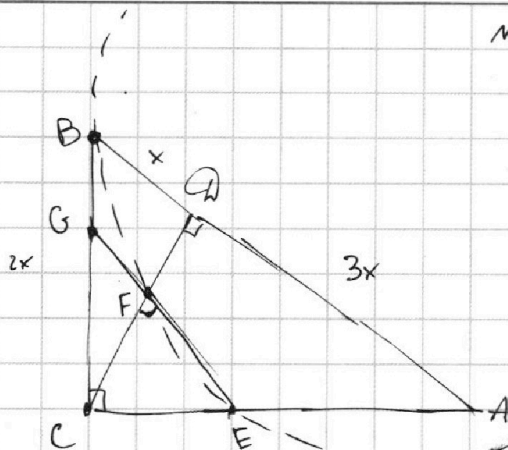
1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



№2



Пусть $BD = x$, тогда $AD = 3x$.
 AD - высота, проведенная из
 вершины прямого угла прямоугольн.
 треугольника, тогда $AD = \sqrt{BD \cdot DC}$
 $AD = x\sqrt{3}$.

По теореме Пифагора из
 $\triangle BAC$: $BC^2 = AB^2 + AC^2$
 $BC = \sqrt{3x^2 + x^2} = 2x$

Пусть $G = FE \cap BC$, тогда $\triangle GCE \sim$
 $\triangle BCA$ т.к. $FE \parallel AB$ ($\angle BCA$ - общий; $\angle CEG = \angle CAB$ как соответств.
 при $FE \parallel AB$, секущей AC). $\frac{GC}{BC} = \frac{GE}{AB} = \frac{CE}{AC} = \alpha$.

Аналогично $\triangle CFG \sim \triangle CBA$ ($\angle CBA$ - общий; $\angle CFG = \angle CBA$), тогда
 $\alpha = \frac{CF}{CB} = \frac{CG}{CA}$. Тогда $GF = BA \cdot \alpha = 4x\alpha$; $GE = BA \cdot \alpha = 4x\alpha$.
 $GB = CB - GC = 2x - 2x\alpha = 2x(1-\alpha)$

Степень γ . G относительно окр., касающейся BC в γ - B ;
 проходящей через F и E : $GB^2 = GF \cdot GE$.

$$4x^2(1-\alpha)^2 = 4x^2\alpha$$

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 = \alpha^2; \alpha = \frac{1}{2}$$

Т.к. $\triangle CFE \sim \triangle CBA$ $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC$; $S_{CFE} = \frac{1}{2} CF \cdot FE = \frac{1}{2} CF \cdot 3x$.
 По теореме Пифагора из $\triangle ABC$: $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{16x^2 - 4x^2} = 2x\sqrt{3}$

$$CE = AC \cdot \alpha = x\sqrt{3}; FE = 3x \cdot \alpha = 1,5x$$

По теореме Пифагора из $\triangle CFE$ ($\angle CFE = \angle CBA = 90^\circ$ как
 соответственные при $FE \parallel AB$, секущей CA): $CF = \sqrt{CE^2 - FE^2} =$
 $= \sqrt{x^2 - \frac{9}{4}x^2} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CFE}} = \frac{\frac{1}{2} BC \cdot AC}{\frac{1}{2} CF \cdot FE} = \frac{2x \cdot 2x\sqrt{3}}{\frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{2}x} = \frac{16}{3}$$

$$\text{Ответ: } \frac{S_{ABC}}{S_{CFE}} = \frac{16}{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

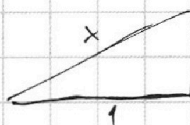
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N3

1) $\cos x \geq 0$. 1) $\cos x \geq 0$; ~~костанк~~

Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетом 1 и гипотенузой x :



$$\arcsin(\cos x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$5\sqrt{x^2 - 1} = x + \frac{\pi}{2}$$

$$25x^2 - 25 = x^2 + \pi x + \frac{\pi^2}{4}$$

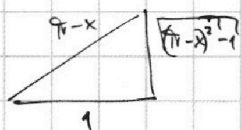
$$24x^2 - \pi x - 25 - \frac{\pi^2}{4} = 0$$

$$x = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 2400 + 24\pi^2}}{48}; x = \frac{\pi \pm 5\sqrt{\pi^2 + 96}}{48}$$

Ответ: $x = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 2400 + 24\pi^2}}{48}$

2) $\cos x \leq 0$;

Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетом 1 и гипотенузой $\pi - x$



$$\arcsin(\cos x) = \sqrt{(\pi - x)^2 - 1}$$

$$5\sqrt{(\pi - x)^2 - 1} = x + \frac{\pi}{2}$$

$$25\pi^2 + 25x^2 - 50\pi x - 25 = x^2 + \pi x + \frac{\pi^2}{4}$$

$$24x^2 - 51\pi x - 25 + 25\pi^2 - \frac{\pi^2}{4} = 0$$

$$x = \frac{51\pi \pm \sqrt{2601\pi^2 + 2400 - 2400\pi^2 + 24\pi^2}}{48}$$

$$x = \frac{51\pi \pm \sqrt{225\pi^2 + 2400}}{48}; x = \frac{51\pi \pm 5\sqrt{9\pi^2 + 96}}{48}$$

Ответ: $x = \frac{\pi \pm 5\sqrt{\pi^2 + 96}}{48}; x = \frac{51\pi \pm 5\sqrt{9\pi^2 + 96}}{48}$

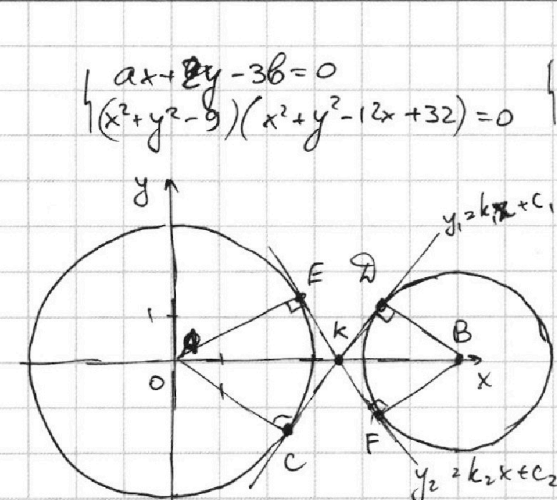
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



нч

$$\begin{cases} ax + by - 36 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 1,56 - \frac{a}{2}x \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \end{cases}$$

Решением совокупности являются 2 окружности. А - центр окр. $x^2 + y^2 = 9$, В - центр окр. $(x-6)^2 + y^2 = 4$. Проведём их общие внутренние касательные $y_1 = k_1x + c_1$ и $y_2 = k_2x + c_2$.

Пусть С и D - т. касания $y_1 = k_1x + c_1$ с окружностями, заданными уравнениями $x^2 + y^2 = 9$ и $(x-6)^2 + y^2 = 4$. Т. Е и F - аналогичные для прямой $y_2 = k_2x + c_2$. Т. К - т. пересечения Ox и $y_1 = k_1x + c_1$.

Заметим, что если $k_1 > 0$, при этом, если $-\frac{a}{2} \geq k_1$, то система уравнений не может иметь больше 2-х решений. Если $k_1 > -\frac{a}{2} \geq 0$, то система уравнений может иметь 4 решения.

Рассмотрим $\triangle AЕК \sim \triangle КВК$ по двум углам ($\angle АКЕ = \angle ВКК$ как вертикальные, а $\angle АЕК = \angle КВВ = 90^\circ$ как углы между касательной и радиусами, проведёнными в т. касания). $\frac{AK}{KB} = \frac{AC}{BV} = \frac{3}{2}$. $AB = 6$, тогда $AK = 3,6$; $KB = 2,4$.

$$k_1 = \tan \angle KBV = \frac{3}{2,4} = \frac{5}{6}. K(3,6; 0); D(3,6; \frac{5}{6})$$

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} \leq \frac{5}{6} \\ -\frac{a}{2} \geq 0 \end{cases} \begin{cases} a \geq -\frac{5}{3} \\ a \leq 0 \end{cases}; a \in [-\frac{5}{3}; 0].$$

В силу симметрии $y_2 = k_2x + c_2$ пересекает Ox в т. К.

$$\triangle AЕК \sim \triangle ВFK. k_2 = -\tan \angle AKC = -\frac{3}{3,6} = -\frac{5}{6}.$$

При $-\frac{a}{2} \leq k_2$ система не может иметь более 2-х решений, тогда $-\frac{a}{2} \geq k_2$.

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} < 0 \\ -\frac{a}{2} > -\frac{5}{6} \end{cases} \begin{cases} a > 0 \\ a \leq \frac{5}{3} \end{cases}. a \in (0; \frac{5}{3}].$$

Т.е. при $a \in [-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}]$ найдётся такое b , что система имеет 4 решения.

Ответ: $a \in [-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}]$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N5

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{243} 8$$

$$\log_3^4 x = 2,5 \log_x 3 - 6 \log_x 3 - 8$$

$$\log_3^4 x = -3,5 \log_x 3 - 8 \quad (1)$$

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25} (3'') - 8$$

$$\log_3^4(5y) = -2 \log_{5y} 3 + 5,5 \log_{5y} 3 - 8$$

$$\log_3^4(5y) = 3,5 \log_{5y} 3 - 8 \quad (2)$$

Рассмотрим разность (1) - (2):

$$\log_3^4 x - \log_3^4(5y) = -3,5 (\log_x 3 + \log_{5y} 3)$$

$$\begin{aligned} (\log_3 x - \log_3(5y))(\log_3 x + \log_3(5y))(\log_3^2 x + \log_3^2(5y)) &= \\ &= -3,5 \log_3 \left(\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3(5y)} \right) \end{aligned}$$

$$\log_3 \left(\frac{x}{5y} \right) \log_3(5xy) (\log_3^2 x + \log_3^2(5y)) = -3,5 \left(\frac{\log_3 \log_3(5xy)}{\log_3 x \cdot \log_3(5y)} \right)$$

$$\begin{cases} 5xy = 1 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3 \left(\frac{x}{5y} \right) \cdot (\log_3^2 x + \log_3^2(5y)) = \frac{-3,5}{\log_3 x \cdot \log_3(5y)} & (4) \end{cases}$$

$$\text{и } (3): xy = \frac{1}{5}.$$

$$(4): \log_3 \left(\frac{x}{5y} \right) \cdot \log_3 x \cdot \log_3(5y) < 0$$

$$\text{Ответ: } xy = \frac{1}{5} \approx 0,2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

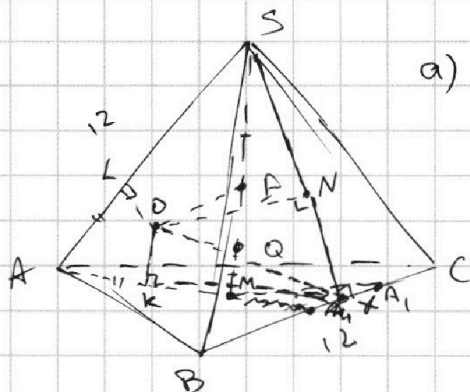
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

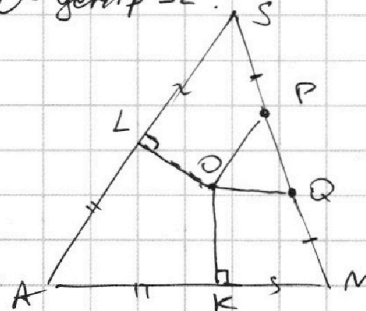
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№7



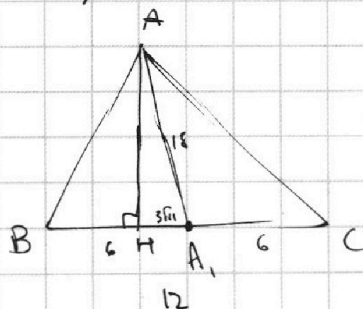
а) Рассмотрим $\triangle ASM$.
Заметим, что $ASM \in (ASM)$, где
 O - центр Ω .



$AK = AL$ как отрезки касательных, проведенных
к сечению Ω

из т. А. Степень т. S относ. сеч. Ω : $SL^2 = SP \cdot SQ = MQ \cdot MP$.
 $= MK^2 \Rightarrow MK = LS$. Тогда $AM = AS = 12$.

$AM = \frac{2}{3} AA_1$, т.к. М - т. пересек. медиан $\triangle ABC$. $AA_1 = 18$
Рассмотрим $\triangle ABC$.



Проведем в нем высоту AH .

По теореме Пифагора из $\triangle AHA_1$:

$$HA_1 = \sqrt{AA_1^2 - AH^2}. \quad AH = \frac{S_{ABC}}{\frac{1}{2} \cdot BC} = \frac{81 \cdot 90}{6} = 15.$$

$$HA_1 = \sqrt{324 - 225} = 3\sqrt{11}$$

$BH = 6 - 3\sqrt{11}$; По теореме Пифагора

$$\text{из } \triangle BAM: AB = \sqrt{36 + 99 - 36\sqrt{11} + 225} = 6\sqrt{10 - \sqrt{11}}$$

По теореме Пифагора из $\triangle AHC$: $AC = \sqrt{36 + 99 + 36\sqrt{11} + 225} = 6\sqrt{10 + \sqrt{11}}$

$$BB_1 = \frac{\sqrt{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{720 - 72\sqrt{11} + 188 - 360 - 36\sqrt{11}}}{2} = \frac{\sqrt{648 - 108\sqrt{11}}}{2} = \sqrt{162 - 27\sqrt{11}} =$$

$$= 3\sqrt{18 - 3\sqrt{11}} \\ CC_1 = \frac{\sqrt{2BC^2 + 2AC^2 - AB^2}}{2} = \frac{\sqrt{720 + 72\sqrt{11} + 288 - 360 + 36\sqrt{11}}}{2} = 3\sqrt{18 + 3\sqrt{11}}.$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 18 \cdot 9 \cdot \sqrt{18^2 - 99} = 18 \cdot 9 \cdot 15 = 9^2 \cdot 30 = 2430.$$

б) Опустим из N перпендикуляр NX на BC .

По теореме о трёх перпендикулярах т.к. $ON \perp (BSC)$ ((BSC) касается Ω); NX - проекция OX на (BSC) ; $NX \perp BC$, OX - секущая, то $OX \perp BC$.

По теореме о трёх перпендикулярах $OK \perp (ABC)$ ((ABC) касается

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



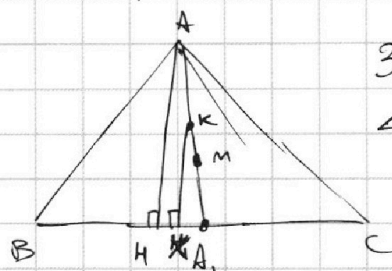
$\Omega \cap \Omega$; KX - проекция секущей OX на (ABC) ; $OX \perp BC$,
значит, $KX \perp BC$. Тогда двугранный угол при ребре
 BC равен $\angle KXN$.

Заметим, что XO - биссектриса $\angle KXN$ т.к. Ω касается
 (ABC) ; (BSC) , тогда $\angle KXO = \frac{1}{2} \angle KXN$. ^{т.к. прямоугольные}

Вот и заметим, что $SL = SN$ ^{т.к. $\triangle LOS = \triangle OSN$}
по катету и гипотенузе ($OL = ON = 5$; OS - общий)

$$AK = AL = AS - LS = 12 - 4 = 8.$$

Рассмотрим $\triangle ABC$



Заметим, что $\triangle AHA$, $\triangle XKA$, т.к.
 $\angle XAA$ - общий ($K \in AA_1$); $KX \perp BC$;
 $AH \perp BC \Rightarrow AH \parallel KX$.

$$\frac{AK}{AH} = \frac{AX}{AA_1}, \quad KX = \frac{AH \cdot AK}{AA_1}$$

$$AK = AA_1 - AK = 18 - 8 = 10; \quad KX = \frac{15 \cdot 10}{18} = \frac{50}{6} = \frac{25}{3}$$

$$\sin \angle KXO = \frac{OX}{KX} \quad \text{т.к. } \angle KXO = \frac{OX}{KX} = \frac{5}{\frac{25}{3}} = \frac{3}{5}; \quad \angle KXO = \arcsin \frac{3}{5}$$

$$\angle KXN = 2 \arcsin \frac{3}{5}.$$

Ответ: $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 2430$; $\angle KXN = 2 \arcsin \frac{3}{5}$, где $\angle KXN$ -
двугранный угол при ребре BC по доказанному.



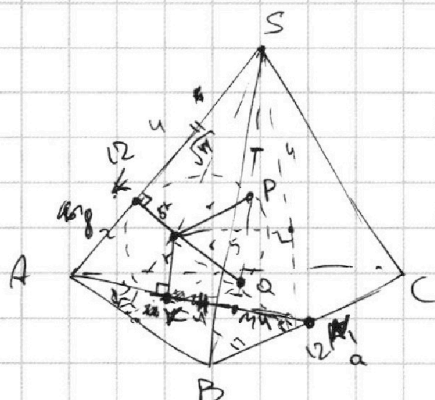
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} S_{ABC} &= 90^\circ \\ AM &= 12 \\ AP &= \frac{3}{2} \cdot 12 = 18 \end{aligned}$$

$$SL^2 = SP \cdot SQ = MQ \cdot MP = MK^2$$

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{2}} \\ &= \frac{4a^2 + 2a^2c^2 + 2a^2b^2 + 4b^2c^2}{2} \\ &= \frac{-144 + 200 - 12\sqrt{11} + 220 + 72\sqrt{11}}{4} = 324 \end{aligned}$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8$$

$$\frac{1}{\log_3^4 3} + (6 - 2.5) \log_3^4 3 + 8 = 0.$$

$$\begin{aligned} \log_3^4 x - \log_3^4 9 &= -3.5 \log_x 3 \\ (\log_3^4 x - \log_3^4 9)(\log_3^4 x + \log_3^4 9)(\log_3^4 x + \log_3^4 9) &= -3.5 \log_x 3 \\ \log_3^4 \frac{x}{9} \cdot \log_3^4 9x (\log_3^4 x + \log_3^4 9) & \end{aligned}$$

$$\frac{9^2 - 30}{2430}$$

$$\log_3^4 x = -3.5 \log_x 3 - 8$$

$$\log_3^4 x + \log_3^4(5y) = -3.5 \log_{5y} 3 - 3.5 \log_x 3 - 16.$$

$$\begin{aligned} x &= 3^a; 5y = 3^b; \\ a^4 + b^4 &= -3.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 3^a \\ 5y &= 3^b \\ (a-b)a \cdot b &< 0. \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

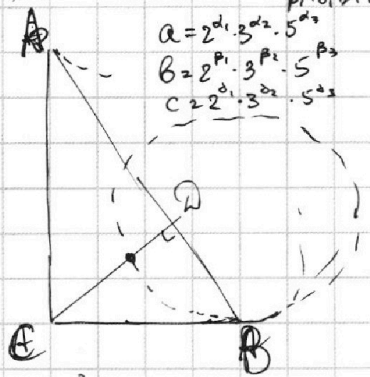
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



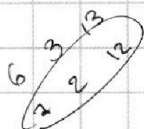
$$abc \geq [a; b; c]$$

$$a/2^{10} \Rightarrow c/2^{10}$$



$$GB^2 = GF \cdot GE$$

$$CF \cdot FE = GE = 4x \cdot d$$



$$GF = x \cdot d$$

$$GC = 2x \cdot d$$

$$GB = 2x(1-d)$$

$$4x^2(1-d) = 4x \cdot d \cdot 4x \cdot d$$

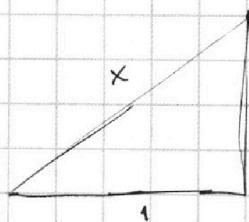
$$d^2 + d - 1 = 0$$

$$d = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{S_{CFE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{5+1-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{2}{3-\sqrt{5}} = \frac{2(3+\sqrt{5})}{9-5} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

12



$$\cos\left(\frac{\pi - 5(\pi^2 + 96)}{48}\right) =$$

$$abc: 2^{13}$$

$$a_1 + b_1 + c_1 \geq 21$$

$$a_1 + b_1 \geq 9$$

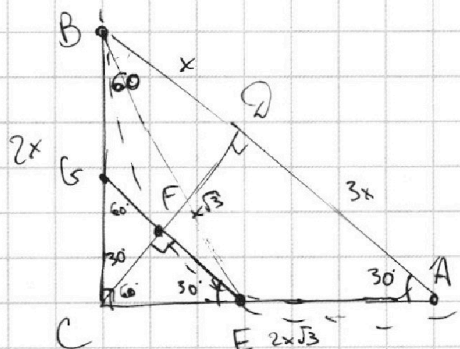
$$a_1 + b_1 \geq 19$$

$$b_1 + c_1 \geq 14$$

$$a = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3}$$

$$b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3}$$

$$c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3}$$



$$CB^2 = CF \cdot CA$$

$$4x^2 = \frac{4x^2}{x\sqrt{3}} = \frac{4x\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{CF}{BC} = \frac{FE}{AC}$$

$$AC = \sqrt{16x^2 - \frac{16x^2}{3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 16x^2}{3}} = \frac{4x\sqrt{6}}{3}$$

$$FE = \frac{CF \cdot AC}{BC} = \frac{\frac{4x\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{4x\sqrt{6}}{3}}{\frac{4x\sqrt{3}}{3}} = \frac{16x^2\sqrt{2}}{6x} = \frac{8x\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{S_{CFE}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4x\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{8x\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{4x\sqrt{6}}{3} \cdot 2x} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{2400}{25} = 24 \cdot 4 = 96$$

$$5\sqrt{x^2-1} = x + \frac{\pi}{2}$$

$$25(x^2-1) = x^2 + \pi x + \frac{\pi^2}{4}$$

$$24x^2 - \pi x - 25 - \frac{\pi^2}{4} = 0$$

$$x = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 4 \cdot 24(25 + \frac{\pi^2}{4})}}{48} = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 2400 + 24\pi^2}}{48} = \frac{\pi \pm \sqrt{25\pi^2 + 2400}}{48}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax+2y=36 \\ x^2+y^2=9 \\ x^2-12x+y^2+32=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax+2y=36 \\ x^2+y^2=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=1,56-\frac{a}{2}x \\ x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2+y^2=4 \end{cases}$$

$$y=kx+c$$

$$x^2+y^2=9$$

$$x^2+k^2x^2+2kxc+c^2=9$$

$$x^2(k^2+1)+2kcx+c^2-9=0$$

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow 0 = 4k^2c^2 - 4k^2c^2 - 4c^2 + 36 = 0$$

$$y=kx+3$$

$$-4(k^2+1)(c^2-9) = 4k^2c^2 - 4c^2 + 36 = 0$$

$$9k^2 - c^2 + 9 = 0$$

$$(x-6)^2+y^2=4$$

$$x^2-12x+36+k^2x^2+2kxc+c^2=4$$

$$x^2(k^2+1)+x(2kc-12)+32+c^2=0$$

$$0 = 4k^2c^2 + 144 - 48kc - 4(k^2+1)(32+c^2) = 4k^2c^2 - 48kc + 144 - 128k^2 - 4k^2c^2 - 128 - 4c^2$$

$$= -128k^2 - 4c^2 + 16 - 48kc = 0$$

$$+32k^2+c^2-4+12kc=0$$

$$(6k+c)^2 = 4+4k^2$$

$$y=kx-3,6k$$

$$x^2+k^2x^2-7,2k^2x+\frac{6^2}{100}k^2-9=0$$

$$\frac{2,4}{2,4} = \frac{9,6}{9,6}$$

$$1,75 = \frac{1,75}{100} = \frac{44}{25}$$

$$k = \frac{2}{\sqrt{\frac{44}{25}}} = \frac{2}{\frac{2}{5}\sqrt{11}} = \frac{5\sqrt{11}}{11}$$

$$a \in \left(-\frac{5\sqrt{11}}{11}; \frac{5\sqrt{11}}{11}\right)$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_3^2 x = \frac{5}{2} \log_3^2 x - 8$$

$$\log_3^4 x + 3,5 \log_3^2 x + 8 = 0$$

$$\log_3^4 x + \frac{3,5}{\log_3 x} + 8 = 0$$

$$\log_3^5 x + 8 \log_3^2 x + 3,5 = 0$$

$$2t^5 + 16t + 7 = 0$$

$$\log_3^4 x + \log_3^3 9$$

$$= 2 \sin \alpha \cos \alpha (4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha) + (2 \cos^2 \alpha - 1)(4 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin \alpha) =$$

$$= 8 \sin \alpha \cos^4 \alpha - 6 \sin \alpha \cos^2 \alpha + 8 \cos^4 \alpha \sin \alpha - 4 \sin \alpha \cos^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha \sin \alpha + \sin \alpha =$$

$$= \sin \alpha (16 \cos^4 \alpha - 12 \cos^2 \alpha + 1)$$

$$x^2=3$$

$$x=3^{\frac{1}{2}}$$

Q

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_3^2 y$$

$$(y_2 - y_1)^2$$

$$\sin 5\alpha (2 \sin(\alpha + 3\alpha)) =$$

$$= 2 \sin^2 \alpha \cos 3\alpha + 2 \sin 3\alpha \cos^2 \alpha =$$

$$= 2 \sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha) +$$

$$+ (\sin^2 \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos^2 \alpha) \cos 2\alpha =$$

$$= 2 \sin \alpha \cos \alpha (2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha) +$$

$$+ (2 \sin \alpha \cos^3 \alpha + 2 \cos^3 \alpha \sin \alpha - \sin \alpha) \cos 2\alpha =$$

$$= 4 \sin \alpha \cos^4 \alpha - 2 \sin \alpha \cos$$